Р а б о т а № 35

ЛИНЗА КАК ЭЛЕМЕНТ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Цель работы – проверить экспериментально, что распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы представляет собой квадрат фурье-образа распределения комплексной амплитуды во входной плоскости линзы.

Теоретическое введение

Основной элемент геометрической оптики – линза. С помощью линз можно получать изображения предметов как действительные, так и мнимые, как увеличенные, так и уменьшенные. Существует громадное количество приборов, в которых используется это свойство линзы. С развитием волновой оптики было обнаружено еще одно важное свойство линзы, позволившее создать новый класс оптических приборов.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть световые колебания в плоскости $x'y'$ описываются функцией

$$E'(x', y', t) = E'(x', y')e^{i\varphi(x', y')}e^{i\omega t}.$$

Комплексная амплитуда света

$$\tilde{E}'(x', y') = E'(x', y')e^{i\varphi(x', y')}$$

включает в себя информацию не только об амплитуде, но и о начальной фазе колебаний. Предположим, что функция $\tilde{E}'(x', y')$ известна, т. е. известно распределение амплитуды и фазы световых колебаний в плоскости $x'y'$, показанной на рис. 1. Необходимо найти распределение амплитуды света $E(x, y)$ на плоскости xy, отстоящей от плоскости $x'y'$ на расстояние l.

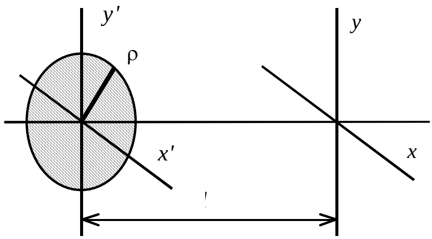

Рис. 1

При решении этой задачи используется принцип Гюйгенса–Френеля. В соответствии с этим принципом каждая точка волновой поверхности $x'y'$ является источником вторичных сферических волн, которые, распространяясь, интерферируют между собой и создают наблюдаемую дифракционную картину в плоскости xy. Решение упрощается, если предположить, что $l >> \rho^2/\lambda$, где ρ – радиус области плоскости $x'y'$, в пределах которой амплитуда света отлична от нуля; λ – длина световой волны. Решение задачи при этом условии называется приближением Фраунгофера. В данном случае $E(x, y)$ описывается формулой

$$E(x,y) = \frac{1}{\lambda l}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}'(x',y') \exp\left[-\frac{i\,2\pi(xx'+yy')}{\lambda l} \right] dx'dy' \right|. \qquad (1)$$

Если ввести обозначения $\nu_x = x/\lambda l$, $\nu_y = y/\lambda l$, то формула (1) примет следующий вид:

$$E(x,y) = \frac{1}{\lambda l}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}'(x',y') \exp\left[-i\,2\pi(\nu_x x' + \nu_y y') \right] dx'dy' \right|. \qquad (2)$$

Из курса математики известно, что любую функцию $f(t)$ можно представить интегралом (суммой) гармонических функций, т. е.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i\,2\pi\nu t)\, d\nu\,. \qquad (3)$$

Здесь $\nu = 1/T$ – частота гармонической функции, а T – ее период. Функция $F(\nu)$, стоящая под интегралом, называется преобразованием Фурье или фурье-образом функции $f(t)$. Фурье-образ может быть найден по формуле

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\,2\pi\nu t)\, dt\,. \qquad (4)$$

В физике метод Фурье находит большое применение при анализе протекания различных процессов во времени. Тогда t – это время, а ν – частота колебаний во времени.

Если некоторая функция $f(x)$ зависит только от x, то ее фурье-образ

$$F(\nu_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\,2\pi\nu_x x)\,dx\,. \tag{5}$$

В этом случае ν_x называется пространственной частотой и является величиной, обратной периоду гармонической функции вдоль оси x.

Если функция зависит от двух координат – x и y, т. е. $f = f(x, y)$, то преобразование Фурье в этом случае называется двумерным. Фурье-образ функции имеет вид

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\left[-i\,2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right] dxdy\,. \tag{6}$$

Сравнивая выражение (6) с интегралом в формуле (2), приходим к выводу, что с точностью до постоянного множителя распределение амплитуды света в плоскости xy является фурье-образом распределения в плоскости $x'y'$.

