

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 22
СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы: экспериментально определить зависимость периода колебаний и логарифмического декремента от параметров контура. Полученные результаты сравнить с теоретическими.

**Физическая модель колебательного контура
и свободные электромагнитные колебания в нем**

Под колебательным контуром подразумевается электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных: конденсатора, катушки индуктивности и резистора (наличие резистора возможно, но не обязательно). Рассмотрим реальные элементы колебательного контура.

Основной характеристикой конденсатора является его емкость C . В идеальном конденсаторе нет диссипативных потерь энергии. Его импеданс (комплексное сопротивление) чисто реактивный. В реальных конденсаторах диэлектрик, заполняющий пространство между обкладками, может иметь небольшую электропроводность. Это приводит к некоторой потере энергии на выделение джоулева тепла. Кроме того, при электрических колебаниях периодически происходит реполяризация диэлектрика, на которую также затрачивается некоторое количество энергии. В некоторых случаях приходится учитывать также тот факт, что кроме емкости C конденсатор, как и любой проводник, может иметь небольшое значение индуктивности L , величина которой зависит от конструкции конденсатора.

Основной характеристикой катушки индуктивности является ее индуктивность L . Идеальная катушка, в которой нет потерь энергии, имеет чисто реактивный импеданс. Однако если в катушке применяется сердечник, то при

колебаниях в контуре часть энергии теряется на перемагничивание сердечника. Часть энергии теряется также на нагревание проводника обмотки, имеющей конечное значение сопротивления. Большое влияние на реальный импеданс катушки оказывают так называемые межвитковые емкости. Эти емкости имеют наименьшее значение в однослойных катушках с принудительным шагом (шаг спирали больше диаметра провода) и наибольшее в многослойных катушках с намоткой внавал.

Реальные резисторы кроме активного сопротивления R могут иметь некоторое значение индуктивности.

Обычно рассматривается *идеальный случай*, в предположении, что колебательный контур состоит из последовательно соединенных *идеальных элементов* L , R и C .

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из этих элементов. При наличии электромагнитных колебаний в контуре энергия магнитного поля сосредоточена в катушке и равна $L\dot{q}^2/2$. Энергия электрического поля сосредоточена в конденсаторе и равна $q^2/2C$. Полная энергия электромагнитного поля в контуре равна

$$W_{\text{эм}} = \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (1)$$

Если бы потерь энергии не было ($R=0$), то энергия $W_{\text{эм}}$ была бы постоянной, а производная от этой энергии по времени равнялась нулю. Если сопротивление R отлично от нуля, то в резисторе выделяется джоулево тепло, на что расходуется энергия электромагнитного поля. При этом в соответствии с законом сохранения энергии, изменение энергии $W_{\text{эм}}$ в единицу времени равно выделяемой тепловой мощности, взятой со знаком минус, т.е.

$$\frac{dW_{\text{эм}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -\dot{q}^2 R. \quad (2)$$

Выражение (2) после вычисления производной можно привести к виду

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (3)$$

Введя обозначения $R/L = 2\beta$ и $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$, получаем уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является дифференциальным уравнением линейного осциллятора, совершающего свободные затухающие колебания. Нетрудно проверить прямой подстановкой в уравнение (4), что его решением является функция

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

где частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Для колебательного контура

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (6)$$

В выражении (5) произведение $q_0 e^{-\beta t}$ имеет смысл амплитуды, величина которой убывает со временем. Коэффициент β , имеющий размерность с^{-1} , называется **коэффициентом затухания**. Через отрезок времени равный β^{-1} , амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Чем больше коэффициент β , тем быстрее со временем убывает амплитуда колебаний. Коэффициент β входит также в выражение для частоты колебаний ω . В идеальном случае, когда потери отсутствуют и коэффициент β равен нулю, $\omega = \omega_0$. Частоту ω_0 называют собственной частотой колебательной системы.

