

## Работа № 30

### ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ЩЕЛИ

**Цель работы** – экспериментально проверить предполагаемую зависимость интенсивности дифрагированного света от угла дифракции, положение дифракционных минимумов и максимумов и соотношение между интенсивностями в различных максимумах.

#### Дифракция на щели

Рассмотрим дифракцию монохроматического излучения на щели. Предположим, что параллельный пучок света падает нормально на плоскость щели. Сразу за щелью располагается собирающая линза, а в задней фокальной плоскости этой линзы находится экран. Для анализа дифракционной картины воспользуемся принципом Гюйгенса – Френеля [1, 2]. В соответствии с этим принципом волновую поверхность в плоскости щели можно разбить на отдельные элементарные площадки, каждую из которых можно считать вторичным источником волн. Световые волны, приходящие на экран от вторичных источников, интерферируют между собой и создают наблюдаемую дифракционную картину.

Для решения нашей задачи площадки, являющиеся вторичными источниками, удобнее всего выбрать в виде узких полосок (ширина которых значительно меньше длины волны  $\lambda$ ), расположенных в плоскости щели и параллельных длине щели.

Вначале рассмотрим картину, создаваемую на экране излучением одной светящейся полоски. Соответствующая схема показана на рис. 1, где  $\Pi$  – светящаяся полоска;  $L$  – линза с фокусным расстоянием  $f'$ ;  $\mathcal{E}$  – экран.

Каждая светящаяся точка излучает сферическую волну. Однако огибающая, т.е. результирующая волновая поверхность от всех точек светящейся линии, имеет цилиндрическую симметрию. Световые лучи, нормальные к волновым поверхностям, расходятся в радиальных направлениях, причем все лучи параллельны плоскости  $xz$ .

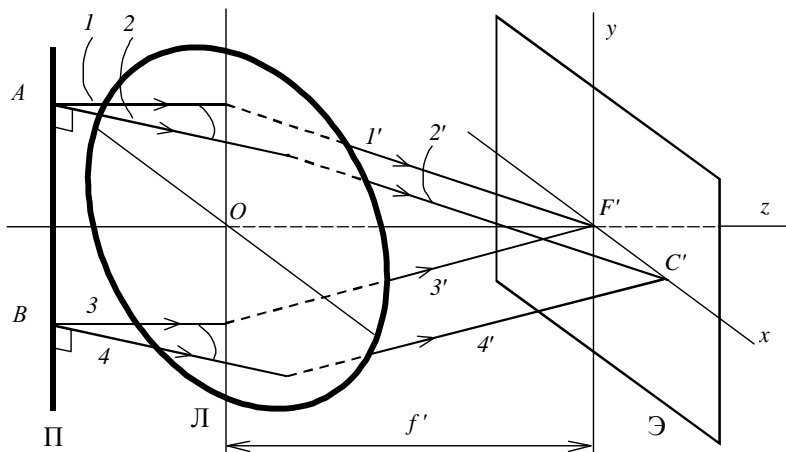


Рис. 1

Параллельный пучок падающих лучей, преломляясь, сходится в одну точку задней фокальной плоскости линзы [3]. В частности, падающие лучи, параллельные оптической оси линзы – оси  $z$ , после преломления сходятся в заднем фокусе линзы  $F'$ . На рис. 1 показаны два таких падающих луча –  $1$  и  $3$  и соответствующие им преломленные лучи  $1'$ ,  $3'$ .

Направленные под одинаковым углом к плоскости  $yz$  параллельные лучи  $2$  и  $4$  образуют пучок, лучи которого параллельны плоскости  $xz$ . Следовательно, преломленные лучи  $2'$  и  $4'$  сходятся на экране в точке  $C'$ , расположенной также на оси  $x$ .

Таким образом, совокупность всех лучей, проходящих через линзу, сфокусируется в систему светящихся точек на оси  $x$ . На экране должна наблюдаться светлая линия вдоль оси  $x$ . Эта линия – дифракционная картина, формируемая источником света – бесконечно узкой полоской  $\Pi$  в задней фокальной плоскости линзы. Заметим, что при смещении полоски в плоскости, перпендикулярной к оптической оси, так, чтобы она оставалась параллельной оси  $y$ , дифракционная картина на экране не изменится. Соответствующая линия по-прежнему будет располагаться на оси  $x$ .

Рассмотрим теперь дифракцию на щели. Поставим перед линзой перпендикулярно к ее оптической оси непрозрачный экран и прорежем

в нем длинную щель шириной  $b$ . Волновую поверхность в плоскости щели мысленно разобьем на  $n$  одинаковых узких полосок шириной  $s = b/n$ . На рис. 2 показан случай  $b = 3s$ .

