

Лабораторная работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

В данной работе на примере движения маятника Обербека изучается динамика вращательного движения твердого тела.

Целью работы является сравнение экспериментальной и теоретической зависимости углового ускорения маятника Обербека от массы груза.

**1. Описание установки и эксперимента**

Маятник Обербека представляет собой крестовину, имеющую общую ось с двумя шкивами разных диаметров  $D_1$  и  $D_2$  (Рис. 1). Крестовина и шкивы жестко соединены между собой. Шкив через шарикоподшипник свободно вращается на оси. На стержнях крестовины закреплены на одном и том же расстоянии  $R$  от оси вращения одинаковые тела массы  $m_1$ . На шкив наматывается нить, к свободному концу которой подвешен груз массы  $m$ . Начальное положение груза отмечается на вертикальной шкале (см. рис. 1).

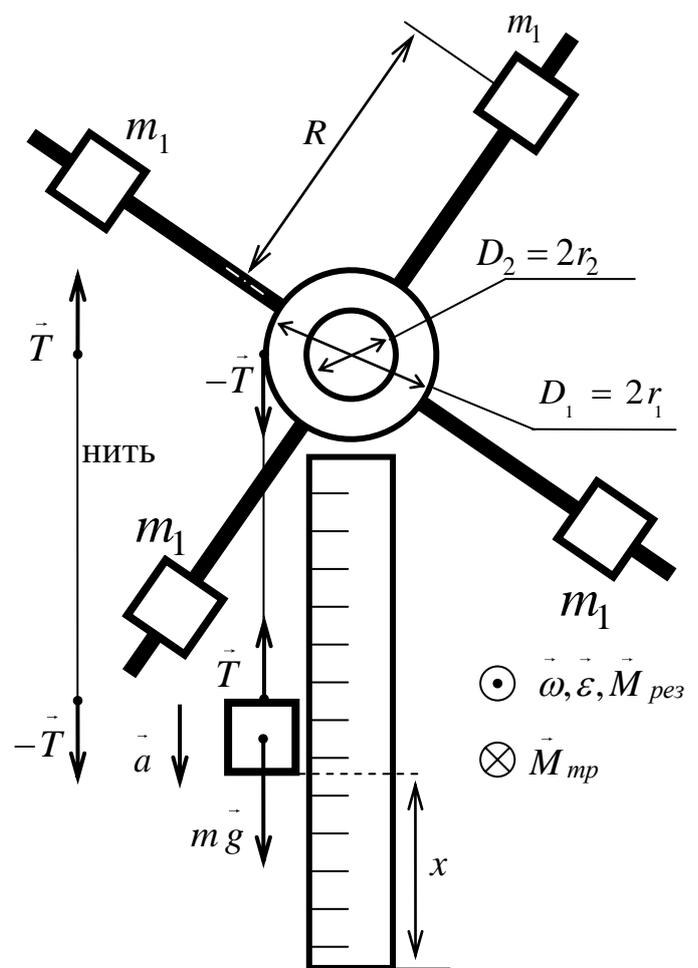


Рис. 1

Под действием опускающегося груза нить разматывается и приводит маятник в ускоренное вращение. Время движения груза измеряется электросекундомером. В момент начала движения груза необходимо нажать кнопку ПУСК секундомера, при этом начинается отсчёт времени движения. Когда груз, пройдя расстояние  $x$ , опустится на контактную площадку, отсчёт прекращается, время опускания груза  $t$  фиксируется секундомером.

## 2. Теория

### Зависимость углового ускорения маятника от массы ускоряющего груза

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси вращения имеет вид:

$$I\varepsilon = M_{рез} = T \cdot \frac{D}{2} - M_{тр}, \quad (1)$$

Уравнение выписано в проекции на ось вращения, в нём  $I$  - момент инерции маятника Обербека относительно оси вращения маятника;  $\varepsilon$  - проекция углового ускорения маятника на ось вращения;  $M_{рез}$  - проекция результирующего момента всех сил на ось вращения, который равен сумме момента силы натяжения нити  $M_{тр}$  и момента силы трения  $M_{тр}$ , тормозящего вращение шкива,  $D/2 = r$  - радиус шкива, на который наматывается нить.