Период затухающих колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Если потерями энергии можно пренебречь, в этом случае амплитуды двух соседних колебаний почти одинаковы, то

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8)$$

Из (7) следует, что с увеличением сопротивления R период колебаний T также растет. Если сопротивление приближается к значению $2\sqrt{L/C}$, то период стремится к бесконечности. Сопротивление

$$R_k = 2\sqrt{L/C} \quad (9)$$

называется критическим. При значениях $R > 2\sqrt{L/C}$, колебания становятся невозможными, поскольку период становится мнимой величиной.

Решение дифференциального уравнения (4), представленное выражением (5), трудно проверить экспериментально, так как мы не располагаем прибором, позволяющим непосредственно измерять заряд конденсатора для каждого момента времени. Однако можно сравнительно легко измерить напряжение на конденсаторе, имеющем емкость C

$$U_C(t) = q(t)/C = U_{C_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = U_{CA}(t) \cos(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

На Рис. 1 построена характерная зависимость напряжения на конденсаторе от времени. При построении коэффициент затухания полагался равным 0,4, а циклическая частота $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$.

Там же показан период колебаний T и амплитуда второго колебания a_2 . Для второго колебания показан также **размах сигнала** A_2 — разность между максимальным и минимальным значениями сигнала на протяжении периода.

Для характеристики степени затухания колебаний колебательной системы кроме коэффициента затухания β используется **логарифмический декремент затухания** λ . Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Очевидно, что такие отклонения отстоят на период

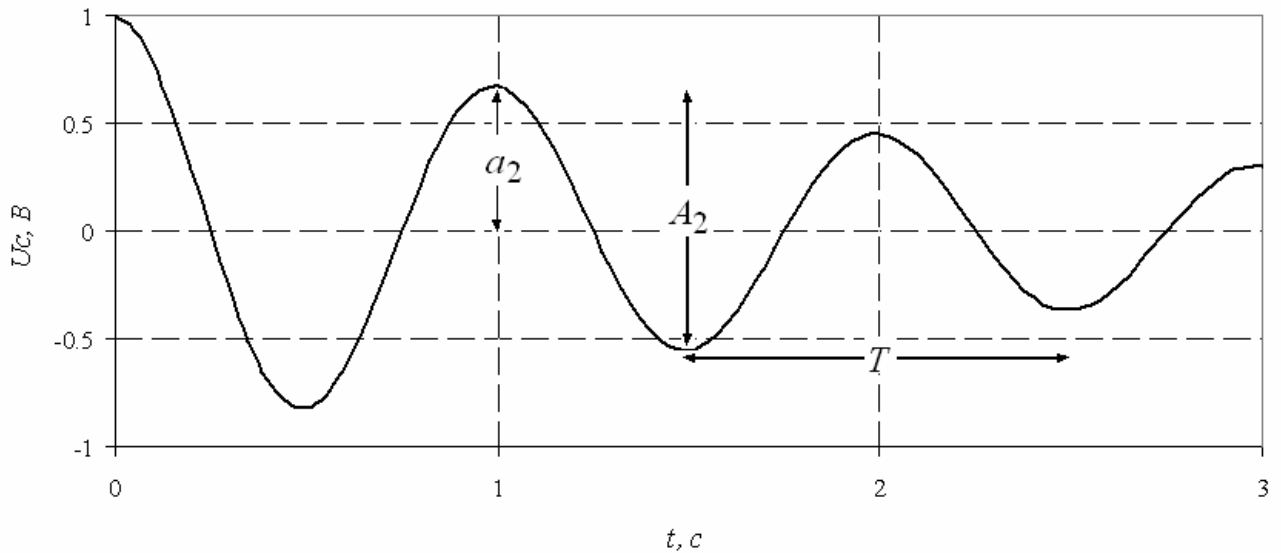


Рис. 1 Затухающие колебания

$$\lambda = \ln \frac{U_{CA}(t)}{U_{CA}(t+T)}. \quad (11)$$

При подстановке (10) в (11) получаем, что логарифмический декремент затухания колебательного контура связан с параметрами контура соотношением

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} T.$$

Если затухание мало, то в соответствии с (8) $T = 2\pi\sqrt{LC}$ и

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (12)$$

Лабораторная установка и методика измерений

На макетной плате рабочей станции NI ELVIS закреплены электрические элементы: сопротивления R_1-R_4 , конденсаторы C_1-C_3 и катушка индуктивности L . Сопротивления R_1-R_4 размещены в одном корпусе с 8-ю выводами, шесть из которых попарно закорочены на плате.