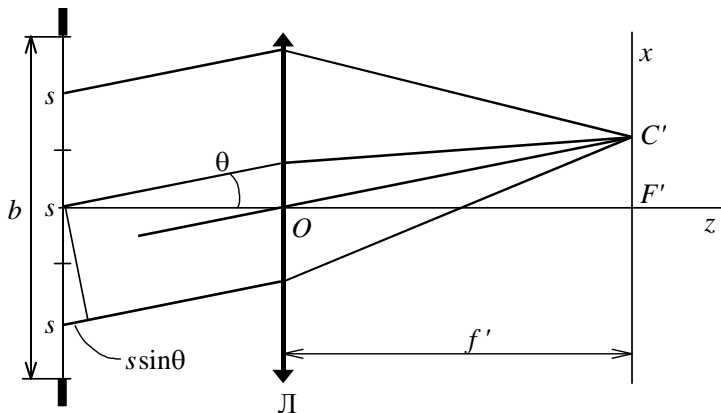


Рис. 2

Рассмотрим систему параллельных лучей, выходящих из центра каждого вторичного источника под углом  $\theta$  к оптической оси. Система этих лучей должна сойтись в одну точку  $C'$ , лежащую на оси  $x$  в фокальной плоскости линзы  $F'$ , перпендикулярной к оптической оси  $z$  (на экране). Если вторичные источники в плоскости щели когерентны и колеблются в одинаковой фазе, то разность фаз волн, пришедших в точку  $C'$ , определяется оптической разностью хода соответствующих лучей. При этом следует отметить, что линза обладает важным для нашей задачи свойством: разность фаз между параллельными лучами, прошедшими линзу и сошедшимися в фокальной плоскости, сохраняется. Поэтому оптическая разность хода лучей от соседних источников равна только отрезку  $s \sin \theta$ , показанному на рис. 2. Соответствующая разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} s \sin \theta. \quad (1)$$

Если вторичные источники – полоски пронумеровать по порядку от одного края щели к другому, то можно установить закономерность, что разность фаз между колебаниями в точке  $B'$  от волн с  $n = 2$  и  $n = 1$  равна  $\delta$ ; от волн с  $n = 3$  и  $n = 2$  равна  $2\delta$ ; от волн с  $n = 4$  и  $n = 1$  равна

$3\delta$ ; ... от волн с номером  $n$  и с  $n = 1$  равна  $(n-1)\delta$ . Поэтому в точке наблюдения  $B'$  колебание напряженности электрического поля световой волны можно представить суммой ряда  $n$  слагаемых

$$a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \delta) + a \cos(\omega t + 2\delta) + \dots + a \cos(\omega t + (n-1)\delta).$$

Эта сумма равна

$$a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos\left(\omega t + \frac{n-1}{2}\delta\right).$$

Соответствующее доказательство приведено в *Приложении* к настоящей работе.

Из последнего выражения следует, что амплитуда результирующего колебания будет равна

$$A = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}. \quad (2)$$

Используя формулу (1), выражение (2) можно записать в виде

$$A = a \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{\lambda} s \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \theta\right)}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $sn = b$  и  $s \ll \lambda$ , выражение (3) преобразуем к виду

$$A = an \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta}. \quad (4)$$

Произведение  $an$  обозначим как  $A_0$ . Это амплитуда света при  $\theta = 0$ , т.е. в фокусе линзы. Тогда

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta}. \quad (5)$$

Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)^2} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta. \quad (6)$$

График зависимости  $I(\sin \theta)$  показан на рис. 3 сплошной линией. Штриховой линией показан график той же функции с десятикратным увеличением по оси ординат.

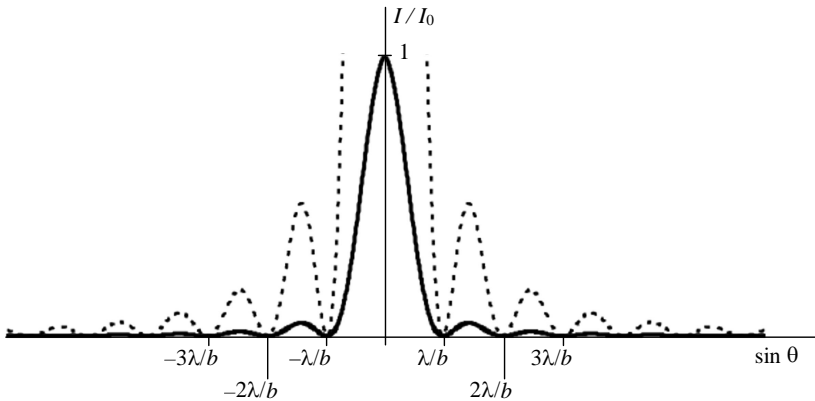


Рис. 3

Минимумы интенсивности будут соответствовать направлениям, для которых числитель в выражении (6) равен нулю. Это будет выполняться при условии  $u = m\pi$ , т.е.

