

Лабораторный практикум по физике
Кафедра ПиТФ НГТУ

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ
МЕТОДОМ КЛЕМАН - ДЕЗОРМА

Целью работы является экспериментальное определение показателя адиабаты воздуха γ , равного отношению молярных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме: $\gamma = C_p / C_v$.

1. Теоретическое значение показателя адиабаты

Абсолютная температура T является мерой средней кинетической энергии $\bar{\varepsilon}$ хаотического движения (поступательного, вращательного и колебательного) атомов и / или молекул газа. Для поступательного движения

$$\bar{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$$

где k_B - постоянная Больцмана, чертой обозначено усреднение энергии (и квадрата скорости) по всем движущимся частицам газа.

В термодинамически равновесном состоянии молекулярного хаоса все направления движения атомов равновероятны, поэтому на каждое из трёх независимых направлений поступательного движения приходится 1/3 полной средней энергии:

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}k_B T$$

Молекулы помимо поступательного, могут также участвовать во вращательном и колебательном движениях. Независимые возможные перемещения системы в классической механике называются *степенями свободы*. В статистическом описании тепловых свойств макросистем доказывается **теорема о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы**. Согласно этой теореме на каждую степень свободы поступательного или

вращательного движения атомов и молекул приходится в среднем энергия, равная $k_B T/2$. Каждой колебательной степени свободы соответствует удвоенная тепловая энергия, равная $k_B T$.

$$\bar{\varepsilon}_{\text{кол}} = \bar{\varepsilon}_{\text{кин}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} = k_B T$$

Таким образом, полная внутренняя энергия системы N невзаимодействующих на расстоянии атомов или молекул (такова модель идеального газа) равна

$$U = N(i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}) \frac{k_B T}{2} = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} N_A k_B T = \nu \frac{i}{2} RT \quad (1),$$

где $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$, $i_{\text{кол}}$ – число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы, N_A – число Авогадро, R – универсальная газовая постоянная, $\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ – число молей вещества, m и M – соответственно его полная и молярная масса. Число $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$ условно называется (полным) числом степеней свободы молекулы.

Рис. 1 иллюстрирует подсчёт поступательных и вращательных степеней свободы атомов и различных молекул.

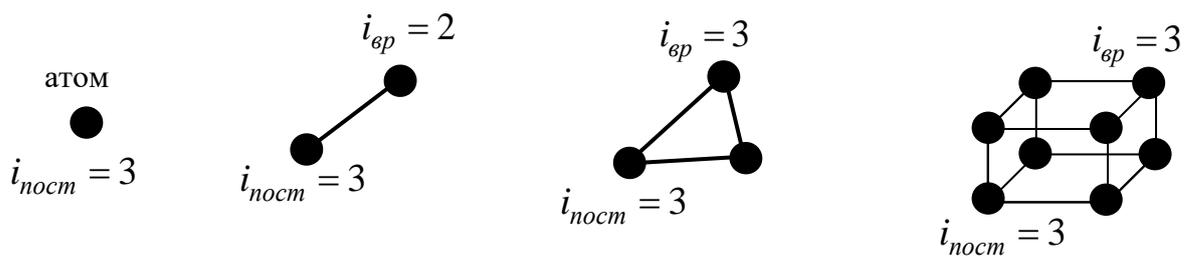


Рис. 1

Для расчёта теплоёмкости используют 1-й закон (1-ое начало) термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A \quad (2)$$

Или, учитывая, что элементарная работа газа $\delta A = PdV$,

$$\delta Q = dU + PdV \quad (3)$$

где δQ - количество теплоты, переданной рабочему телу (газу), dU - изменение внутренней энергии газа, δA - работа, совершённая газом, dV - изменение объёма газа. Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния газа, тогда как теплота и работа зависят от процесса перехода из одного состояния газа в другое. Поэтому с математической точки зрения dU - полный дифференциал функции U , тогда как $\delta Q, \delta A$ - бесконечно малые количества.

