

Лабораторная работа № 21

(Глава 3 в [1])

Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты

Цель работы: научиться измерять разность фаз гармонических колебаний одинаковой частоты методом сложения колебаний, экспериментально определить зависимость фазового сдвига между колебаниями напряжения на двух последовательно соединённых элементах электрической цепи от частоты и сравнить полученную зависимость с теоретической.

Теория

Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний некоторой материальной точки результирующее смещение точки s равно алгебраической сумме смещений s_1 и s_2 . Этот же случай реализуется и при сложении колебаний скалярных физических характеристик колебательной системы (давления, силы тока, напряжения и т.д.). Если частоты складываемых колебаний равны, то

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (3.1)$$

где A_1, A_2 - амплитуды колебаний, $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота, f - частота колебаний, φ_1, φ_2 - начальные фазы.

Сложение таких колебаний можно произвести, воспользовавшись методом *векторной диаграммы*, в котором гармоническое колебание (3.1) представляется графически в виде проекции на некоторую ось (обычно берут ось координат x) вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Длина вектора соответствует амплитуде, угол поворота относительно оси x — фазе. Сумма двух колебаний на векторной диаграмме представлена суммарным вектором $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

На рис. 3.1 показано положение векторов $\vec{s}_1(t)$, $\vec{s}_2(t)$ и результирующего вектора $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ для некоторого момента времени. Угол между векторами $\vec{s}_1(t)$, $\vec{s}_2(t)$ равен $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Так как векторы $\vec{s}_1(t)$, $\vec{s}_2(t)$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , угол φ со временем не изменяется. Следовательно, и результирующий вектор \vec{s} вращается с той же угловой скоростью ω . Мгновенное значение искомой величины s в данный момент времени определяется проекцией вектора суммы на ось x , амплитуда — длиной этого вектора, а фаза — углом его поворота относительно оси x .

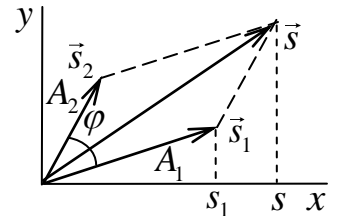


Рис. 3.1

Амплитуду A результирующего колебания можно найти по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi \quad (3.2)$$

Формула (3.2) позволяет найти амплитуду результирующего колебания A , если известны амплитуды складываемых колебаний A_1, A_2 и соответствующая разность фаз φ . Эту формулу можно преобразовать к виду

$$\varphi = \arccos \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} \quad (3.3)$$

Таким образом, по формуле (3.3) можно найти разность фаз φ , если известны амплитуды A_1, A_2 и A .

Сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Если материальная точка может совершать колебания как вдоль оси x , так и вдоль перпендикулярной к ней оси y с одинаковой частотой ω , то при одновременном колебании вдоль этих осей колебания описываются уравнениями

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4)$$

где a и b - амплитуды колебаний; φ - разность фаз (фазовый сдвиг)

колебаний. Если из этих уравнений исключить время, то после некоторых преобразований можно получить уравнение траектории движения точки следующего вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2xy \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (3.5)$$

Это уравнение эллипса, который материальная точка описывает за время, равное периоду складываемых колебаний. Ориентация эллипса и его размеры зависят от амплитуд a и b колебаний и разности фаз φ .

Уравнение (3.4) справедливо не только для колебаний материальной точки. Например, подавая переменное электрическое напряжение U_1 на вход y и напряжение U_2 той же частоты на вход x осциллографа, можно заставить световое пятно на экране осциллографа совершать колебания как вдоль оси x , так и вдоль оси y . На экране осциллографа будет высвечиваться траектория движения этого пятна - эллипс.

На рис. 3.2 показан вид эллипса для некоторого частного случая. Стационарные картины на экране осциллографа, являющиеся результатами сложения взаимно перпендикулярных колебаний с кратными, в частности равными, частотами, называются *фигурами Лиссажу*.

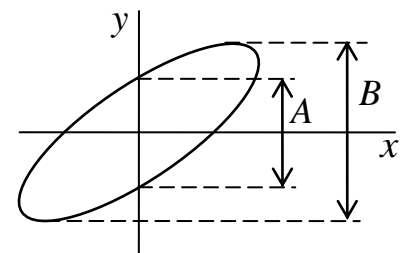


Рис. 3.2

Из уравнения (3.5) следует, что при $x = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \text{ или } \sin \varphi = \pm \frac{y}{b} \quad (3.6)$$

Следовательно, по виду эллипса можно определить $\sin \varphi$ и фазовый сдвиг φ . Следует отметить, что определить знак $\sin \varphi$ и фазового сдвига по виду эллипса обычно бывает невозможно, поскольку при большой частоте колебаний невозможно проследить, движется ли световое пятно по часовой стрелке или против неё. Поэтому в работе будем определять $\sin \varphi$ и фазовый сдвиг только по модулю.

В соответствии с обозначениями Рис. 3.2

$$\sin \varphi = \frac{A}{B}; \quad \varphi = \arcsin \frac{A}{B} \quad (3.7)$$

Поскольку складываемые колебания подаются на разные входы осциллографа, коэффициенты усиления в каналах которых могут быть разными, отношение амплитуд A/B колебаний светового пятна на экране может не совпадать с отношением a/b напряжений, подаваемых на входы осциллографа. Однако при измерении фазового сдвига по формуле (3.7) надо знать амплитуду колебаний светового пятна только вдоль оси y . Амплитуда колебаний вдоль оси x может быть любой.