Из перечисленных элементов, применяя монтажный провод, можно собрать колебательный контур. Электрическая схема контура приведена на Рис. 2. На схеме монтажный провод показан утолщенными линиями со стрелками. В

качестве общего контакта удобно использовать вертикальную полосу, состоящую из 25 выводов и маркированную знаком «←→».

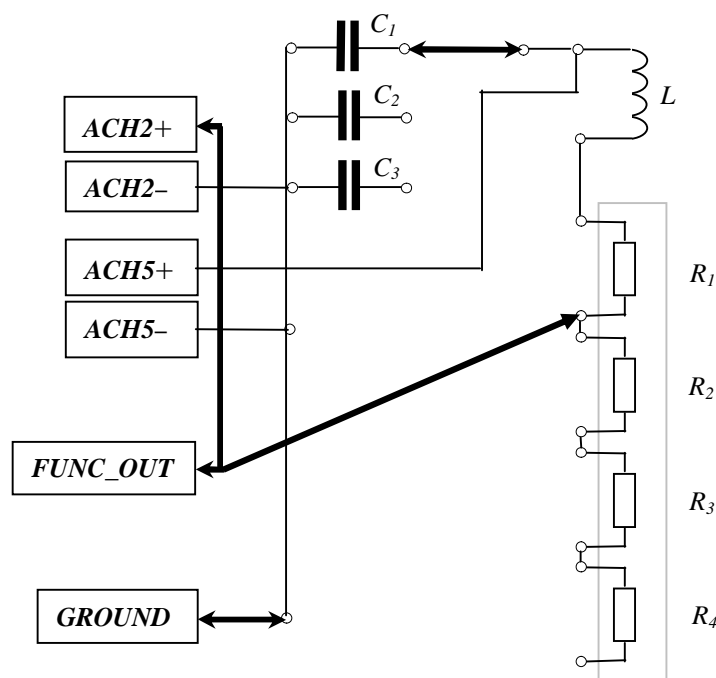


Рис. 2 Электрическая схема колебательного контура

С выхода функционального генератора на контур подаются прямоугольные импульсы. Длительность импульсов значительно превышает период собственных колебаний контура. Приходящий импульс заряжает конденсатор, в контуре возникают свободные колебания.

Напряжение с конденсатора, через аналоговый вход *ACH5+* подается на осциллограф. Через аналоговый вход *ACH2+* на второй канал осциллографа подается сигнал непосредственно с генератора.

На экране осциллографа должен наблюдаться сигнал, аналогичный приведенному на Рис. 2. С помощью курсоров можно измерить как период колебаний, так и амплитуду любого колебания.

Амплитуда колебания измеряется относительно нулевой линии, и на точность измерений влияет точность установки нулевой линии. Указанной погрешности можно избежать, если измерять не амплитуды колебаний a_n , а размах A_n . Нетрудно показать, что в этом случае логарифмический декремент затухания можно записать в виде

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{A_n}{A_{n+N}}, \quad (13)$$

где A_{n+N} — размах колебания отстоящего на N периодов.

