

Лабораторная работа № 10

(Глава 2.1 в [1])

Изучение электростатического поля методом моделирования в электролитической ванне

Цель работы: изучить экспериментально семейство эквипотенциальных поверхностей электрического поля, возникающего вблизи поверхности проводников; на основе теоретических представлений о свойствах электростатического поля построить силовые линии, оценить напряжённость электрического поля.

Теория

Интегральная связь напряжённости электростатического поля с потенциалом.

Работа силы $\vec{F}$ при движении материальной точки по траектории:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (F_x \cdot dl_x + F_y \cdot dl_y + F_z \cdot dl_z) \quad (2.1)$$

где $d\vec{l} = (dl_x, dl_y, dl_z)$ – вектор бесконечно малого перемещения материальной точки по траектории L (рис. 2.1).

Работа *консервативной силы* зависит только от положения начальной и конечной точек траектории 1 и 2, но не зависит от вида самой траектории. В этом случае работу можно выразить через функцию этих точек, называемую потенциальной энергией W_{II} :

$$A = -\Delta W_{II} = -(W_{II2} - W_{II1}) \quad (2.2)$$

В частности, работа консервативной силы по замкнутому контуру, когда начальная и конечная точки совпадают, равна нулю.

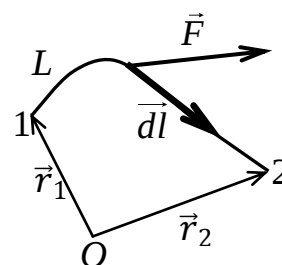


Рис. 2.1

Пробным зарядом называют положительный точечный заряд настолько малой величины, что внесение такого заряда практически не вызывает перераспределения зарядов на окружающих телах.

Сила, действующая на пробный заряд в электростатическом поле внешних зарядов

$$\vec{F} = q_{np} \vec{E} \quad (2.3)$$

где $\vec{E}$ - *напряжённость* электростатического поля – величина, равная отношению силы, действующей на пробный положительный заряд, к величине этого заряда. Таким образом, векторы $\vec{F}$ и $\vec{E}$ параллельны. Совокупность векторов напряжённости в пространстве образует поле. Поле консервативной силы называют *потенциальным*. *Силовую линию* электрического поля проводят так, чтобы вектор напряжённости был касателен к ней в каждой её точке, а направление силовой линии совпадает с направлением вектора напряжённости в данной точке.

Электростатическая сила потенциальна. Поэтому *циркуляция* электростатического поля, т.е. криволинейный интеграл по замкнутой кривой L , равен нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.4)$$

Потенциальная энергия пробного заряда в электростатическом поле внешних зарядов

$$W_{\Pi}(\vec{r}) = q_{np} \cdot \varphi(\vec{r}); \quad \Delta W_{\Pi} = q_{np} \cdot \Delta \varphi \quad (2.5)$$

где $\varphi(\vec{r})$ - потенциал электростатического поля в данной точке пространства $\vec{r}$, численно равный потенциальной энергии единичного положительного заряда.

Подставляя (2.3) и (2.5) в (2.2), получаем *интегральную связь напряжённости электростатического поля с потенциалом*

$$\Delta \varphi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.6)$$

Если поле однородно, т.е. во всём пространстве $\vec{E} = \text{const}$, то из (6) получаем формулу для расчёта напряжённости:

$$\boxed{|U| = |\Delta\varphi| = E \cdot l}, \quad (2.7)$$

где $U \equiv \Delta\varphi$ - электрическое напряжение – другое название разности потенциалов $\Delta\varphi$.