Использовать полученное свойство при свободной дифракции в пространстве оказалось затруднительным, так как для того чтобы выполнялось приближение Фраунгофера, расстояние l должно быть очень большим. Так, если принять $\rho =$ 0,5 см, λ = 0,5 мкм, то $l > 200$ м.

Для уменьшения этого расстояния оказалось возможным применить собирающую линзу. Поскольку $l \gg \rho$, интерферирующие лучи практически параллельны. Если вплотную к плоскости $x'y'$ приставить тонкую собирающую линзу, то параллельные лучи, исходящие от различных вторичных источников, расположенных в плоскости $x'y'$, будут собираться в точку и интерферировать в фокальной плоскости линзы. Можно также доказать, что разности фаз между интерферирующими лучами будут такими же, как и при интерференции на удаленном на расстояние l экране. Поэтому амплитуду света в фокальной плоскости линзы можно записать по формуле (2):

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda f}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}'(x', y') \exp\left[-i\,2\pi(\nu_x x' + \nu_y y')\right] dx'dy'\right|\,, \tag{7}$$

где $\nu_x = x/\lambda f$, $\nu_y = y/\lambda f$ – пространственные частоты, а f – фокусное расстояние линзы.

Следовательно, с точностью до постоянного множителя распределение амплитуды светового поля в фокальной плоскости линзы представляет собой фурье-образ распределения комплексной амплитуды света во входной плоскости линзы.

Указанное свойство линзы широко используется в современных оптических устройствах обработки информации, с помощью которых решаются задачи обработки сигналов и изображений, распознавания образов, анализа зрительной системы человека и др. Соответствующий раздел оптики называется фурье-оптикой.

Для того чтобы во входной плоскости линзы создать заданное распределение света, выражаемое функцией $\tilde{E}'(x', y')$, перед линзой помещают пластинку. На нее параллельно оптической оси системы направляется параллельный пучок монохроматического света длиной волны λ и постоянной по сечению пучка амплитуды. Коэффициент пропускания света для этой пластинки должен зависеть от координат x' и y' так, чтобы амплитуда проходящего через пластинку света описывалась заданной функцией $\tilde{E}'(x', y')$. Такую пластинку называют транспарантом. Фурье-образ функции, записанной на транспаранте, появляется на экране практически мгновенно — за время прохождения света от транспаранта до экрана, что недостижимо для электронных цифровых процессоров.

Распределение света в фокальной плоскости линзы обычно регистрируется с помощью фотоприемников, напряжение на выходе которых пропорционально не амплитуде света, а его интенсивности. Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, а следовательно, распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы пропорционально квадрату фурье-образа функции $\tilde{E}'(x', y')$, т. е.

$$I(x, y) \sim \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}'(x', y') \exp\left[\frac{-i\, 2\pi(xx' + yy')}{\lambda f} \right] dx'dy' \right|^2 . \qquad (8)$$

Описание эксперимента

В настоящей работе предлагается на частном примере убедиться, что распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы представляет собой квадрат фурье-образа распределения амплитуды во входной плоскости линзы.

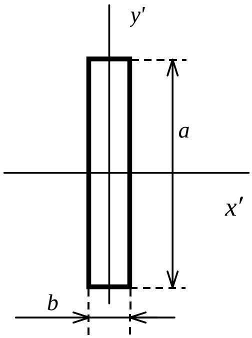

Рис. 2

Поместим во входной плоскости линзы узкую щель, ширина которой равна b, а длина a, как показано на рис. 2. На щель направим плоскую световую волну с волновым вектором, параллельным оптической оси. Амплитуду волны обозначим A_0. Тогда в плоскости расположения щели для точек внутри щели $\tilde{E}'(x', y') = A_0$, а для точек вне щели $\tilde{E}'(x', y') = 0$. Распределение амплитуды света в фокальной плоскости линзы будет иметь вид:

$$A(x,y) \sim \left| \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} A_0 \exp\left[\frac{-i\, 2\pi(xx' + yy')}{\lambda f} \right] dx'dy' \right| =$$

$$= A_0 ab \frac{\sin(\pi bx/\lambda f)}{\pi bx/\lambda f} \frac{\sin(\pi ay/\lambda f)}{\pi ay/\lambda f}. \qquad (9)$$

Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, для распределения интенсивности в фокальной плоскости имеем:

$$I(x,y) = I_0 \frac{\sin^2(\pi bx/\lambda f)}{(\pi bx/\lambda f)^2} \frac{\sin^2(\pi ay/\lambda f)}{(\pi ay/\lambda f)^2}, \qquad (10)$$

где I_0 – интенсивность света в точке с координатами $x = 0, y = 0$.

