Лабораторная работа № 24

(Глава 6 в [1])

Волны на струне

Цель работы: экспериментально определить зависимость собственных частот струны от силы натяжения и от номера гармоники и сравнить с зависимостями, рассчитанными теоретически.

Теория

Бегущая волна. Точки струны, натянутой вдоль оси x, совершают малые колебания в поперечном направлении, т.е. вдоль оси y. Уравнение этих колебаний

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (6.1)$$

где t - время, u - постоянная, имеющая размерность скорости.

Общим решением уравнения (6.1) является комбинация произвольных гладких, т.е. дважды дифференцируемых функций

$$y(x,t) = y_1(x-ut) + y_2(x+ut) \qquad (6.2)$$

что можно проверить подстановкой (6.2) в (6.1).

Покажем, что $y_1(x-ut)$ представляет собой поперечную деформацию струны, смещающуюся в положительном направлении оси x. На рис. 6.1 кривая 1 – функция y_1 в момент времени $t=0$. В момент $t=1 сек$ аргумент

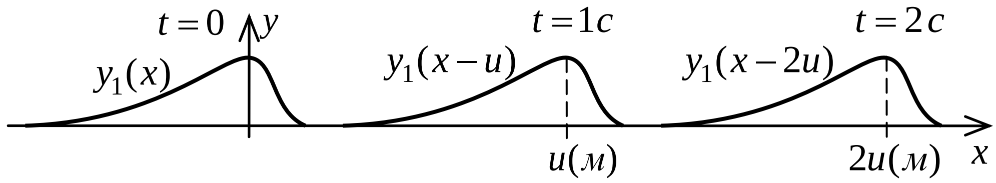

Рис. 6.1

функции равен $x-u$, что эквивалентно смещению графика функции как целого вдоль оси x на $+u$. В момент $t=2$ график смещается вдоль оси x на $+2u$ и т.д. Таким образом, функция $y_1(x-ut)$ представляет собой волну поперечной деформации струны, движущуюся со скоростью $+u$. Аналогично можно показать, что функция y_2 описывает волну, бегущую вдоль оси x в отрицательном направлении.

Фазовая скорость. Скорость u, с которой мгновенное распределение поперечной деформации струны распространяется вдоль оси x, называется *фазовой скоростью* волны. Определим из соображений размерности зависимость этой скорости от параметров струны. По второму закону Ньютона поперечное ускорение a_y (*м/с*^{2}), испытываемое бесконечно малым элементом струны, пропорционально силе и обратно пропорционально его массе. Масса пропорциональна плотности струны. Мы считаем струну бесконечно тонкой, поэтому следует рассматривать линейную плотность, т.е. массу на единицу длины ρ (*кг/м*). Чем больше сила натяжения струны F $[H = кг \cdot м / c^2]$, тем больше результирующая сила, возвращающая бесконечно малый элемент длины струны к положению равновесия. Таким образом, ускорение пропорционально величине F / ρ.

Чем больше ускорение, тем больше скорость распространения волны. Комбинация $\sqrt{F / \rho}$ имеет размерность скорости (*м/с*). Можно ожидать, что фазовая скорость пропорциональна этой комбинации. Точный вывод уравнения малых колебаний (6.1) показывает, что

$$u = \sqrt{F / \rho} \tag{6.3}$$

Гармоническая бегущая волна. Аргумент гармонической функции безразмерен. Чтобы записать уравнение гармонической волны, достаточно аргумент $x \pm ut\,(м)$ умножить на постоянный множитель k с размерностью обратной длины (*м*$^{-1}$). Этот коэффициент называют *волновым числом*.