Анализ ошибки измерения фазового сдвига этим методом показывает, что наиболее предпочтительным является случай, когда $A \approx B$. Этого можно достичь, регулируя коэффициенты усиления соответствующих усилителей.

Описание экспериментальной установки

Схема установки, предназначенной для изучения сложения колебаний напряжения в цепи, состоящей из двух последовательно соединённых элементов с комплексными сопротивлениями (*импедансами*) Z_1 и Z_2 , показана на Рис. 3.3.

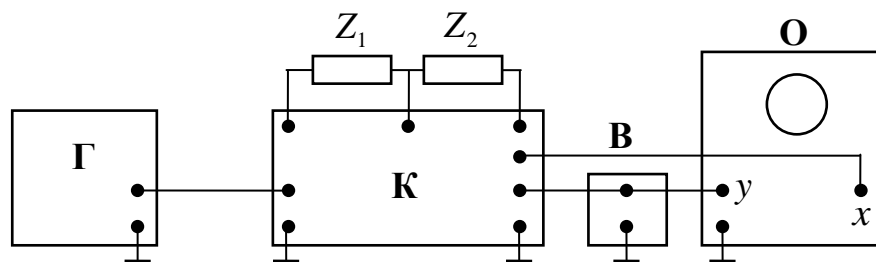


Рис. 3.3

Генератор электрических гармонических колебаний G , элементы исследуемой цепи Z_1 и Z_2 , а также вольтметр V и входы x и y осциллографа O соединены через коммутатор K .

Коммутатор позволяет осуществить четыре варианта измерений:

- 1) измерение напряжения U_1 на элементе Z_1 ;

- 2) измерение напряжения U_2 на элементе Z_2 ;
- 3) измерение напряжения U на цепочке последовательно соединенных элементов Z_1 и Z_2 ;
- 4) измерение разности фаз колебаний напряжения на элементах Z_1 и Z_2 .

В качестве элемента цепи Z_1 используется резистор R_1 . В качестве элемента цепи Z_2 используются соединенные параллельно резистор R и конденсатор C (Рис.3.4).

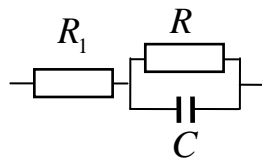


Рис. 3.4

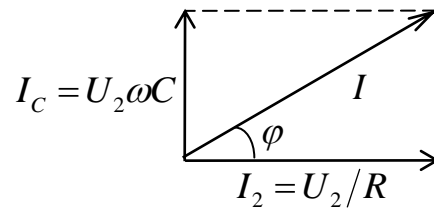


Рис. 3.5

Напряжение U_2 на резисторе R равно напряжению на конденсаторе. Ток через резистор R равен $I_R = U_2/R$. Модуль комплексного сопротивления конденсатора равен $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$. Модуль тока через конденсатор равен $|I_C| = |U_2/Z_C| = U_2\omega C$.

Ток через конденсатор C опережает по фазе ток через резистор R на $\pi/2$. Соответствующая векторная диаграмма для токов показана на рис. 3.5.

Из приведенной диаграммы следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega RC = 2\pi f RC \quad (3.8)$$

Так как элементы Z_1 и Z_2 соединены последовательно, через них протекает один и тот же ток I . Напряжение U_1 на резисторе R_1 совпадает по фазе с этим током. Следовательно, разность фаз между напряжениями U_1 и U_2 такая же, как и между токами I и I_R , т.е. равна углу φ , определяемому выражением (3.8).

Напряжения U_1 , U_2 и U можно измерить как с помощью осциллографа, так и с помощью вольтметра. Измерения с помощью вольтметра пред-

почтительнее, т.к. точность таких измерений выше. Однако и в этом случае рекомендуется с помощью осциллографа следить за формой сигнала, подаваемого с генератора. Она должна быть синусоидальной. В случае искажения формы сигнала следует уменьшить напряжение на выходе генератора до уровня, обеспечивающего синусоидальную форму.

Задание к работе

1. Установить на генераторе G частоту f - одно из 10 значений частот в диапазоне, указанном в паспорте установки.
2. Измерить с помощью вольтметра напряжения U_1 , U_2 и U .
3. По результатам измерений найти фазовый сдвиг φ и $tg\varphi$ по формуле (3.3):

$$\varphi = \arccos \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}$$

4. Получить фигуру Лиссажу (Рис. 3.2) на экране осциллографа.
5. По параметрам фигуры Лиссажу определить фазовый сдвиг φ и $tg\varphi$ по формуле (3.6).
6. Повторить пп.1 - 5 последовательно для остальных заданных значений частоты.
7. Построить график зависимости $tg\varphi$ от f , рассчитанный теоретически по формуле (3.7).
8. На график нанести точки, полученные в пп. 3 и 5 (обозначения точек по пп. 3 и 5 должны быть разными).
9. Сравнить полученные экспериментальные зависимости $tg\varphi$ от f с теоретической. Сделать вывод о степени соответствия результатов, полученных разными методами.

Контрольные вопросы

1. Вывести формулу (3.2) для амплитуды результирующего колебания, используя векторную диаграмму.
2. Доказать, что при взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой траекторией движения точки является эллипс (получить формулу (3.5)).
3. Как по виду эллипса на экране осциллографа определить разность фаз колебаний?

Литература

1. *Ким В.Ф., Кошелев Э.А., Суханов И.И.* Колебания и волны, Изд-во НГТУ, 2022
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Том 3, Электричество
5. *Калашиников С.Г.* Электричество