Дифференциальная связь напряжённости с потенциалом

При бесконечно малом перемещении из формулы (2.6) получаем изменение потенциала

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -(E_x \cdot dl_x + E_y \cdot dl_y + E_z \cdot dl_z) \quad (2.8)$$

Запишем (2.8) как дифференциал функции $\varphi(x, y, z)$

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dl_x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dl_y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dl_z \quad (2.9)$$

Выражения (2.8) и (2.9) должны совпадать при любом направлении и величине $\vec{dl}$. Это возможно, только если коэффициенты при компонентах вектора $\vec{dl}$ в (2.8) и (2.9) равны. Отсюда получаем *дифференциальную связь напряжённости с потенциалом*

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (2.10)$$

Как известно, градиентом функции φ называется вектор

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}$$

Таким образом, вектор напряжённости электрического поля равен

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (2.11)$$

Геометрическая связь силовых линий и эквипотенциалей

Точки пространства с одинаковым значением потенциала образуют поверхности, называемые *эквипотенциальными*. На рис. 2.2 показаны две

эквипотенциальные поверхности φ_1 и $\varphi_2 > \varphi_1$. Определим направление вектора градиента относительно этих эквипотенциалей. Рассмотрим бесконечно малое перемещение $\vec{dl}$ вдоль эквипотенциальной поверхности φ , т.е. при таком движении $d\varphi = 0$. Малый участок поверхности можно считать плоским, вектор $\vec{dl}$ лежит в этой плоскости.

Равенство нулю скалярного произведения (2.8), (2.9) означает, что векторы – сомножители ортогональны. Следовательно, вектор градиента ортогонален эквипотенциальной поверхности в каждой её точке и направлен в сторону большего потенциала (gradient - уклон). Отсюда получаем *геометрическую связь*: силовые линии

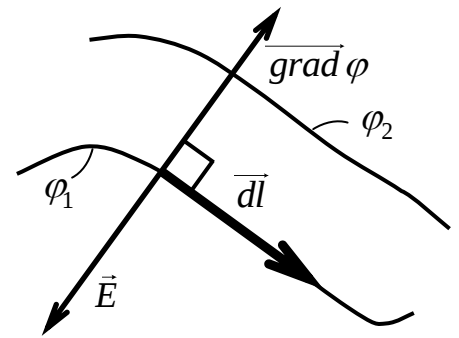


Рис. 2.2

электростатического поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям в каждой точке и направлены в сторону уменьшения потенциала.

Проводники в электростатическом поле

В проводнике имеются свободные носители заряда, которые могут двигаться под действием электрического поля. Опытным путём Георг Ом обнаружил, что электрический ток I через длинный проводник пропорционален разности потенциалов U на концах проводника.

Ток, поток заряда, пропорционален средней скорости дрейфа элементарных носителей заряда, поэтому закон Ома может быть переформулирован как локальный: скорость дрейфа зарядов $V_{др}$ в данной точке проводника пропорциональна локальной напряжённости электрического поля E . Отсюда следует, что электростатике, т.е. неподвижным зарядам, соответствует нулевое поле в проводнике: нет движения зарядов $\Leftrightarrow$ нет поля. В свою очередь, из формулы (2.6) следует, что при этом потенциал проводника постоянен:

$$V_{др} = 0 \Leftrightarrow E = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = const \quad (2.12)$$

С (2.12) связана и нулевая объёмная плотность заряда в объёме проводника. Если внутренней области проводника сообщить заряд Q (в штриховом кружке 1 на рис. 2.3), то составляющие этот заряд одноимённые элементарные подвижные заряды, взаимно отталкиваясь, так распределятся по поверхности проводника, что поле в его объёме будет равно нулю – это самосогласованное стационарное распределение зарядов и поля.

Если проводник поместить во внешнее электрическое поле, то подвижные носители заряда в проводнике перераспределятся по его поверхности так, чтобы по-прежнему внутри проводника поле было равно нулю.

