

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 23

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы: экспериментально исследовать зависимость напряжения на конденсаторе в электромагнитном колебательном контуре от частоты последовательно включенной переменной ЭДС. Определить резонансную частоту, сравнить ее с расчетной.

Теория вынужденных колебаний

Рассмотрим электрическую цепь из последовательно соединенных конденсатора, катушки индуктивности, резистора и генератора переменной ЭДС.

Падение напряжения на резисторе $U_R = IR$, а на конденсаторе $U_C = q / C$. В катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции $E_L = -LdI / dt$. Переменную ЭДС генератора запишем в виде

$$E_{\Gamma} = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Сумма падений напряжений в контуре равна сумме действующих в нем ЭДС (второе правило Кирхгофа), следовательно

$$U_C + U_R = E_L + E_{\Gamma}. \quad (1)$$

Выражая U_C , U_R и E_L через заряд конденсатора q и параметры контура L , C и R , получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что при $t \gg \beta^{-1}$, где $\beta = R / 2L$ – коэффициент затухания, решение уравнения (2) представляет собой колебания с частотой ω

$$q(t) = q_m \cos(\omega t). \quad (3)$$

Амплитудное значение заряда q_m можно найти из следующих соображений. В левой части уравнения (2) стоит сумма трех колебаний. Результат сложения

можно найти, используя метод векторных диаграмм [1]. Для этого запишем явный вид каждого из этих трех колебаний:

$$q / C = (q_m / C) \cos(\omega t), \quad (4a)$$

$$Rdq / dt = -Rq_m \omega \sin(\omega t) = q_m \omega R \cos(\omega t + \pi / 2), \quad (4б)$$

$$L(d^2q / dt^2) = -Lq_m \omega^2 \cos(\omega t) = q_m \omega^2 L \cos(\omega t + \pi). \quad (4в)$$

Поставим в соответствие каждому колебанию вектор с длиной, равной амплитуде этого колебания. Начальные фазы колебаний определяют ориентацию векторов относительно горизонтальной оси (Рис. 1).

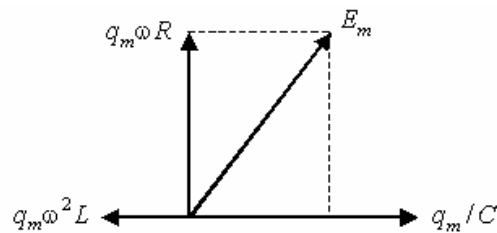


Рис. 1 Векторная диаграмма

Из рисунка видно, что по теореме Пифагора

$$((q_m / C) - q_m \omega^2 L)^2 + (q_m \omega R)^2 = (E_m)^2. \quad (5)$$

Полагая, что $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$, из (5) получаем

$$q_m = \frac{E_m}{L \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (6)$$

Тогда амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{\omega_0^2 E_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (7)$$

Выражение для амплитуды напряжения на конденсаторе U_{Cm} , учитывая связь частоты и циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$, удобно переписать в виде

$$U_{Cm} = \frac{\nu_0^2 E_m}{\sqrt{(\nu^2 - \nu_0^2)^2 + \beta^2 \nu^2 / \pi^2}}. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что амплитуда напряжения на конденсаторе U_{Cm} зависит от соотношения частот: частоты собственных колебаний ν_0 , частоты колебаний вынуждающей ЭДС ν . График функции U_{Cm} показан на Рис. 2.

Максимальное значение U_{Cm} достигается при некоторой частоте ν_p , называемой резонансной. Найти резонансную частоту ν_p можно, исследуя выражение (8) амплитуды вынужденных колебаний на максимум (при этом достаточно исследовать на минимум подкоренное выражение в знаменателе формулы). Получите выражение (9) самостоятельно

$$\nu_p = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2 / 2\pi^2} . \quad (9)$$

