

Лабораторная работа № 206

(Глава 2 в [1])

Свободные колебания двух связанных маятников

Цель работы: для колебательной системы из двух связанных маятников измерить частоты нормальных колебаний и частоту биений при различной степени связи маятников; зависимость этих частот от степени связи сравнить с теорией.

ТЕОРИЯ

Пружинный маятник

На рис. 2.1: длина недеформированной пружины d_0 , длина деформированной пружины d , деформация пружины $x = d - d_0 \geq 0$. По закону Гука на груз действует возвращающая сила $F_x = -kx$, где k - коэффициент упругости пружины.

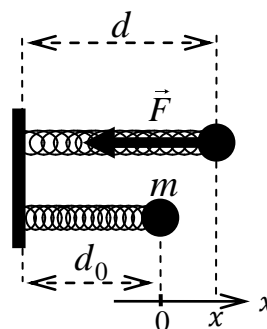


Рис. 2.1

2-й закон Ньютона $ma_x \equiv m\ddot{x} = -kx$ преобразуется в уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0^2 = k/m, \quad (2.1)$$

решением которого является линейная комбинация гармонических колебаний с циклической частотой ω_0 и произвольными амплитудами A, B

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

или с произвольными амплитудой x_m и начальной фазой φ . Аргумент $\omega_0 t + \varphi$ гармонической функции называют полной фазой колебания или просто фазой.

Пружина с подвижным креплением

Если оба конца пружины подвижны (Рис. 2.2), то деформация пружины $x = d - d_0 = x_{II} - x_{LI}$; $x_{LI}, x_{II} \geq 0$ – смещения левого и правого концов пружины от соответствующих начал отсчёта. Возвращающая сила, действующая на груз, равна $F_x = -k(x_{II} - x_{LI})$.

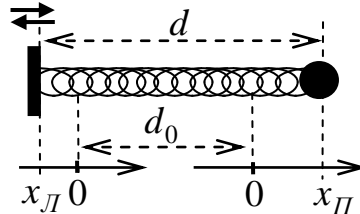


Рис. 2.2

Физический маятник

Уравнение динамики вращения маятника вокруг верхней точки подвеса: $J\varepsilon \equiv J\ddot{\alpha} = M$. Здесь J – момент инерции маятника, $\varepsilon \equiv \ddot{\alpha}$ – угловое ускорение, M – момент силы тяжести груза – массивной чечевицы малого размера (Рис. 2.3). Будем считать массу стержня намного меньше массы чечевицы, тогда центр масс маятника практически совпадает с центром груза, а длина физического маятника l

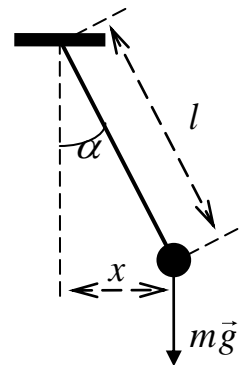


Рис. 2.3

равна длине стержня (На конечное уравнение это приближение не влияет). Горизонтальное смещение груза, равное плечу силы тяжести, $x = l \sin \alpha \approx l\alpha$ в приближении малых колебаний $\alpha \ll 1$. Тогда $J\ddot{\alpha} = -mgl\alpha$ превращается в уравнение гармонических колебаний (2.1) с частотой $\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$. В приближении "точечного" груза $J = ml^2$, а частота малых колебаний $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Связанные маятники

Экспериментальная установка (рис. 2.4) состоит из двух одинаковых физических маятников, соединенных пружиной (Пр), измерительной шкалы (Ш) и секундомера. Перемещая чечевицы вдоль стержней, можно изменять периоды собственных колебаний маятников. Пружину также можно перемещать вдоль стержней, этим обеспечивается изменение связи между маятниками.