Ошибка в измерении логарифмического декремента зависит не только от ошибки измерения амплитуды сигнала σ_a , но и от выбора числа N . Как показано в Приложении №1, относительная ошибка измерения логарифмического декремента минимальна, если выполняется условие

$$A_n / A_{n+N} \approx 3. \quad (14)$$

При выполнении этого условия ошибку измерения можно рассчитать по формуле

$$\sigma_\lambda \approx \frac{2.88\sigma_a}{A_n} \lambda. \quad (15)$$

Задание к работе

Измерение емкости, индуктивности и сопротивления

1. Удалите монтажные провода колебательного контура. На электрической схеме они выделены стрелками. Не забудьте разомкнуть и вывод GROUND.
2. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы конденсатора C_1 . В меню цифрового мультиметра выберите режим измерения емкости и проведите измерение.
3. Аналогично проведите измерения емкостей C_2 и C_3 .
4. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы катушки индуктивности L . В меню цифрового мультиметра выберите режим измерения индуктивности и проведите измерение.
5. Соедините монтажными проводами входы цифрового мультиметра CURRENT HI и CURRENT LO и выводы сопротивления R_1 . В меню цифрового мультиметра выберите режим омметра и проведите измерение.

6. Аналогично проведите измерения последовательно соединенных сопротивлений: R_1-R_2 ; $R_1-R_2-R_3$; $R_1-R_2-R_3-R_4$.
7. Отжав кнопку RUN, закройте ВП цифровой мультиметр.
8. Рассчитайте период собственных колебаний в контуре с измеренным значением индуктивности для трех измеренных значений емкости и сделайте оценку стандартного отклонения σ_T по известным σ_C и σ_L .

Измерение характеристик колебательного контура

1. В соответствии с электрической схемой (Рис. 2) на макетной плате соберите колебательный контур. Включите в него конденсатор C_1 . В этой части работы сопротивления R_1-R_4 не используются, поэтому сигнал с генератора должен приходиться непосредственно на индуктивность.
2. Запустите функциональный генератор. Выберите прямоугольную форму сигнала. Частота генератора должна быть как минимум на порядок меньше собственной частоты колебательного контура рассчитанной теоретически.
3. Включите осциллограф. Переведите его в режим непрерывных измерений. Источником сигналов для каналов А и В выберите аналоговые входы АСН5+ и АСН2+. Синхронизацию запуска осуществляйте непосредственно сигналом (Immediate).
4. С помощью элементов управления осциллографа получите изображение на экране близкое к тому, что изображено на Рис. 3. Объясните его.
5. Отключите канал В и с помощью элементов управления осциллографа получите изображение затухающей синусоиды.
6. Используя курсоры, измерьте период колебания сигнала.
7. Измените электрическую схему колебательного контура, включив в него вместо конденсатора C_1 конденсатор C_2 , а затем C_3 . Измерьте период колебания.
8. Измеренные значения периодов запишите в таблицу и сравните с расчетными значениями.

9. Построить график зависимости рассчитанных теоретически и определенных экспериментально периодов колебаний от емкости на одних и тех же осях. В каких осях строить график – решить самостоятельно.