$$b \sin \theta = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Между минимумами располагаются максимумы. Самую большую интенсивность свет имеет в центральном максимуме, для которого  $\theta = 0$ . Последующие максимумы располагаются приблизительно посередине между ближайшими минимумами:

$$b \sin \theta \approx \pm(2k+1)\lambda/2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Более точно углы, под которыми наблюдаются эти максимумы, определяются условиями

$$\begin{aligned} b \sin \theta &= \pm 1,430\lambda, \\ b \sin \theta &= \pm 2,459\lambda, \\ b \sin \theta &= \pm 3,471\lambda, \end{aligned} \quad (8)$$

записанными для первых трех максимумов (не считая центрального).

Интенсивности света в центральном и трех последующих максимумах соотносятся как

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_4 = 1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083. \quad (9)$$

### Описание экспериментальной установки

Оптическая схема установки показана на рис. 4. Источником монохроматического света является лазер Лр. Система линз  $L_1$  и  $L_2$  преобразует расходящийся пучок, излучаемый лазером, в пучок большего поперечного сечения, но меньшей угловой расходимости.

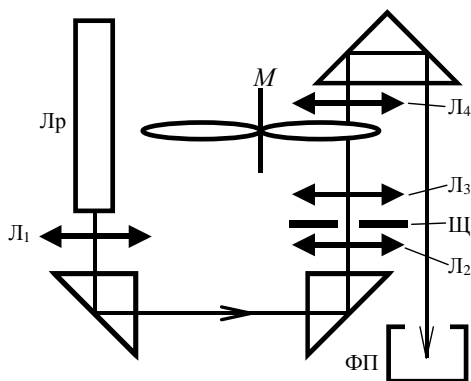


Рис. 4

Это необходимо для того, чтобы длина освещенной части щели была достаточно большой и выполнялось условие, что длина щели во много раз больше ее ширины. Свет дифрагирует на щели Щ. В фокальной плоскости линзы  $L_3$  создается дифракционная картина. Однако рас-

стояние между соседними максимумами (или минимумами) этой дифракционной картины невелико. Для удобства наблюдения дифракционной картины используется линза  $L_4$ , которая создает увеличенное действительное изображение дифракционной картины в плоскости расположения фотоприемника ФП. Фотоприемник смонтирован на отсчетном устройстве, с помощью которого он может перемещаться вдоль линии расположения дифракционной картины, причем перемещение может быть измерено с погрешностью 0,1 мм.

Для того чтобы на результаты измерений не влиял свет, падающий на фотоприемник от посторонних источников, луч лазера модулируется по амплитуде с помощью модулятора М. Модулятор представляет собой крыльчатку, насаженную на ось миниатюрного электромотора. При вращении крыльчатка пересекает лазерный луч, в результате чего на фотоприемник попадает свет в виде периодической последовательности импульсов. С выхода фотоприемника электрические импульсы подаются на вход осциллографа и наблюдаются на его экране. Напряжение на выходе фотоприемного устройства пропорционально интенсивности падающего света.

В работе используется щель с регулируемой шириной. При ширине щели порядка одного миллиметра углы дифракции малы и условие для минимумов, выражаемое формулой (7), имеет вид

$$b\theta = m\lambda.$$

Лучи, дифрагированные под углом  $\theta$ , соберутся в фокальной плоскости линзы  $L_3$  в точку  $C'$  с координатой  $x$  (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{x}{f'} \approx \sin \theta \approx \theta \text{ [рад]}, \\ x &= f'\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $f'$  – фокусное расстояние этой линзы.

В плоскости фотоприемника наблюдается увеличенное в  $K$  раз изображение дифракционной картины. Если в этой плоскости ось  $X$  направить вдоль дифракционной картины, а начало координат совместить с положением центрального максимума, то лучи, дифрагированные под углом  $\theta$ , соберутся в точке с координатой

$$X = Kf'\theta = g\theta. \quad (11)$$

Поскольку напряжение на выходе фотоприемника  $U_{\phi}$  пропорционально интенсивности падающего на фотоприемник света  $I$ , график зависимости  $U_{\phi}(X)$  подобен графику зависимости интенсивности света  $I(X)$ . Максимумы и минимумы на этих графиках должны наблюдаться в точках с одними и теми же координатами. Соотношения между отдельными максимумами на обоих графиках должны быть одинаковыми. График зависимости  $U_{\phi}$  от  $X$  можно построить на основании экспериментальных данных. Если с помощью этого графика определить координаты  $X$  дифракционных максимумов и минимумов, то соответствующие углы дифракции можно определить по формуле

$$\theta(\text{рад}) = X/g, \quad g = Kf', \quad (12)$$

вытекающей из выражения (11).