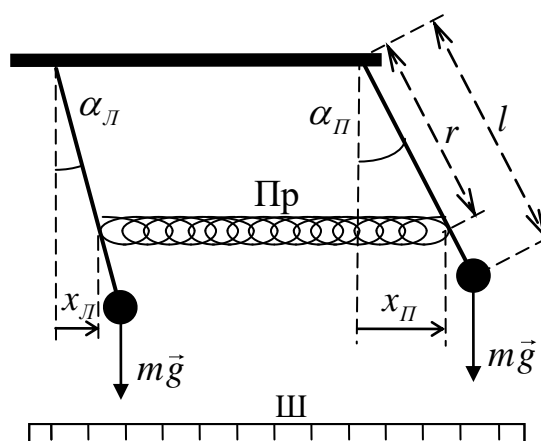


Рис. 2.4

Маятники представляют собой физическую систему с двумя степенями свободы. Это означает, что для определения положения системы в пространстве (т.е. положения обоих маятников) необходимо задать всего две какие-либо величины. Этими величинами могут быть горизонтальные смещения или вертикальные смещения чечевиц или углы отклонения маятников α_L и α_P от положения равновесия изолированного маятника. (Индексы «Л» и «П» указывают принадлежность величины левому или правому маятнику).

Очевидно, что в рассматриваемой установке будут происходить колебательные процессы. Но всегда ли эти процессы будут *гармоническими*, т.е. будут ли изменяться углы отклонений α_L и α_P маятников с течением времени по законам косинуса или синуса с *постоянной амплитудой колебаний*? В общем случае нет.

Вначале рассмотрим один пример качественно. Зададим разные начальные отклонения маятников, например, отклоним только правый маятник (Рис. 2.5а). Из-за воздействия пружины левый маятник придет в движение: будет происходить его постепенное раскачивание в результате перехода энергии от одного маятника к другому, и такое движение не будет гармоническим, поскольку амплитуда этих колебаний непрерывно изменяется с течением времени.

Гармонические колебания в системе маятников рассмотрены ниже.

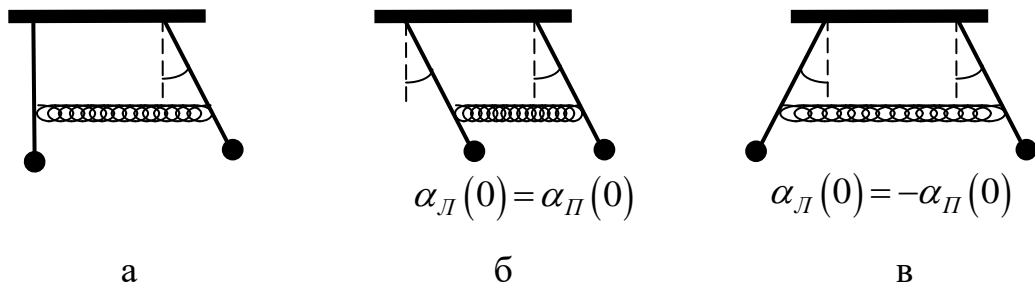


Рис. 2.5

Центр инерции каждого из маятников расположен на расстоянии l от оси вращения, пружина жесткости k прикреплена к маятникам на расстоянии r от оси вращения (рис. 2.4). Массой пружины пренебрегаем. На каждый маятник действуют два момента сил: момент силы тяжести и момент силы связи (предполагаем, что трением в осях подвеса маятников можно пренебречь).

В приближении малых углов отклонения деформация пружины равна

$$\Delta x = x_L - x_P = r(\alpha_L - \alpha_P) \quad (2.2)$$

где x_L - смещение левого конца пружины от положения равновесия, x_P - смещение правого конца пружины, а r - расстояние от оси вращения маятника до крепления пружины (Рис. 4). Плечо сил упругости можно считать равным r , т.к. в приближении малых углов $\cos \alpha \approx 1$.