Теплоёмкость системы (газа, жидкости или твердого тела) – это скалярная физическая величина, равная отношению количества теплоты δQ , которое надо подвести к системе для бесконечно малого повышения её температуры dT к этому приращению температуры dT :

$$c_{сист} = \frac{\delta Q}{dT} \quad (4)$$

Различают молярную (одного моля), удельную (единицы массы) и полную теплоёмкость системы. Молярную теплоёмкость обозначают прописной (заглавной) буквой. Как и количество тепла δQ , теплоёмкость зависит от теплового процесса. Например, теплоёмкость *адиабатического* процесса ($\delta Q = 0$) равна нулю, а теплоёмкость *изотермического* процесса ($dT = 0$) бесконечна.

В *изохорическом* процессе $dV = 0$, $\delta A = 0$, $\delta Q = dU$, поэтому молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (5)$$

Для *изобарического* процесса из (4), (3) и (1), используя уравнение Клапейрона - Менделеева

$$PV = \nu RT,$$

а точнее, его дифференциальное следствие $dP \cdot V + P \cdot dV = \nu R \cdot dT$, которое в случае $P = const$ приобретает вид $P \cdot dV = \nu R \cdot dT$, получаем:

$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + PdV}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + \nu R \cdot dT}{dT} = \frac{i+2}{2} R. \quad (6)$$

Отсюда получаем связь C_P и C_V (уравнение Майера):

$$C_P = C_V + R \quad (7)$$

Тогда показатель адиабаты равен:

$$\boxed{\gamma_{теор} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}} \quad (8)$$

Вышеизложенная классическая теория не смогла правильно описать некоторые явления. Например, независимость теплоёмкости C_V в (5) от температуры опровергается опытом. Согласовать классическую теорию с экспериментом удалось, только предположив, что некоторые степени свободы в определённом диапазоне температур не возбуждаются, "вымораживаются". Например, согласие с опытом при $T \sim 300 \text{ K}$ достигается, если считать, что не возбуждаются колебания молекул. Это явление было объяснено только в квантовой теории.

Учитывая для двухатомных молекул с жёсткой связью атомов только поступательные и вращательные степени свободы, получаем $i = 5$, а из (8) $\gamma_{теор} = 1,4$.

С теоретическим значением γ для двухатомного газа (воздух на 99% состоит из двухатомных молекул) следует сравнить значение, полученное в эксперименте.

2. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка состоит из стеклянного баллона, закрытого пробкой, в которую вмонтированы две трубки и быстродействующий клапан выпуска воздуха из сосуда (рис. 2). Одна трубка соединяет полость сосуда с манометром. Манометром служит U -образная трубка, наполненная водой. Давление измеряется по разности уровней в коленах трубки. Вторая трубка соединяет полость баллона с насосом (не показан на рис. 2).

3. Метод Клеман - Дезорма.

Одним из самых простых и остроумных методов определения γ является метод Клеман - Дезорма, основанный на использовании адиабатических и изохорических процессов в воздухе, находящемся в сосуде (рис. 3).

В процессе эксперимента мы будем накачивать воздух в стеклянный сосуд (баллон) и выпускать его из сосуда. Объем сосуда V_c , естественно, постоянен, а количество воздуха в нём, т.е. число молей газа ν , будет изменяться. В этих условиях уравнение Клапейрона – Менделеева удобнее применять к исходному числу молей ν_0 газа (до накачивания воздуха в сосуд):

$$PV = \nu_0 RT$$

На рис. 3 приведены графики всех процессов эксперимента.

Кривая 0 – 1 – процесс накачивания воздуха в баллон. Число молей газа внутри баллона при этом возрастает. Можно считать, что исходное число молей ν_0 (т.е. исходная масса газа) занимает теперь объем V , меньший, чем объем всего сосуда V_c . Для наглядности можно представить себе, что исходная масса газа как бы заключена внутри невесомой эластичной непроницаемой оболочки внутри сосуда, показанной штриховой линией, и «не перемешивается» с воздухом, поступающим из насоса. Давление газа в баллоне (и внутри оболочки) при этом увеличивается от атмосферного P_0 до некоторого давления P_1 . Температура газа повышается.