В приближении невесомой нити сила  $T$ , действующая на подвешенный груз, равна по модулю силе, создающей вращательный момент шкива. Силу  $T$  можно определить из второго закона Ньютона, применяя его к движению груза массы  $m$ , проекция векторного закона на направление движения груза имеет вид:

$$ma = mg - T, \quad (2)$$

где  $a$  - ускорение движения груза массы  $m$ .

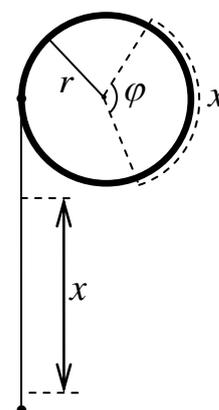


Рис. 2

В приближении нерастяжимой нити имеем кинематические соотношения (рис. 2)  $x/r = \varphi$  (по определению, угол в радианах есть отношение длины дуги к радиусу), связывающие поступательное движение массы  $m$  с вращением шкива:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r = \omega r, \quad a = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r = \varepsilon \frac{D}{2}, \quad (3)$$

Здесь  $\varphi$  (рад) – угол поворота шкива радиусом  $r$  при опускании груза на расстояние  $x$ ,  $V$  и  $\omega$  – соответствующие линейная и угловая скорости,  $D$  – диаметр шкива, равный  $D_1$  или  $D_2$ .

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), находим из уравнения угловое ускорение маятника Обербека:

$$\varepsilon = \frac{mg \cdot \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I + m \frac{D^2}{4}} \quad (4)$$

Очевидно, что при  $M_{\text{тр}} = \text{const}$  (момент сил трения постоянен), вращение маятника является равноускоренным.

Из полученной формулы видно, что маятник будет вращаться с положительным ускорением  $\varepsilon > 0$  лишь при выполнении условия:

$$m > m_0 = \frac{2M_{\text{тр}}}{gd} \quad (5)$$

то есть при массе груза  $m$ , достаточной для того чтобы был преодолен момент сил трения, препятствующий вращению маятника Обербека.

Формула (4) существенно упрощается при выполнении неравенства:

$$I \gg \frac{mD^2}{4} \quad (6)$$

При этом зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от массы опускающегося груза становится линейной:

$$\varepsilon = \frac{mgD}{2I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}. \quad (7)$$

График зависимости (7)  $\varepsilon(m)$  при выполнении неравенства (6) приведён сплошной линией на рис. 3. Штриховой линией показана точная зависимость (4). Штриховая горизонтальная прямая – асимптота при  $m \rightarrow \infty$ .

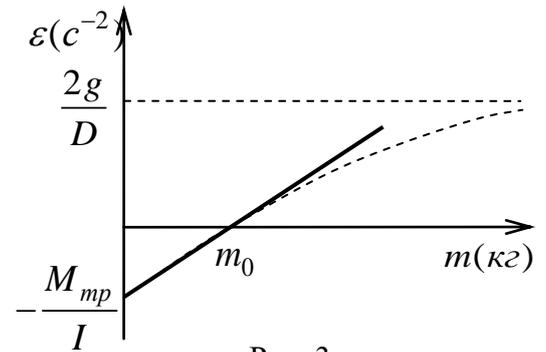


Рис. 3

Примечание. Если момент сил трения зависит от угловой скорости, то вращение маятника не будет равноускоренным. Пусть, например, момент сил трения пропорционален первой степени угловой скорости:

$$M_{\text{тр}} = M_0 + A \cdot \omega, \quad (8)$$

где  $A > 0$  - коэффициент пропорциональности; здесь  $M_0 = m_0 g \frac{D}{2}$  - момент сил трения покоя при  $\omega = 0$ . Заметим, что при  $m < m_0 = \frac{2M_0}{gD}$  вращение маятника не происходит (сравните с формулой (5)). Решая дифференциальное уравнение (4) с учетом (8), можно получить, что угловое ускорение  $\varepsilon$  в момент времени  $t$  дается формулой:

$$\varepsilon = \frac{(m - m_0) \cdot gD}{2(I + m \frac{D^2}{4})} \cdot e^{\frac{-A}{I + m \frac{D^2}{4}} t}. \quad (9)$$