Два сомножителя в выражении (10) имеют вид функции $(\sin\alpha/\alpha)^2$. График этой функции показан на рис. 3.

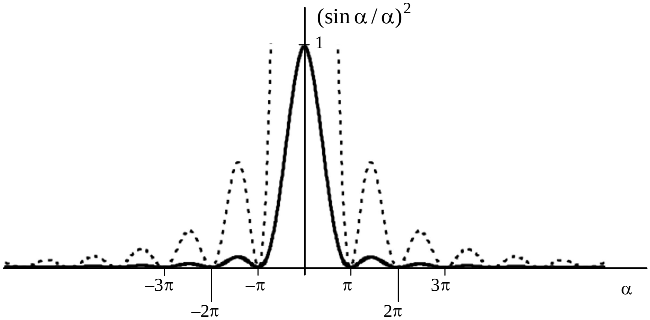

Рис. 3

Минимум этой функции наблюдается при

$$\alpha = m\pi\,, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11}$$

Из выражений (10) и (11) следует, что ширина центрального максимума вдоль оси *x*, т.е. расстояние между –1 и +1 минимумами, равно

$$\Delta x = 2\lambda f/b,$$

а вдоль оси y –

$$\Delta y = 2\lambda\, f/b.$$

В нашей установке длина щели a во много раз больше ширины щели b. Поэтому $\Delta y << \Delta x$. Это означает, что свет в фокальной плоскости линзы сосредоточен в виде узкой полоски, вытянутой вдоль оси x при $y = 0$. Зависимость интенсивности света от координаты x в этой полоске определяется формулой

$$\frac{I(x,y)}{I_0} = \frac{\sin^2(\pi bx/\lambda f)}{(\pi bx/\lambda f)^2} \tag{12}$$

и преобразование Фурье можно считать одномерным.

Для того чтобы убедиться экспериментально, что распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы соответствует формуле (12) и тем самым подтвердить, что это распределение пропорционально квадрату фурье-образа функции $\tilde{\Psi}(x', y')$, можно определить координаты для некоторых минимумов и максимумов функции

$I(x)$ и величину $I(x)/I_0$ для некоторых максимумов и сравнить эти данные с рассчитанными теоретически в соответствии с формулой (12).

Исследовав функцию $I(x)$ на экстремум, можно заключить, что минимумы будут наблюдаться в точках с координатами

$$x = m\frac{\lambda f}{b}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13}$$

Центральный максимум наблюдается при $x = 0$. Максимумы более высоких порядков расположены не точно посредине между минимумами. Ниже приведены выражения для координат максимумов ±1,±2 и ±3 порядков:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{\pm 1} = \pm 1{,}430\lambda f/b \approx \pm 1{,}5\lambda f/b, \\ x_{\pm 1} = \pm 1{,}430\lambda f/b \approx \pm 1{,}5\lambda f/b, \\ x_{\pm 1} = \pm 1{,}430\lambda f/b \approx \pm 1{,}5\lambda f/b. \end{array}} \tag{14}$$

Значения функции $I(x)$ в центральном и трех последующих максимумах соотносятся как

$$\boxed{I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1{:}0{,}047{:}0{,}017{:}0{,}0083.} \tag{15}$$

Расстояние между соседними максимумами (или минимумами) в фокальной плоскости линзы невелико. Поэтому для удобства измерений с помощью другой линзы в некоторой плоскости создается действительное увеличенное изображение картины распределения света в фокальной плоскости. В этой плоскости располагается фотоприемник. Если в плоскости фотоприемника ось X направить параллельно оси x, а начало отсчета совместить с положением центрального максимума, то изображение точки, имеющей в фокальной плоскости координату x, будет иметь в плоскости фотоприемника координату X, причем $X = kx$, где k – коэффициент увеличения.