Основные уравнения динамики вращательного движения маятников:

$$J \frac{d^2 \alpha_{Л}}{dt^2} = -mgl \alpha_{Л} - kr^2 (\alpha_{Л} - \alpha_{П}) \quad (2.3)$$

$$J \frac{d^2 \alpha_{П}}{dt^2} = -mgl \alpha_{П} + kr^2 (\alpha_{Л} - \alpha_{П}) \quad (2.4)$$

Введём обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{kr^2}{J}} \quad (2.5)$$

Тогда система уравнений (2.3), (2.4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \alpha_{Л}}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha_{Л} + \delta^2 (\alpha_{Л} - \alpha_{П}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 \alpha_{П}}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha_{П} - \delta^2 (\alpha_{Л} - \alpha_{П}) = 0 \quad (2.7)$$

Кратко опишем математический метод решения системы. Подстановкой $\alpha(t) \sim \exp(\lambda t)$, где λ - константа, в общем случае комплексная, систему линейных однородных дифференциальных уравнений (2.6), (2.7) сводят к системе линейных алгебраических уравнений. Нас интересуют колебания с произвольной амплитудой, т.е. бесконечное множество решений системы. Определитель системы в этом случае равен нулю (*характеристическое уравнение*), число его корней равно количеству уравнений. Частоты гармонических колебаний, получаемые из характеристического уравнения:

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\delta^2}{\omega_0^2} \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{kr^2}{mgl} \right) \quad (2.8)$$

Далее, систему решают *разделением переменных*: вводят новые переменные

$$\psi_1 = \alpha_{Л} + \alpha_{П}, \quad \psi_2 = \alpha_{Л} - \alpha_{П} \quad (2.9)$$

для каждой из которых получается независимое уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_0^2\psi_1 = 0, \quad \frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \omega_2^2\psi_2 = 0 \quad (2.10)$$

Эти новые переменные называются *нормальными координатами* колебательной системы, т.к. эти координаты всегда совершают *гармонические (нормальные) колебания*

$$\psi_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad \psi_2 = A_2 \cos \omega_2 t \quad (2.11)$$

Любые колебания, том числе и негармонические, в системе, состоящей из нескольких колебательных подсистем, являются линейными суперпозициями этих нормальных колебаний. Покажем это для колебаний, изображённых на рис. 2.5. Из (2.9) выразим угловые отклонения каждого маятника через нормальные координаты

$$\alpha_L = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}, \quad \alpha_{II} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \quad (2.12)$$

Синфазное колебание. Для колебания рис. 2.5б, когда маятники в начальный момент отклонены от положения равновесия на один и тот же угол, учтя, что $\cos 0 = 1$, и обозначив $\alpha_L(0) = \alpha_{II}(0) = \alpha_0$, получаем $A_1 + A_2 = A_1 - A_2$, т.е. $A_2 = 0$, $A_1 = \alpha_0$:

$$\alpha_L(t) = \alpha_{II}(t) = \alpha_0 \cos \omega_1 t \quad (2.13)$$

Таким образом, углы отклонения маятников остаются одинаковыми в любой момент времени. Такое колебание называется *синфазным* – фазы колебаний обоих маятников равны $\omega_1 t$. Согласно (2.8), частота синфазных колебаний $\omega_1 = \omega_0$ равна частоте колебаний несвязанных маятников. Это объясняется тем, что связывающая маятники пружина практически «не работает», так как она не сжимается и не растягивается.

Противофазное колебание. Рассмотрим колебание, когда в начальный момент маятники отклонены в противоположные стороны от положения равновесия на одинаковые по величине углы (Рис. 2.5в). Из $\alpha_L(0) = -\alpha_{II}(0) = -\alpha_0$ получаем

$$A_1 + A_2 = -A_1 + A_2, \text{ т.е. } A_1 = 0,$$

$$\alpha_{II}(t) = \alpha_0 \cos \omega_2 t, \quad \alpha_{LI}(t) = -\alpha_0 \cos \omega_2 t = \alpha_0 \cos(\omega_2 t + \pi) \quad (2.14)$$

Таким образом, колебание гармоническое, углы отклонения маятников останутся противоположными в любой момент времени, а разность фаз колебаний равна π . Такое колебание называют *противофазным*. Частота колебаний противофазного колебания ω_2 больше частоты колебания несвязанных маятников. Это связано с тем, что возвращающий момент сил здесь больше, т.к. моменты сил тяжести и упругости при симметричном отклонении маятников сонаправлены.