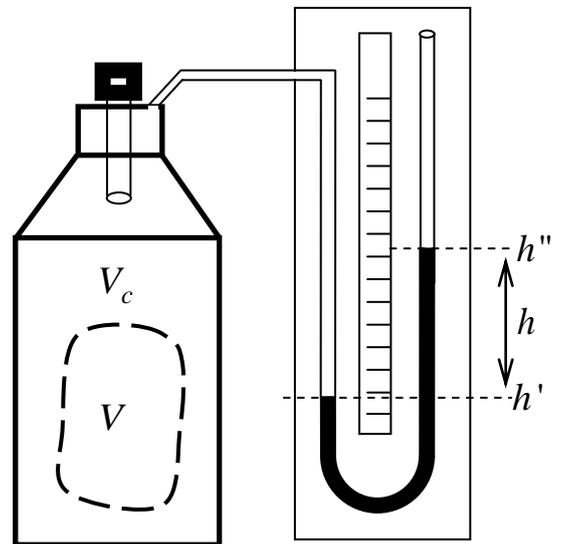


Рис. 2

Легко понять, почему это происходит. При сжатии работа газа $\delta A = PdV < 0$. Согласно (2), изменение внутренней энергии $dU = \delta Q - \delta A$. Если процесс накачивания воздуха был бы *адиабатическим* процессом ($\delta Q = 0$), то было бы $dT \sim dU > 0$ и повышение температуры было бы мак-

симальным. Реальный процесс сжатия, вообще говоря, сопровождается отдачей тепла во внешнюю среду $\delta Q < 0$.

Процесс 1 – 2. Как только накачивание прекращается, давление в баллоне начинает падать при неизменном объёме, что является следствием остывания газа (закон Шарля). На участке 1 - 2 температура снижается до комнатной за счет теплообмена с окружающей средой. Давление при этом уменьшается от P_1 до P_2 . В условиях эксперимента выравнивание температур длится не менее трёх минут. Следовательно, предыдущий процесс 0 - 1 будет близок к адиабатическому, если накачивание воздуха в сосуд производить достаточно быстро.

Процесс 2 – 3. Когда давление перестает изменяться (точка 2), резко выпускаем воздух из баллона. Этот процесс можно считать близким к адиабатическому расширению. В результате объем рассматриваемой массы газа увеличивается от $V_2 = V_1$ до $V_3 = V_4$, давление уменьшается от P_2 до атмосферного $P_3 = P_0$. При этом температура понижается ниже комнатной (почему?).

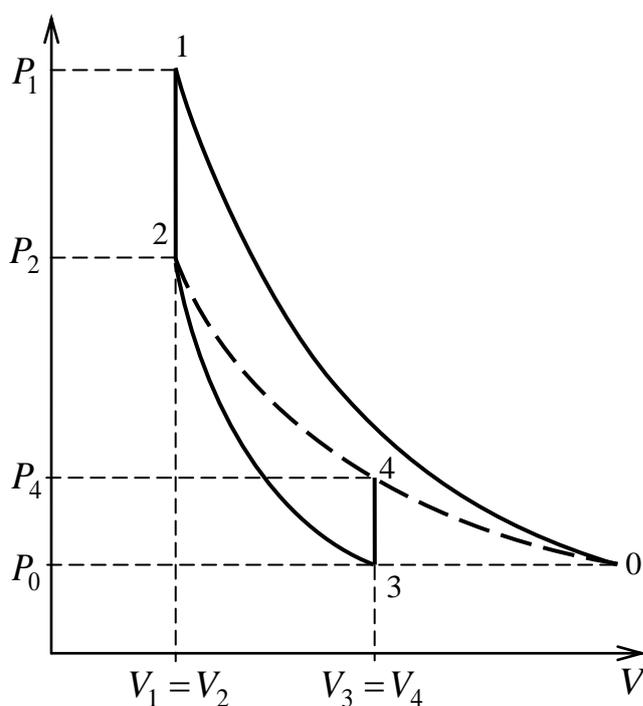


Рис. 3

Выпуск воздуха длится несколько секунд, в течение которых теплообмен через стенки баллона незначителен, поэтому процесс 2 - 3 ближе к адиабатическому, чем процесс 0 – 1. Однако следует обратить внимание на другую сторону “быстроты” выполнения процесса. Уравнение, описывающее адиабатический процесс $PV^\gamma = const$, справедливо лишь для равновесных, квазистатических процессов. Вопрос: можно ли считать столь быстрое адиабатическое расширение квазистатическим (равновесным) процессом?