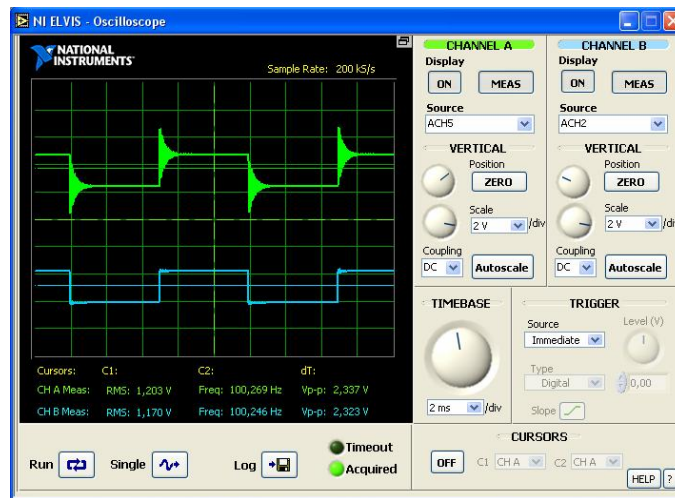


Рис. 3 Сигнал с генератора и конденсатора

10. Выбрав конденсатор по указанию преподавателя, соберите колебательный контур, включив в нее сопротивление R_1 . Получите осциллограмму и определите величину логарифмического декремента затухания.
11. Выполните предыдущий пункт, включив в колебательный контур последовательно сопротивления R_1-R_2 .
12. Выполните предыдущий пункт, включив в колебательный контур последовательно сопротивления $R_1-R_2-R_3$, а затем $R_1-R_2-R_3-R_4$.
13. Оценить ошибку косвенного измерения σ_λ . Постройте график зависимости λ от сопротивления. Для тех же значений параметров контура вычислите теоретическое значение логарифмического декремента затухания и нанесите на график.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными? Получите дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания в колебательном контуре.

2. Каково решение дифференциального уравнения для случая затухающих колебаний? Чему равны период колебаний T и коэффициент затухания β ? Как эти величины выражаются через параметры контура L , C и R ?
3. Что такое логарифмический декремент затухания? Как он выражается через параметры контура? Какова связь между параметрами λ и β ?
4. Что такое критическое сопротивление? Как это сопротивление связано с параметрами контура?
5. Как с помощью осциллографа измерить период колебаний T ? В каком случае период колебаний можно считать равным $2\pi\sqrt{LC}$?
6. Как с помощью осциллографа измерить логарифмический декремент затухания?

Литература

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Академия, 2004 (и др. годы изданий).
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Астрель, 2001 (и др. годы изданий).

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

Ошибка косвенного измерения логарифмического декремента затухания

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+N}} \right)$$

зависит не только от ошибки измерения амплитуды сигнала σ_a , но и от числа N

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_a}{N} \sqrt{A_n^{-2} + A_{n+N}^{-2}}.$$

Исследуем, как влияет на относительную ошибку измерения выбор этого числа. Запишем относительную ошибку в виде

$$\sigma_\lambda / \lambda = \sigma_a (\ln A_n / A_{n+N})^{-1} \sqrt{A_n^{-2} + A_{n+N}^{-2}}.$$

Минимальной ошибка будет при выполнении условия $\frac{d}{dN} \left(\frac{\sigma_\lambda}{\lambda} \right) = 0$.

Дифференцируя и анализируя числитель, получаем условие

$$\ln A_n / A_{n+N} - 1 - (A_{n+N} / A_n)^2 = 0.$$

Замена $A_n / A_{n+N} = x$ приводит к трансцендентному уравнению $\ln x = 1 + x^{-2}$.

На рис. 1 приведены графики функций входящих в это уравнение. Решая численно, получаем корень уравнения $x_0 \approx 3.0309$.

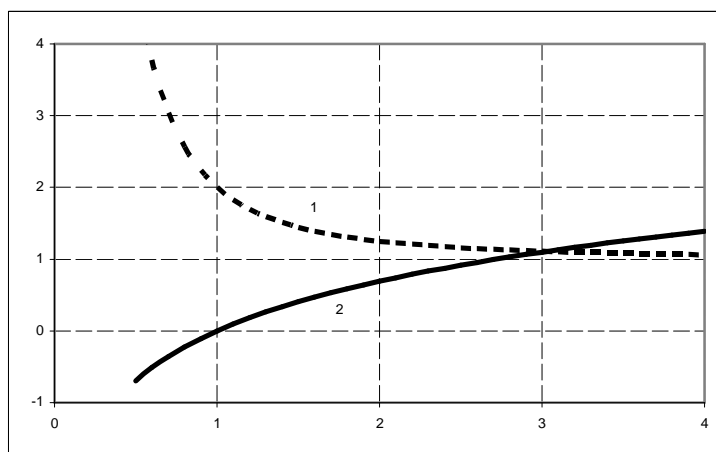


Рис. 1 Графики функций 1 — $y = 1 + x^{-2}$, 2 — $y = \ln x$

При этом ошибка измерения логарифмического декремента затухания

$$\sigma_\lambda / \lambda = \sigma_a \sqrt{1 + x_0^2} / (A_n \ln x_0) \approx 2.88 \sigma_a / A_n.$$