Если «выключить» пружину, положив её упругость $k = 0$ или подняв её к точкам подвеса маятников, т.е. при $r = 0$, из (2.6), (2.7) получим уравнения колебаний *изолированных* маятников с частотой ω_0 . Однако с усилением действия пружины разность частот ω_2 и ω_1 возрастает.

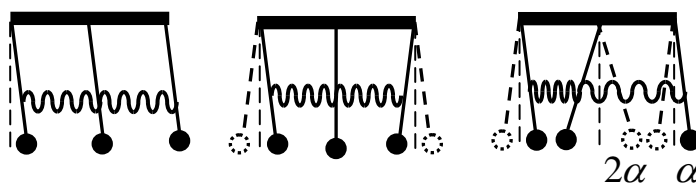


Рис. 2.6

Системы с одинаковыми свойствами называют «вырожденными». Дополнительное взаимодействие подсистем, как говорят, «снимает вырождение». *Расщепление частот нормальных колебаний системы возрастает с усилением взаимодействия подсистем.*

Максимальное число различных нормальных колебаний системы равно числу взаимодействующих подсистем. Математически это следствие того, что определитель системы N линейных уравнений может иметь максимум N разных корней. Можно показать наличие трёх нормальных колебаний у системы трёх связанных маятников (рис. 2.6).

Биения. Рассмотрим колебание рис. 2.5а:

$$\alpha_{LI}(0) = \frac{A_1 + A_2}{2} = 0, \quad \alpha_{II}(0) = \frac{A_1 - A_2}{2} = \alpha_0 \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\alpha_{Л}(t) = \frac{\alpha_0}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t), \quad \alpha_{П}(t) = \frac{\alpha_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \quad (2.16)$$

Используем тригонометрические преобразования:

$$\alpha_{Л}(t) = \alpha_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \quad (2.17)$$

$$\alpha_{П}(t) = \alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \quad (2.18)$$

Видно, что колебания маятников не являются гармоническими, а представляют собой произведения гармонических колебаний с циклическими частотами $(\omega_2 + \omega_1)/2$ и $(\omega_2 - \omega_1)/2$.

Если связь маятников слабая, то $\omega_2 \approx \omega_1$ и $\omega_2 + \omega_1 \gg \omega_2 - \omega_1$. В этом случае колебания маятников можно представить как произведение гармонической функции с высокой циклической частотой $(\omega_2 + \omega_1)/2$ и медленно меняющегося колебания с частотой $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$:

$$A_{Л}(t) = \alpha_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right), \quad A_{П}(t) = \alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad (2.19)$$

Такой вид колебаний называется *биениями*, переменные амплитуды $A_{Л}(t)$ и $A_{П}(t)$ называются амплитудами биений. На рис. 2.7 показан период биений амплитуд T_B . Видно, что он вдвое меньше периода медленно меняющегося $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2)t$. Таким образом, сами амплитуды меняются с частотой 2Ω , которая называется циклической частотой биений