Измерив координаты максимумов и минимумов в плоскости фотоприемника, можно вычислить соответствующие координаты в фокальной плоскости линзы по формуле

$$x = X/k\,. \tag{16}$$

Описание экспериментальной установки

Оптическая схема установки показана на рис. 4.

Источником монохроматического света является лазер Лр. Пучок лучей, выходящий из лазера, будем для простоты считать параллельным. Система линз $Л_1$ и $Л_2$ преобразует этот пучок в также параллельный пучок, но большего поперечного сечения. Это необходимо для того, чтобы длина освещенной части щели Щ, стоящей перед линзой $Л_3$, была во много раз больше ее ширины. Линза $Л_4$ создает в плоскости фотоприемника ФП увеличенное изображение распределения света в фокальной плоскости линзы $Л_3$. Фотоприемник смонтирован на отсчетном устройстве, с помощью которого он может перемещаться вдоль оси X. Перемещение может быть измерено с точностью до 0,1 мм.

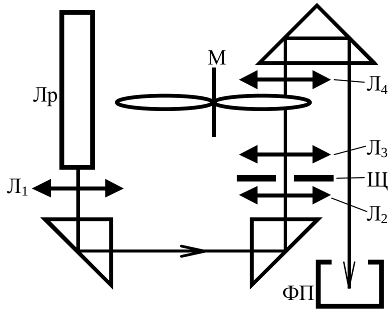

Рис. 4

Для того чтобы на результаты измерений не влиял свет, падающий на фотоприемник от посторонних источников, луч лазера модулируется по интенсивности с помощью модулятора М. Модулятор представляет собой крыльчатку, насаженную на ось миниатюрного электромотора. При вращении крыльчатка пересекает лазерный луч, в результате чего на фотоприемник попадает свет в виде периодической последовательности импульсов. С выхода фотоприемника электрические импульсы подаются на вход осциллографа и наблюдаются на его экране. С помощью осциллографа можно измерить амплитуду напряжения в импульсах, подаваемых на его вход. Напряжение на выходе фотоприемного устройства $U_ф(X)$ пропорционально интенсивности падающего на него света. Максимумы и минимумы на зависимости $U_ф(X)$ должны наблюдаться в тех же точках, как и для $I(X)$. Соотношения между напряжениями в отдельных максимумах должны быть такими же, как и между соответствующими значениями интенсивности света.

Задания

1. Измерить с помощью осциллографа напряжение на выходе фотоприемника $U_ф$ для ряда значений координаты X, измеренной с помощью отсчетного устройства фотоприемника. За начало отсчета координаты X принять точку, в которой напряжение на выходе фотоприемника имеет максимальное значение (центральный максимум). Число измерений должно быть достаточным для того, чтобы зависимость $U_ф$ от X включала в себя центральный максимум и максимумы ±1 и ±2 порядков, а также минимумы ±1, ±2 и ±3 порядков. Полученные данные занести в таблицу.

2. Построить график зависимости $U_ф$ от X.

3. По графику определить координаты X минимумов ±1, ±2 и ±3 порядков и координаты максимумов ±1 и ±2 порядков.

4. По формуле (16) определить координаты x соответствующих минимумов и максимумов.

5. По формулам (13) и (14) рассчитать теоретически ожидаемые координаты x тех же максимумов и минимумов, что и в п. 4. Полученные значения сравнить с экспериментальными.

6. Из графика найти отношения напряжений $U_ф(X)/U_ф(0)$ для максимумов ±1 и ±2 порядков и сравнить с предсказываемыми теоретически по формуле (16).

7. Сделать выводы из полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу для двумерного преобразования Фурье.

2. Что такое пространственная частота?

3. Как выглядит зависимость интенсивности света от координаты x в фокальной плоскости линзы, если во входной плоскости расположена узкая щель?

4. Получите формулу для определения координат минимумов функции $I(x)$.

5. Почему в оптической системе прибора используется модулятор интенсивности света?

Литература

1. *Матвеев А.Н.* Оптика. – М.: Высш. шк., 1985 (§ 33, 35).
2. *Стюард И.* Введение в фурье-оптику. – М.: Мир, 1985.