Лабораторная работа № 20а

(Глава 1 из [1])

Свободные колебания физического маятника

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от положения оси вращения, относительно которой происходит качание маятника; используя полученную экспериментальную зависимость, определить моменты инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции, и относительно других осей, параллельных первой.

Теория

Дифференциальное уравнение колебаний физического маятника

Физический маятник - твёрдое тело, которое может вращаться под действием силы тяжести mg вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающей с точкой центра инерции *C* этого тела. Схема маятника показана на рис. 1.1.

Дифференциальное уравнение колебаний (уравнение движения) физического маятника можно получить из закона сохранения энергии. В состоянии равновесия потенциальную энергию маятника относительно Земли будем считать равной нулю. Тогда при отклонении маятника на угол θ потенциальная энергия будет равна $E_П = mgh = mga(1-\cos\theta)$, где g – ускорение силы тяжести.

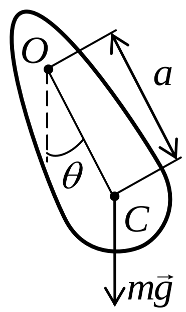

Рис. 1.1

Кинетическая энергия вращения маятника равна

$$E_K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

где I - момент инерции маятника относительно оси вращения; $\dot{\theta}$ - угловая скорость - первая производная от угла поворота по времени.

Полная механическая энергия маятника

$$E = E_К + E_П = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) \tag{1.1}$$

Если угол отклонения от положения равновесия θ мал, то $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Тогда выражение (1.1) можно переписать в виде

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2 \tag{1.2}$$

Поскольку при колебаниях маятника неизбежно совершается работа по преодолению сил трения, механическая энергия E постепенно убывает. Учитывая, что в дальнейшем нас будет интересовать, прежде всего период колебаний, предположим, что потери энергии за время одного периода по сравнению с полной энергией пренебрежимо малы. Определим уравнение движения, а из него и период колебаний в этом приближении.

Если потерями энергии можно пренебречь, то $E = const$, а $\dot{E} = 0$. Определим производную от энергии по времени $\dot{E}$ из выражения (1.2) и приравняем ее нулю. В результате получим уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{I}\theta = 0 \tag{1.3}$$

Коэффициент mga/I при θ имеет размерность [с$^{-2}$] и равен квадрату круговой (циклической) частоты ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{1.4}$$

Общее решение уравнения колебаний (1.3) имеет вид

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{1.5}$$

Здесь θ_m - амплитуда колебаний; $(\omega t + \varphi_0)$ - фаза колебаний (иногда говорят, «полная фаза»); φ_0 - начальная фаза.

Амплитуда колебаний и начальная фаза из уравнения (1.3) не находятся. Они определяются заданием так называемых начальных условий.

Период колебаний T связан с частотой ω соотношением $T = 2\pi/\omega$. Учитывая (1.4), получим выражение для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \tag{1.6}$$

Определение момента инерции маятника

по измерениям периодов колебаний

В формуле (1.6) представлена неявная связь между периодом колебаний T и расстоянием a от оси вращения до центра инерции физического маятника. Явную связь этих величин можно получить, если воспользоваться теоремой Штейнера.

В соответствии с теоремой Штейнера момент инерции маятника относительно произвольной оси равен моменту инерции I_0 относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями, т.е. $I = I_0 + ma^2$. Формулу для периода колебаний теперь запишем в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} \tag{1.7}$$

Функция $T(a)$ имеет минимум. Если взять от этой функции первую производную по a и приравнять ее нулю, то можно найти значение расстояния а, при котором период минимален. Это расстояние $a = \sqrt{I_0/m}$. Подставив это значение в формулу (1.7), получим

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4I_0}{mg^2}} \tag{1.8}$$

Если экспериментально определить $T_{\min}$, то момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс, можно вычислить по формуле

$$I_0 = \frac{mg^2}{64\pi^4} T_{\min}^4 \quad , \tag{1.9}$$

полученной из выражения (1.8). Момент инерции относительно любой другой параллельной оси, смещенной на расстояние a, может быть найден по теореме Штейнера.