$$\omega_B = \omega_2 - \omega_1 \quad (2.20)$$

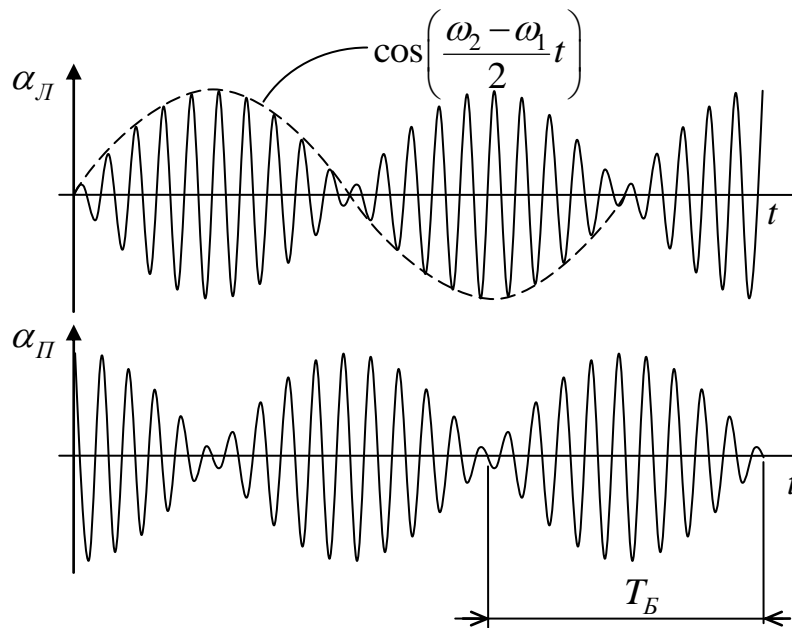


Рис. 2.7

Теоретические выводы

1. Первоначальное отклонение маятников в одну и ту же сторону на равные углы возбуждает нормальные колебания первого (синфазного) типа. Циклическая частота этого нормального колебания ω_1 совпадает с частотой ω_0 изолированного маятника и не зависит от положения пружины.
2. Первоначальное отклонение маятников в противоположные стороны на равные по величине углы возбуждает нормальные колебания второго (противофазного) типа. Циклическая частота этого нормального колебания ω_2 больше частоты первого нормального колебания ω_1 . Увеличение расстояния r от оси вращения до пружины приводит к возрастанию частоты ω_2 .
3. При первоначальном отклонении маятников на неравные углы (например, рис. 2.5а) каждый из маятников совершает сложное негармоническое движение, являющееся суперпозицией нормальных колебаний обоих типов. При слабой связи маятников при этом наблюдается явление биений.

Циклическая частота биений амплитуды ω_B равна разности частот нормальных колебаний $\omega_2 - \omega_1$. С увеличением расстояния r частота биений возрастает.

Все эти выводы справедливы и для частоты колебаний f , которая, как известно, связана с циклической частотой колебаний ω формулой

$$\omega = 2\pi f \quad (2.21)$$

В настоящей работе проводится экспериментальная проверка этих теоретических выводов.

ИЗМЕРЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ

В данной работе непосредственно измеряется время t_N для N периодов колебаний. Период колебаний T равен

$$T = \frac{t_N}{N} \quad (2.22)$$

Тогда частота колебаний

$$f = \frac{1}{T} = \frac{N}{t_N} \quad (2.23)$$

Абсолютная погрешность измерения частоты

$$\sigma_f = \frac{N}{t_N^2} \sigma_t = \frac{N^2}{t_N^2} \frac{\sigma_t}{N} = \frac{1}{T^2} \frac{\sigma_t}{N} \quad (2.24)$$

где σ_t - абсолютная погрешность измерения времени, как правило, не зависящая от длительности измеряемого промежутка t_N . Таким образом, чем больше N , тем меньше погрешность измерения частоты. В задании к работе даны минимальные значения N для измерения частот разных типов колебаний.

В рассмотренной теоретической модели углы отклонения маятников от положения равновесия полагались малыми, поэтому при выполнении лабораторной работы следует иметь в виду, что максимальные углы отклонения маятников должны быть не более, например, 10° .