Таким образом, $\sin \mathrm{k}\left(x \pm ut\right) = \sin\left(kx \pm \omega t\right)$ - это уравнение гармонической волны, бегущей в направлении $-x$ или $+x$ соответственно. Коэффициент ω при t – это *угловая скорость* или *циклическая частота*, равная изменению фазового угла $\alpha = kx \pm \omega t$ за 1 секунду

$$\omega = ku \tag{6.4}$$

Циклическая частота связана с частотой колебаний ν

$$\omega = 2\pi\nu \tag{6.5}$$

Период колебаний, т.е. время, за которое фаза изменится на 2π, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6.6}$$

По аналогии с периодом во времени вводят пространственный период волны, длину волны λ, - это расстояние между двумя точками, в которых разность фаз волны в один и тот же момент времени равна 2π

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{6.7}$$

По формулам (6.4), (6.5), (6.7) получаем связь длины волны и частоты с фазовой скоростью

$$u = \lambda\nu \tag{6.8}$$

Стоячая волна. При отражении бегущей волны от неподвижной границы возникает встречная бегущая волна той же частоты. Пусть, например, волна бежит от некоторой плоскости A сечения струны вправо (на рис. 6.2 пути встречных волн для наглядности разделены), добегает до правой границы, отражается, пробегает всю струну навстречу исходной волне, отражается от левой границы и превращается во вторичную волну, бегущую в том же направлении, что и исходная волна. Большую амплитуду такая суперпозиция будет иметь только в том случае, если в данной точке струны все волны одного направления складываются в фазе.

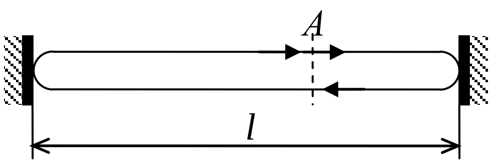

Рис. 2

Следовательно, разность фаз этих волн в одной точке струны должна быть кратна 2π:

$$k \cdot 2l = 2\pi \cdot n \quad \text{или} \quad 2l = n\lambda, \quad n \in N \tag{6.9}$$

т.е. полная длина $2l$ пробега волны от плоскости A и до возврата в неё кратна целому числу длин волн.

Отсюда получаем, что резонанс амплитуды суммарной волны возможен, если на длине струны укладывается целое число полуволн

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1,2,3\ldots \tag{6.10}$$

Это условие можно понять и по-другому. Все синфазные бегущие волны одного направления образуют единую бегущую волну. Аналогичную волну образуют и встречные волны. Рассмотрим суперпозицию встречных волн одной частоты с равными амплитудами

$$\sin\left(kx + \omega t\right) + \sin\left(kx - \omega t\right) = 2 sinkx \cdot cos\omega t \tag{6.11}$$

Видно, что эта сумма разлагается на два множителя – пространственный и временной. В результате на струне возникают стационарные точки - *узлы*, в которых амплитуда равна нулю в любой момент времени, $sinkx = 0$. Волна, имеющая такие стационарные точки, называется *стоячей волной*. Расстояние Δx между соседними узлами равно

$$k \cdot \Delta x = \pi, \qquad \Delta x = \lambda / 2 \tag{6.12}$$

Посередине между двумя соседними узлами находится точка, в которой амплитуда стоячей волны периодически меняется от нуля до максимума, $sinkx = 1$. Такие точки называются *пучностями* стоячей волны.