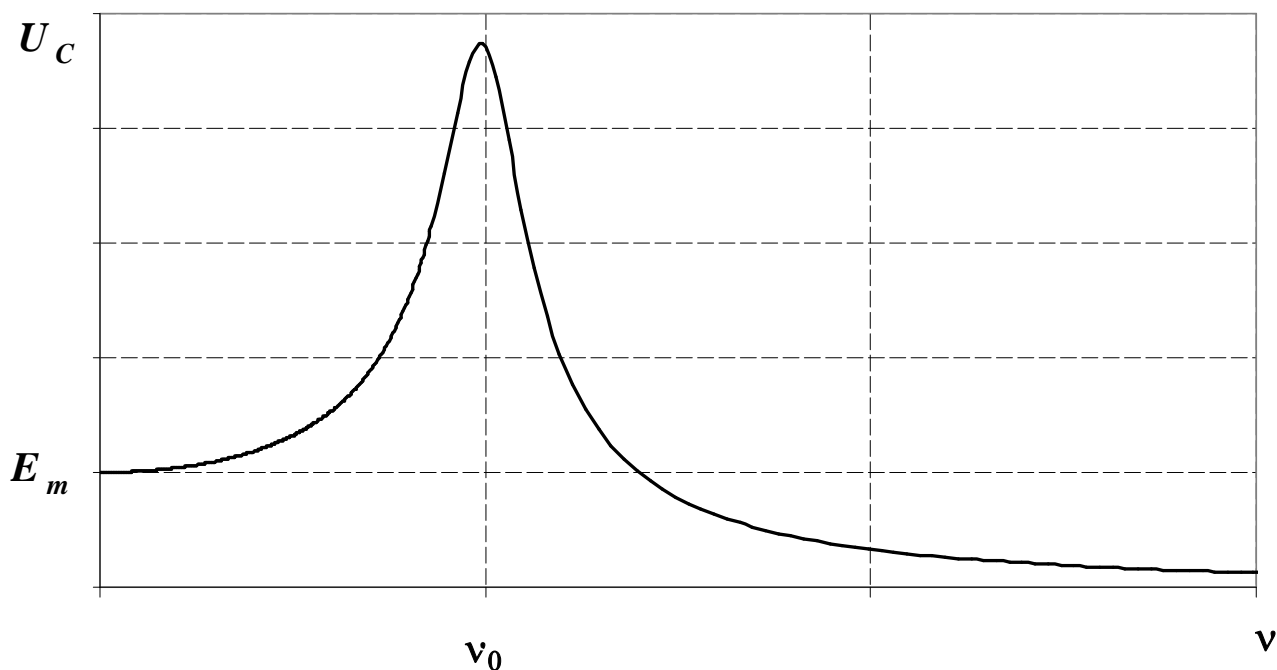


Рис. 2 Резонансная кривая

Если (9) подставить (8) и пренебречь слагаемыми порядка β^2 (случай малого затухания), то получим, что при резонансе напряжение на конденсаторе возрастает в Q раз по сравнению с ЭДС генератора

$$U_{Cm}(\nu_p) = QE_m(\nu_p),$$

где $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Коэффициент пропорциональности Q называется **добротностью**. Добротность определяет число колебаний, которое совершит контур после однократной зарядки его конденсатора, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Лабораторная установка и методика измерений

На макетной плате рабочей станции NI ELVIS закреплены электрические элементы: сопротивления R_1-R_4 , конденсаторы C_1-C_3 и катушка индуктивности L . Сопротивления R_1-R_4 размещены в одном корпусе с 8-ю выводами, шесть из которых попарно закорочены на плате.

Из перечисленных элементов, применяя монтажный провод, можно собрать колебательный контур. Электрическая схема контура приведена на Рис. 3. На схеме монтажный провод показан утолщенными линиями со стрелками. В качестве общего контакта удобно использовать вертикальную полосу, состоящую из 25 выводов и маркированную знаком «←→».

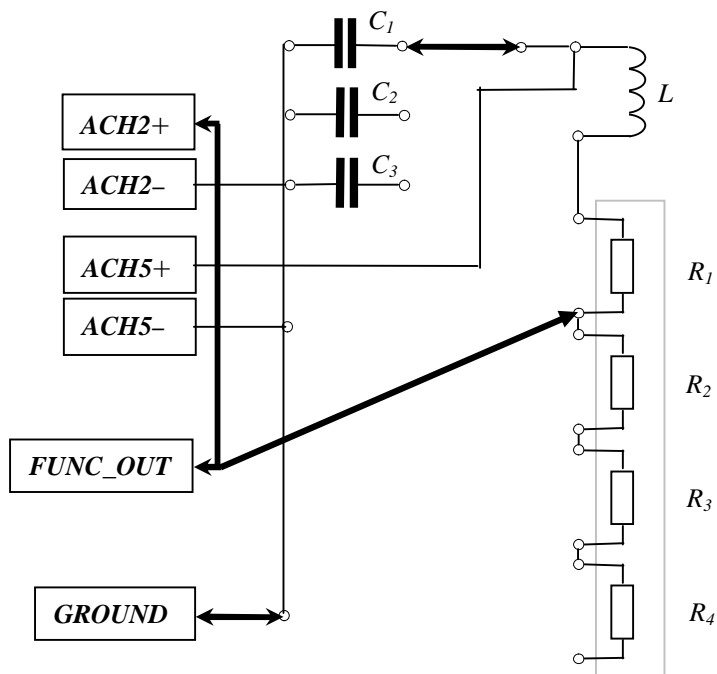


Рис. 3 Электрическая схема контура

С выхода функционального генератора на колебательный контур подается синусоидальный сигнал. На осциллограф напряжение с конденсатора, подается

через аналоговый вход АСН5+, а с генератора через аналоговый вход АСН2+. С помощью осциллографа соотношение амплитуд этих сигналов можно оценить как визуально, так и количественно.