Оценим время установления равновесия газа в сосуде. При выпуске воздуха внутри баллона около выпускного крана создаётся некоторое разрежение. Это возмущение распространяется внутрь баллона со скоростью звука в воздухе. Если принять характерный размер баллона равным 0,7 м, а скорость звука равной 330 м/с, то указанное возмущение распространится на весь объём за время около 0,002 с. В результате многократных отражений от различных участков стенок баллона первоначальное возмущение равномерно распределяется по всему объёму. За две секунды в баллоне должно произойти около тысячи отражений. Этого, надо полагать, вполне достаточно для установления равновесия.

Процесс 3 – 4. В точке 3 температура ниже комнатной и теперь она повышается за счет теплообмена с окружающей средой. В это время мы никаких действий не совершаем – объём газа не изменяется. В конечной точке 4 температура газа в баллоне становится равной комнатной.

Заметим, что в точках 0, 4, 2 газ имеет одинаковую температуру – комнатную, т.е. эти точки лежат на одной изотерме 0 – 4 – 2, которую называют “мнимой” изотермой (иногда “мысленной” или “гипотетической”), подчёркивая, что реально изотермический процесс 0 – 4 – 2 не происходит. Это обстоятельство позволило Клеман - Дезорму обойтись без измерения начального и конечного объёма газа. Именно в этом и заключается “изюминка” предложенного метода. Кроме того, несмотря на наличие быстропротекающих процессов 0 – 1 и 2 – 3, измерения проводятся в конце медленных процессов 1 – 2 и 3 – 4, что уменьшает погрешность измерений.

Рассмотрим систему уравнений, соответствующих процессам 2 – 3, 3 – 4 и 4 – 2. Для точек 2 и 3, лежащих на одной адиабате, $P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma$, или, так как $P_3 = P_0$,

$$P_2V_2^\gamma = P_0V_3^\gamma \quad (5)$$

Для точек 2 и 4, лежащих на одной мысленно проведенной изотерме, по закону Бойля – Мариотта

$$P_2V_2 = P_4V_4 \quad (6)$$

Процесс 3 – 4 изохорический, для которого

$$V_3 = V_4 \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем:

$$V_2 = \frac{P_4}{P_2} V_3 \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получаем уравнение

$$\left(\frac{P_4}{P_2}\right)^\gamma = \frac{P_0}{P_2} \quad (9)$$

Логарифмируя (9), выражаем γ через атмосферное давление P_0 и давления в состояниях 2 и 4, которые требуется измерить в процессе эксперимента:

$$\gamma = \frac{\ln P_0 - \ln P_2}{\ln P_4 - \ln P_2} = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4} \quad (10)$$

Измерение

Для величины давления воздуха в баллоне в состоянии, соответствующем точке 2 рис.3, имеем:

$$P_2 = P_0 + \rho gh_1 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0}\right)$$

где P_0 – атмосферное давление, ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения, $h_1 = h_1'' - h_1'$ – разность уровней в U-образной трубке, а ρgh_1 , таким образом, – разность между атмосферным давлением и давлением воздуха в баллоне после первоначального накачивания воздуха и охлаждения его до комнатной температуры. Аналогично, для давления воздуха в баллоне после адиабатического расширения и нагревания до комнатной температуры получаем:

$$P_4 = P_0 + \rho gh_2 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0}\right)$$

где $h_2 = h_2'' - h_2'$ – разность уровней в U-образной трубке при втором измерении давления (в точке 4 рис.3). Подставив эти выражения в формулу (9), получим выражение для определения γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0}{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0 \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0}\right)} = \\ &= \frac{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0}{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) - \ln P_0 - \ln \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0}\right)} \end{aligned} \quad (11)$$

Максимальное превышение давления в баллоне над атмосферным – около 20 см водного столба. Атмосферное давление составляет примерно 10 м водного столба. Следовательно, относительное отклонение давления от равновесного атмосферного невелико

$$\frac{\rho g h_1}{P_0}, \frac{\rho g h_2}{P_0} \sim 2 \cdot 10^{-2} \ll 1 \ll 1$$

Тогда в (11) можно ограничиться линейными членами в разложении логарифмов в ряд: $\ln(1+x) \approx x$; $x \ll 1$. Остаток разложения не превышает следующего, квадратичного члена разложения порядка 10^{-4} , что существенно меньше относительной погрешности наших измерений.