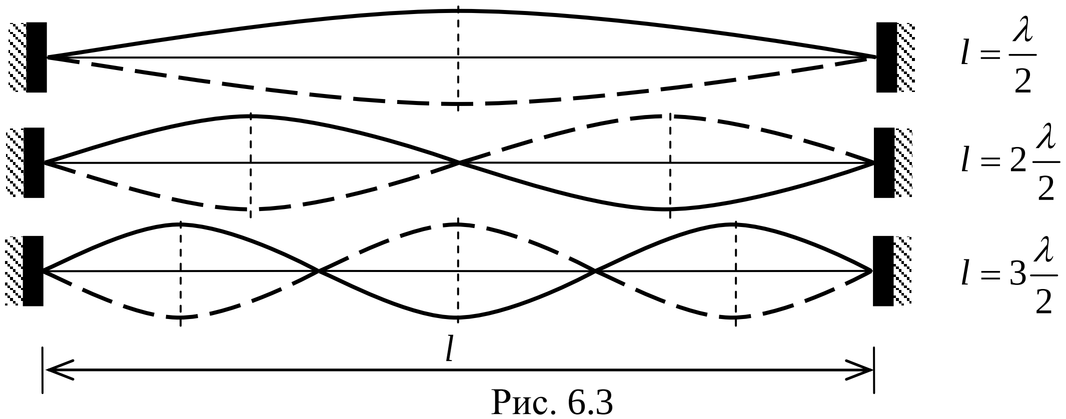

Рис. 6.3

Анимационную картину стоячей волны можно посмотреть в статье http://ru.wikipedia.org/wiki/Стоячая_волна .

Положение узлов и, естественно, пучностей однозначно задаётся положением границ области, в которой существует стоячая волна. У струны имеются две неподвижные точки крепления, следовательно, эти точки обязательно являются узлами.

На рис. 6.3 показаны стоячие волны на струне при $n=1;2;3$. Сплошные и штриховые кривые – максимальные смещения струны через полпериода колебаний. Видны узлы стоячей волны, в которых смещение всегда равно нулю. Вертикальные штриховые линии пересекают ось в пучностях.

Спектр. Дискретному набору длин волн соответствует дискретный частотный спектр, который получаем из (6.8) и (6.10):

$$\nu_n = \frac{u}{2l}n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad . \tag{6.13}$$

Колебания, имеющие определённые частоты и пространственное распределение, называются *собственными* или *нормальными*, а также *модами* (в математической статистике «мода» - наиболее вероятное значение). Зависимость амплитуд мод от частоты называется *амплитудно – частотным спектром* колебания. На рис. 4 изображён амплитудный спектр нормальных частот струны, называемых также *гармониками*.

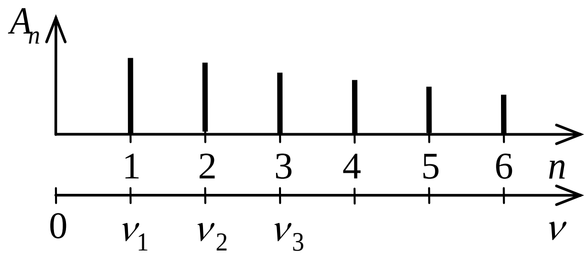

Рис. 6.4

Гармоника минимальной частоты называется *основной*, все остальные, кратные основной, называются *высшими*. Согласно рис. 6.3 и формуле 6.13 номер гармоники n равен числу пучностей и на единицу больше числа узлов, наблюдаемых между точками закрепления струны.

Описание экспериментальной установки

Имеются два варианта экспериментальной установки, различающиеся механизмом натяжения струны и возбуждения её колебаний.

Схема первого варианта (ауд. 4-203) показана на рис. 6.5.

Один конец металлической струны ab закреплён на натягивающем устройстве Н, позволяющем менять натяжение струны. Другой конец струны перекинут через ролик Р и прикреплён к динамометру Д, с помощью которого измеряется сила натяжения струны. Таким образом, концы струны a и b неподвижны.

Через струну пропускается ток, меняющийся по гармоническому закону, от генератора *Г*. Частота тока регулируется с помощью генератора и измеряется по его шкале. Струна располагается между полюсами электромагнита NS, питаемого постоянным током. В постоянном магнитном поле электромагнита на струну действует сила Ампера, меняющаяся по гармоническому закону синхронно с током в струне. Под действием этой силы возбуждаются колебания струны.

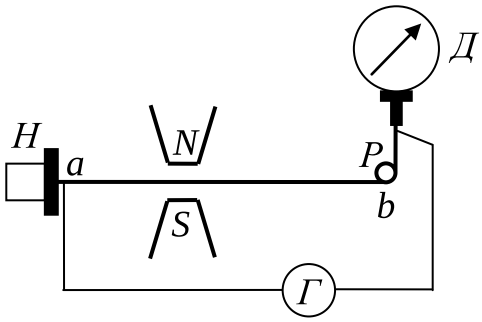

Рис. 6.5

Длина l струны и её линейная плотность ρ указаны в паспорте установки.