Изменяя частоту генератора, можно построить зависимость напряжения на конденсаторе от частоты (резонансную кривую). По измеренным параметрам контура можно определить резонансную частоту. Если затухание мало, то можно ограничиться собственной частотой, т.к. $\nu_p \approx \nu_0$. Для того, что бы резонансная кривая была представительной она должна содержать не менее двадцати точек с равномерным шагом по частоте $\Delta\nu = \nu_0/10$.

Поскольку выходное напряжение генератора изменяется при изменении частоты, напряжение на конденсаторе необходимо нормировать (привести к одинаковым условиям). Пусть U_{Cm} – текущее напряжение на конденсаторе, а E_m – текущее напряжение на генераторе, тогда нормированное напряжение на конденсаторе определяется по формуле

$$U_N = U_{Cm} / E_m \cdot$$

Задание к работе

Измерение емкости, индуктивности и сопротивления

1. Удалите монтажные провода колебательного контура. На электрической схеме они выделены стрелками. Не забудьте разомкнуть и вывод GROUND.
2. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы одного из конденсаторов (по указанию преподавателя). В меню цифрового мультиметра выберете режим измерения емкости и проведите измерение.
3. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы катушки индуктивности L . В меню цифрового мультиметра выберете режим измерения индуктивности и проведите измерение.

4. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы сопротивления R_1 . В меню цифрового мультиметра выберите режим омметра и проведите измерение.
5. Аналогично проведите измерения последовательно соединенных сопротивлений: R_1-R_2 ; $R_1-R_2-R_3$; $R_1-R_2-R_3-R_4$.
6. Отжав кнопку RUN, закройте ВП цифровой мультиметр.
7. Рассчитайте собственную частоту колебательного контура ν_0 .

Снятие резонансной кривой

1. В соответствии с электрической схемой (Рис. 3) на макетной плате соберите колебательный контур. Включите в него индуктивность, конденсатор, емкость которого вами измерена и сопротивление R_1 .
2. Запустите функциональный генератор. Выберите синусоидальную форму сигнала. Амплитуду установите в диапазоне 0,1-0,2 В.
3. Включите осциллограф. Переведите его в режим непрерывных измерений. Источником сигнала для каналов А и В выберите аналоговые входы АСН5+ и АСН2+. Синхронизацию запуска осуществляйте непосредственно сигналом (Immediate).
4. С помощью элементов управления осциллографа получите на экране два гармонических сигнала одинаковой частоты. Частота и размах каждого из них выводится в соответствующей информационной строке под изображением. Размах обозначен как V_{p-p} (peak to peak).
5. Изменяя частоту выходного напряжения генератора с шагом $\Delta\nu = \nu_0/10$, измеряйте напряжение, подаваемое с генератора на контур, и напряжение на конденсаторе. В таблицу записывайте значения частоты, напряжения на конденсаторе (канал А) и напряжение на выходе генератора (канал В).
6. Постройте график зависимость нормированного напряжения на конденсаторе от частоты. Если в этом есть необходимость, проведите дополнительные измерения вблизи резонанса.

7. Подайте напряжение с генератора на сопротивлении R_2 , таким образом, чтобы к колебательному контуру последовательно были подключены сопротивления R_1 - R_2 . Снимите резонансную кривую.
8. Подайте напряжение с генератора на сопротивлении R_4 , таким образом, чтобы к колебательному контуру последовательно были подключены сопротивления R_1 - R_4 . Снимите резонансную кривую.
9. В общих осях постройте полученные резонансные кривые. Определите по ним резонансные частоты и добротности колебательных контуров.
10. По результатам измерений емкости индуктивности и сопротивлений рассчитайте резонансные частоты и добротности с учетом погрешности.
11. Сделайте выводы относительно: изменения ν_p и Q в зависимости от сопротивления, включенного в контур; высоты максимумов резонансных кривых при разных сопротивлениях; а также совпадения между резонансными частотами: найденными экспериментально и вычисленными.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Что такое резонанс напряжений на конденсаторе в контуре?
3. Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Запишите и проанализируйте частное решение этого уравнения.
4. Получите выражение для амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе (выражение (8)).
5. Найдите резонансную частоту для U_{Cm} .
6. Какие графики вы будете строить в работе? Какой они будут иметь вид? Проходят ли они через начало координат?
7. Как сдвигается резонансная частота при увеличении сопротивления контура?
8. Что такое добротность Q колебательного контура?
9. Приведите примеры применения резонанса в технике.

Литература

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Академия, 2004 (и др. годы изданий).
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Астрель, 2001 (и др. годы изданий).