Поэтому из формулы (11) получаем

$$\gamma = \frac{\frac{\rho g h_1}{P_0}}{\frac{\rho g h_1}{P_0} - \frac{\rho g h_2}{P_0}}.$$

$$\gamma_{\text{экср}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

(12)

Таким образом, эксперимент сводится к измерениям h_1 и h_2 , которые являются результатами косвенных измерений. Прямыми измерениями в данной работе являются измерения уровней воды в U -образной трубке слева и справа: h_1' , h_2' и h_1'' , h_2'' – координаты уровней воды в левой и правой трубках при измерении соответствующих давлений.

$$\gamma_{\text{эксн}} = \frac{(h_1'' - h_1')}{(h_1'' - h_1') - (h_2'' - h_2')} \quad (13)$$

Оценка стандартного отклонения показателя адиабаты

Формула для оценки стандартного отклонения величины γ может быть получена по правилам обработки результатов косвенных измерений с учетом того факта, что погрешности прямых измерений величин h_1' , h_2' и h_1'' , h_2'' одинаковы.

С другой стороны, мы можем провести три (или более) измерения случайной величины γ и по ним вычислить доверительный интервал для γ .

По формуле (13) Вводного занятия (часть 2) доверительный интервал для трёхкратного измерения величины γ с доверительной вероятностью 0,95 равен ($N = 3, P = 0,95$):

$$\bar{\gamma} \pm \frac{t(P, N) \cdot s_\gamma}{\sqrt{N}} = \bar{\gamma} \pm \frac{4,3 \cdot s_\gamma}{\sqrt{3}} = \bar{\gamma} \pm 2,48s_\gamma; \quad N = 3; P = 0,95, \quad (14)$$

где выборочное СКО случайной величины γ равно

$$s_\gamma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \bar{\gamma})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\gamma_i - \bar{\gamma})^2}. \quad (15)$$

4. Задание к работе

1. Измерьте показатель адиабаты три раза.
2. Рассчитайте стандартное отклонение величины γ .
3. Сравните значение γ , полученное экспериментально, с теоретическим значением для жёстких двухатомных молекул.

5. Контрольные вопросы

1. Что такое теплоёмкость?
2. Что такое молярная и удельная теплоемкости, какова связь между ними?
3. Что такое степени свободы в молекулярно-кинетической теории газов?
4. Чему равно число степеней свободы двухатомной или трёхатомной молекулы, с жёсткой или с упругими связями между атомами?
5. Что такое показатель адиабаты γ ? Как эта величина связана с числом степеней свободы молекулы? Выведите эту связь на основе 1-го начала термодинамики.
6. Как на $\gamma_{теор}$ влияет наличие в воздухе трехатомных молекул (углекислого газа, паров воды ...)?
7. Нарисуйте на $P-V$ - диаграмме все процессы, используемые для измерения γ (исходное состояние обозначьте нулевым номером). Запишите уравнения этих процессов.
8. Какой объём изображается на $P-V$ - диаграмме по одной из координатных осей?
9. Какому процессу принадлежат состояния в точках 0, 4, 2?
10. Объясните, почему в некоторых из рассматриваемых процессов возникает отклонение температуры от комнатной?
11. Выведите формулу, выражающую связь γ с измеряемыми давлениями.

12. Что измеряет U -образный манометр? Как соотносятся давления, измеряемые манометром, с атмосферным давлением?
13. Выведите формулу, выражающую γ через показания манометра.
14. Согласуется ли полученное Вами значение с $\gamma_{\text{экс}}$ теоретическим?
15. Чем может быть объяснено имеющееся расхождение $\gamma_{\text{теор}}$ и $\gamma_{\text{экс}}$?

6. Литература

1. Савельев И. В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. Любой год издания
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Наука, любой год издания