Для получения максимальной амплитуды колебаний струны необходимо подстраивать положение электромагнита вдоль струны, т.к. если зазор магнита совпадёт с узлом стоячей волны, данная мода не возбудится или будет очень слаба. Аналогично, во всех струнных музыкальных электроинструментах, чтобы избежать исчезновения гармоник, устанавливают несколько звукоснимателей – на рис. 6.6 показана электрогитара с тремя звукоснимателями.


Рис. 6.6

Во втором варианте установки (ауд. 4-204) натяжение струны создаётся грузом, подвешенным к перекинутому через ролик концу струны. Другой конец струны прикреплён к подвижному якорю электромагнитного реле. При подаче синусоидального тока на две намагничивающие обмотки реле ферромагнитный якорь притягивается то к одной, то к другой обмотке. Таким образом, создаётся колебание струны с частотой тока, питающего обмотки.

Задание к работе

1. С помощью механизма натяжения струны установить силу натяжения F, заданную преподавателем.
2. Постепенно увеличивая частоту тока через струну, начиная от минимальной, последовательно определить резонансные частоты первых пяти гармоник $\nu_1, \nu_2 ... \nu_5$. Номер гармоники определять по числу пучностей или узлов, наблюдаемых между точками закрепления струны.
3. Теоретически по (6.13) определить частоты тех же гармоник при заданном значении F.
4. Оценить теоретическое стандартное отклонение σ_ν по (6.13).
5. В одних осях построить теоретическую и экспериментальную зависимости ν_n от n по пп. 2 и 3. Показать доверительные интервалы $\pm\sigma_\nu$ для теоретических точек, а также для экспериментальных. Стандартное отклонение экспериментальных точек определяется погрешностью (неравномерной!) шкалы генератора.
6. Экспериментально определить частоту одной из гармоник (по указанию преподавателя) для ряда значений силы натяжения струны F. При малых значениях силы натяжения (7 – 8 Н) рекомендуется измерять частоты всех гармоник, начиная с первой, вплоть до заданной. Это связано с тем, что частота основной гармоники в этих

условиях может выйти за нижнюю границу диапазона частот генератора, в результате чего вторая гармоника будет ошибочно принята за первую и т.д.

7. Теоретически по (6.13) определить частоту той же гармоники при заданных значениях силы F.
8. Построить графики по пп. 6 и 7 зависимости частоты от силы, предварительно выбрав переменные, откладываемые по осям. Обозначить теоретические и экспериментальные доверительные интервалы. Сделать вывод о степени совпадения экспериментальных и теоретических графиков.
9. По частоте первой гармоники для одного из значений силы оценить скорость распространения упругих волн вдоль струны.

Контрольные вопросы

1. Что такое нормальное колебание струны?
2. Как экспериментально вы будете определять наличие нормального колебания на струне?
3. Как визуально вы будете определять номер гармоники?
4. Запишите волновое уравнение и его общее решение. Прямой подстановкой покажите, что решение удовлетворяет волновому уравнению.
5. Какой физический смысл имеет общее решение волнового уравнения?
6. Что такое фазовая скорость бегущей волны?
7. Что такое гармоническая бегущая волна, период, частота, длина волны?
8. **Выведите** связь частоты, длины волны и скорости гармонической бегущей волны.
9. Что такое стоячая волна? Как она получается?

10. Запишите уравнение стоячей волны и покажите, какие у неё есть характерные точки.
11. При каком фазовом условии наблюдается большая амплитуда колебаний струны, закреплённой на концах?
12. Как на струне, закреплённой на концах, располагаются характерные точки стоячей волны?
13. **Выведите** спектр длин волн и частот нормальных колебаний струны.

Литература

1. *Ким. В.Ф., Кошелев Э.А., Суханов И.И.* Колебания и волны, Изд-во НГТУ, 2022
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Том 3, Электричество
5. *Калашников С.Г.* Электричество