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Снять пружину. Измерить длительность собственных колебаний каждого из маятников по времени $N = 30$ периодов колебаний $t_{30;I}$ и $t_{30;II}$. Если эти промежутки времени отличаются друг от друга более чем на 1 %, их необходимо уравнять, перемещая чечевицу одного из маятников по стержню (штанге).
2. Установить пружину на маятники в одно из положений, указанных преподавателем.
 - a. Измерить длительность 10 периодов колебаний синфазного типа колебаний $t_{10,1}$, возбуждая эти колебания в соответствии с рис. 2.5б;
 - b. Измерить длительность 10 периодов колебаний противофазного типа колебаний $t_{10,2}$ типов колебаний, возбуждая эти колебания в соответствии с рис. 2.5в.
 - c. Измерить длительность 5 периодов биений амплитуды $t_{5;Б}$, возбуждая колебания в соответствии с рис. 2.5а. Проводя эти измерения, наблюдайте за движением маятника, начальное отклонение которого равно нулю.
3. Установить пружину в новое положение и повторить измерения п.2. Всего провести измерения для пяти положений пружины.
4. Для каждого из положений пружины вычислить частоту колебаний изолированного маятника f_0 , нормальные частоты f_1 , f_2 и частоты биений f_B

$$\boxed{f_0 = \frac{30}{t_{30;I}}; \quad f_1 = \frac{10}{t_{10,1}}; \quad f_2 = \frac{10}{t_{10,2}}; \quad f_B = \frac{5}{t_{5;Б}}} \quad (2.25)$$

5. Вычислить разность нормальных частот $f_2 - f_1$ для всех пяти положений пружины.

6. Построить графики f_1 , f_2 , f_B и $f_2 - f_1$ в зависимости от степени связи маятников. Проанализировав формулу (2.8), выберите, какую функцию расстояния r следует откладывать по горизонтальной оси для упрощения вида графиков.
7. Проведите на графике горизонтальную линию на высоте f_0 .
8. По результатам работы сделать выводы относительно справедливости следующих теоретических предсказаний:
 - a. о приближенном равенстве частоты f_1 синфазного нормального колебания частоте f_0 гармонических колебаний отдельного маятника;
 - b. о независимости частоты f_1 синфазного нормального колебания от расстояния r ;
 - c. о повышении частоты f_2 противофазного нормального колебания с увеличением расстояния r ;
 - d. о равенстве частоты биений f_B разности частот нормальных колебаний $f_2 - f_1$;
 - e. о повышении частоты биений f_B с увеличением расстояния r .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие величины вы будете измерять непосредственно?
3. Каким образом вы будете измерять частоты нормальных колебаний и частоту биений?
4. Какие графические зависимости вы ожидаете получить? Какие величины вы решили отложить по осям координат?
5. Как погрешность измерения частоты связана с погрешностью измерения промежутка времени?
6. **Вывести** уравнение свободных колебаний для пружинного маятника и записать его общее решение.

7. **Вывести** уравнение свободных колебаний математического маятника на подвесе и записать его общее решение.
8. **Вывести** систему уравнений свободных колебаний математических маятников, связанных пружиной.
9. Когда уравнения колебаний связанных маятников переходят в уравнения гармонических колебаний?
10. Что такое нормальные координаты, нормальные частоты?
11. Как определяется число степеней свободы колебательной системы?
12. Что такое частотное вырождение? Как связь колебательных подсистем влияет на частотное вырождение?
13. Как частота синфазного колебания маятников зависит от степени их связи? Чему она равна? Почему?
14. Как частота противофазного колебания маятников зависит от степени их связи? Как она соотносится с частотой синфазных колебаний? Почему?
15. Что такое явление биений? Что происходит с энергиями маятников в процессе биений?
16. **Записать** уравнения нормальных колебаний связанных маятников и их решения, считая нормальные частоты известными.
17. **Выразить** углы отклонений маятников из нормальных координат
 - в синфазном колебании;
 - в противофазном колебании;
 - в режиме биений.
18. Нарисовать графики зависимости углов отклонения маятников от времени в режиме биений.
19. Почему частота биений равна разности нормальных частот, а не их полуразности, как это записано в формулах (19)?

Литература

1. *Ким. В.Ф., Кошелев Э.А., Суханов И.И.* Колебания и волны, Изд-во НГТУ, 2022
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Том 3, Электричество
5. *Калашиников С.Г.* Электричество