### Задания

1. Измерить с помощью осциллографа напряжение на выходе фотоприемника  $U_{\phi}$  для ряда значений координаты  $x$ , измеренной по отсчетному устройству фотоприемника. Полученные данные занести в таблицу. Число измерений должно быть достаточным для того, чтобы зависимость  $U_{\phi}$  от  $x$  включала в себя центральный максимум и максимумы  $\pm 1$  и  $\pm 2$  порядков, а также минимумы  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  и  $\pm 3$  порядков.

2. Определить координату  $x_0$  центрального максимума. Принять это положение фотоприемника за нуль новой системы отсчета и перейти к координатам новой системы по формуле

$$X = x - x_0.$$

3. Построить график зависимости  $U_{\phi}$  от  $X$ .

4. Определить координаты минимумов  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  и  $\pm 3$  порядков. Определить координаты максимумов  $\pm 1$  и  $\pm 2$  порядков. Оценить погрешность в определении этих координат.

5. По формуле (12) рассчитать углы для полученных в п. 4 минимумов и максимумов. Оценить погрешность в определении этих углов. Значение коэффициента  $g$  указано в паспорте установки.



6. Рассчитать углы  $\theta$  для тех же минимумов и максимумов по формулам (7) и (8) и сравнить с полученными в п. 5.

7. Из графика найти отношение напряжений  $U_{\phi}(X)/U_{\phi}(0)$  для максимумов  $\pm 1$  и  $\pm 2$  порядков. Оценить погрешность определения этих отношений исходя из погрешности измерительного прибора.

8. Полученное из эксперимента отношение напряжений сравнить с теоретическим, определяемым формулой (9).

### Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет дифракционная картина, создаваемая в фокальной плоскости линзы линейным источником когерентного излучения? Почему?

2. Объясните поведение дифракционной картины при параллельном переносе линейного источника в плоскости, перпендикулярной к оптической оси.

3. Какой вид имеет функция зависимости интенсивности дифрагированного на щели света от угла дифракции?

4. При каких углах дифракции наблюдаются минимумы и максимумы интенсивности света, дифрагированного на щели?

5. Как выглядела бы дифракционная картина, если бы источником света была линейная нить лампы накаливания?

6. Почему в оптической схеме прибора используется модулятор интенсивности света?

### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 5 книгах. Кн. 4: Волны. Оптика. – М.: Астрель, 2001.

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1997.

3. *Суханов И.И.* Геометрическая и дифракционная теория оптического изображения: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 92 с.

**К работе № 30**

**Сложение  $n$  гармонических колебаний  
одинаковой амплитуды  $a$   
с последовательным сдвигом по фазе на  $\delta$**

Определим вид функции, описывающей гармоническое колебание, являющееся суммой  $n$  колебаний:

$$a \cos \omega t + a \cos (\omega t + \delta) + a \cos (\omega t + 2\delta) + \dots + a \cos (\omega t + (n-1)\delta) .$$

*Для удобства расчетов перейдем к экспоненциальной форме записи гармонических колебаний:*

$$ae^{i\omega t} + ae^{i(\omega t + \delta)} + ae^{i(\omega t + 2\delta)} + \dots + ae^{i(\omega t + (n-1)\delta)} .$$

Соответствующая сумма  $n$  слагаемых имеет вид

$$S_n = ae^{i\omega t} (1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(n-1)\delta}) .$$

Выражение, стоящее в скобках, является геометрической прогрессией. Поэтому

$$S_n = ae^{i\omega t} \frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}} = a \frac{e^{in\delta/2} (e^{in\delta/2} - e^{-in\delta/2})}{e^{i\delta/2} (e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})} e^{i\omega t} .$$

Если воспользоваться известным в математике выражением

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} ,$$

то получим

$$S_n = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} e^{i\left(\omega t + \frac{n-1}{2}\delta\right)} .$$

*Перейдем теперь от комплексной формы записи к исходной, действительной форме. Тогда результирующее гармоническое колебание будет иметь вид:*

$$a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos\left(\omega t + \frac{n-1}{2}\delta\right).$$

Амплитуда такого колебания

$$A = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}.$$