Однако положение центра масс для рассматриваемого физического маятника неизвестно, а потому неизвестно также и расстояние a. Тем не менее, момент инерции относительно произвольной оси можно найти и в этом случае, исходя из результатов измерения периода, пользуясь только одним измерительным прибором - секундомером.

Преобразуем формулу (1.7) к виду

$$a^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} a + \frac{I_0}{m} = 0 \tag{1.10}$$

Это квадратное уравнение, из которого можно определить параметр a, соответствующий измеренному значению периода Т. Решение этого уравнения имеет вид

$$a = \frac{g}{8\pi^2} T^2 \pm \sqrt{\frac{g^2 T^4}{64\pi^4} - \frac{I_0}{m}} \tag{1.11}$$

С учетом формулы (1.8) можно также записать

$$a = \frac{g}{8\pi^2} T^2 \pm \frac{g}{8\pi^2} \sqrt{T^4 - T_{\min}^4} \tag{1.12}$$

Поскольку момент инерции $I = I_0 + ma^2$, воспользовавшись формулами (1.9) и (1.12), получим

$$I = I_0 \left[1 + \left(\frac{T^2}{T_{\min}^2} \pm \sqrt{\frac{T^4}{T_{\min}^4} - 1} \right)^2 \right] \tag{1.13}$$

Таким образом, полученная формула позволяет найти момент инерции физического маятника по измерениям лишь периодов колебаний при изменении точки подвеса маятника без измерения его геометрических параметров.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (Рис.1.2) состоит из физического маятника, устройства подвеса маятника и секундомера. Устройство подвеса состоит из кольца 1, двух закрепленных в нем винтов 2 с заостренными концами и опорной платформы 3. Кольцо 1 может быть закреплено в любом месте на стержне 4 маятника. Ось качания маятника проходит через заострённые концы винтов 2. На стержне маятника имеются риски, показывающие рекомендуемое расположение осей качания. Риски пронумерованы цифрами, означающими номера осей. Ось, проходящая через заостренные концы винтов 2, должна совпадать с одной из рисок на стержне маятника.

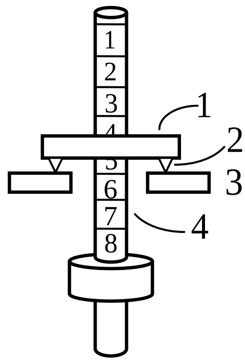

Рис. 1.2

Задание к работе

1. Измерить t_n – время N периодов колебаний маятника относительно каждой из осей, заданных преподавателем. Период определить по формуле $T = t_n / N$. Для увеличения точности измерений число периодов N должно быть по возможности большим (например, 100 колебаний).
2. Результаты измерений представить на графике. По вертикальной оси отложить значения T^4, по горизонтальной – равномерно распределённые номера осей от 1 до максимального.
3. По графику определить $T_{\min}^4$, и по формуле (1.9) найти I_0 .
4. Определить расстояние до центра инерции физического маятника, соответствующее минимальному периоду.

5. Определить момент инерции маятника относительно одной или двух других осей (по указанию преподавателя) по формуле (1.13).

Контрольные вопросы

1. В каком случае при выводе дифференциального уравнения колебаний физического маятника потерями энергии можно пренебречь?
2. **Вывести** это дифференциальное уравнение в указанном приближении.
3. Какими функциями, кроме приведенной в выражении (1.5), может описываться решение уравнения (3)?
4. Как при известной массе тела с помощью только одного измерительного прибора, секундомера, можно определить момент инерции тела?
5. **Выведите** формулу связи момента инерции тела с периодом колебаний.
6. Формула (1.13) дает (с учетом знаков «±» внутри формулы) два значения момента инерции. Как это понимать? В каком случае использовать формулу со знаком «+», а в каком — со знаком «-» ?

Литература

1. *Ким В.Ф., Кошелев Э.А., Суханов И.И.* Колебания и волны, Изд-во НГТУ, 2022
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Том 3, Электричество
5. *Калашников С.Г.* Электричество