### Измерение углового ускорения.

Движение маятника можно считать равноускоренным, если принять, что момент силы трения постоянен  $M_{\text{тр}} = \text{const}$  и что нерастяжимая нить не проскальзывает по шкиву. Используя известную формулу для координаты тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$x = a \frac{t^2}{2}, \quad (10)$$

с учетом соотношения  $a = \varepsilon \frac{D}{2}$ , получаем формулу для косвенного измерения углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2}, \quad (11)$$

где  $x$  - высота, с которой опускается груз;  $D$  - диаметр шкива, на который намотана нить;  $t$  - время движения груза. Для расчетов удобно представить (11) в виде:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{K}{t^2}} \quad (12)$$

где коэффициент  $K = \frac{4x}{D}$ , указанный в паспорте установки.

### Оценка стандартного отклонения углового ускорения

Применим общую формулу погрешности косвенных измерений

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sigma_t\right)^2} \quad (13)$$

к зависимости (12), в результате находим формулу для вычисления СКО углового ускорения  $\sigma_\varepsilon$

$$\boxed{\sigma_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2}} \quad (14)$$

### 3. Задание к работе

1. Произведите трехкратное измерение времени опускания грузов массой  $m = 100$  г, 200 г, 300 г, 400 г (или других масс, существенно отличающихся друг от друга - по заданию преподавателя) с одинаковой высоты  $x$  при двух различных расстояниях  $R_1$  и  $R_2$  грузов  $m_1$  до оси крестовины. Расстояния  $R$  задаются преподавателем.

2. Вычислите средние значения времени опускания грузов  $\bar{t}$  и углового ускорения значения  $\bar{\varepsilon}$  для всех значений  $m$  и  $R$ .
3. Вычислите оценки стандартных отклонений  $\sigma_\varepsilon$ .
4. Постройте зависимость  $\varepsilon$  от  $m$  при двух значениях  $R$  на одном и том же графике с учетом оценок стандартных отклонений.
5. По полученным графикам сделайте оценку момента сил трения  $M_{тр}$  и момента инерции маятника Обербека.
6. Проверьте справедливость неравенства (6) для максимальной массы подвешенного груза.

#### 4. Контрольные вопросы.

1. Какова цель лабораторной работы? Какие величины в работе измеряются непосредственно?
2. Как направлены векторы угловой скорости  $\vec{\omega}$ , углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$ , результирующего момента сил и момента сил трения в случае ускоренного вращения?
3. Запишите уравнение динамики вращательного движения маятника Обербека?
4. Исходя из законов Ньютона, докажите, что в приближении невесомой нити сила, действующая на подвешенный груз  $m$  со стороны нити, равна по модулю силе, создающей вращательный момент.
5. Какая модель нити использована при выводе уравнения связи характеристик поступательного и вращательного движений?
6. Покажите на рисунке все силы, действующие на крестовину маятника. Почему в уравнении динамики вращательного движения (1) не учтены моменты некоторых из этих сил?
7. Перечислите все допущения, при которых получается линейная зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от массы  $m$ .

8. Нарисуйте график зависимости углового ускорения  $\varepsilon$  от массы опускающегося груза  $m$  в приближении линейной зависимости  $\varepsilon(m)$ .
9. Как по графику линейной зависимости  $\varepsilon$  от  $m$  оценить момент сил трения?
10. Как по графику линейной зависимости  $\varepsilon$  от  $m$  оценить момент инерции маятника Обербека?
11. **Выведите** зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от массы опускающегося груза  $m$  в приближении линейной зависимости  $\varepsilon(m)$ .
12. Как в данной работе рассчитать оценку стандартного отклонения величины  $\varepsilon$ ? **Выведите** формулу  $\sigma_\varepsilon$  из зависимости  $\varepsilon(t)$  /

## 5. Литература

1. Савельев И. Н. Курс общей физики. – М.: Наука, любой год издания.
2. Трофимова Т.И.. Курс физики. – М.: Наука, любой год издания.