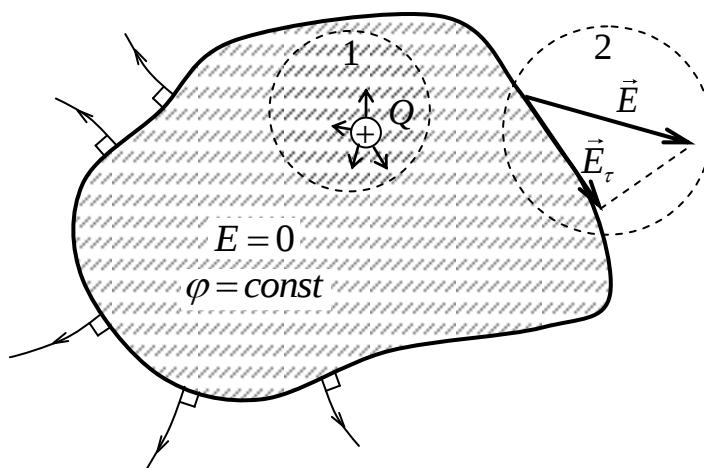


Рис. 2.3

Появление поверхностных зарядов (индуцированных, т.е. наведённых внешним полем) приводит к тому, что силовые линии электростатического поля вне проводника ортогональны его поверхности в каждой её точке. Предположим, что вблизи проводника вектор напряжённости $\vec{E}$ не ортогонален поверхности (в штриховом кружке 2 на рис. 2.3). Тогда под действием касательной (тангенциальной) компоненты поля E_τ подвижные заряды будут перераспределяться по поверхности до тех пор, пока не скомпенсируют своим полем эту тангенциальную компоненту.

Экспериментальная установка и метод измерений

Вид установки показан на рис. 2.4. В ванну 1 с электролитом (водопроводной водой) помещают проводники 2 различной формы – пластины, диски, стержни. Электрическое напряжение источника U_0 подаётся либо на эти проводники, либо на боковые электроды ванны 3.

В электролит погружают измерительные электроды (зонды) 4.

Обратите внимание, на рис. 2.4 эти зонды для лучшей видимости изображены параллельными дну ванны, тогда как в действительности их необходимо погружать в воду строго вертикально, т.е. перпендикулярно дну ванны.

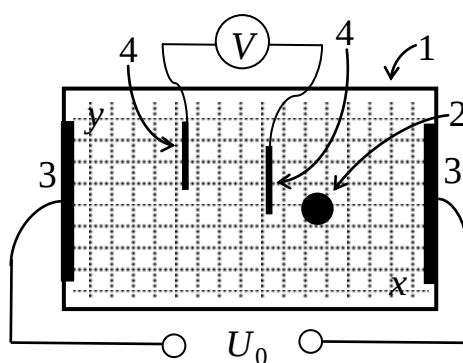


Рис. 2.4

Напряжение (разность потенциалов) U между зондами измеряется с помощью вольтметра V . Для измерения координат зондов в горизонтальной плоскости ванна снабжена координатной сеткой.

В докомпьютерную эпоху метод электролитической ванны широко использовался для моделирования не только электрических полей, но и потоков воздуха, обтекающих крыло самолёта, а также процессов фильтрации жидкости в грунте (нефтедобыча, гидротехнические сооружения). Столь широкая область применения основана на *электрогидродинамической аналогии*: силовые линии электрического поля и течение идеальной жидкости описываются одним дифференциальным уравнением Лапласа.

Единичное измерение представляет собой x, y - координаты точки, соответствующей определённому значению напряжения U – всего три числа.

Однако записывать координаты и значение U в традиционную для лабораторных работ таблицу в данном случае нецелесообразно, к тому же велика вероятность ошибочной записи в большом массиве чисел. Рациональнее сразу наносить точки на миллиметровую бумагу, пометая рядом значение U .

Определение эквипотенциалей

В эксперименте требуется определить положение нескольких эквипотенциалей, обычно не менее пяти. Эквипотенциальные линии принято проводить так, чтобы между соседними линиями была одна и та же разность потенциалов $\Delta\varphi$.

Опишем способ выбора $\Delta\varphi$, когда напряжение источника U_0 подаётся на электроды 3 ванны. Измерительный зонд 4 присоединяем к одному из электродов 3. В этом случае второй измерительный зонд 4 является подвижным, его перемещают по всей ванне. Ставим этот подвижный зонд вблизи электрода ванны в пределах сетки, измеряем напряжение U_1 . Это будет напряжение, соответствующее начальной эквипотенциали. Затем ставим подвижный зонд вблизи противоположного электрода ванны в пределах сетки, измеряем напряжение U_2 конечной эквипотенциали. Между пятью эквипотенциалами четыре промежутка. Тогда

$$\Delta\varphi \leq (U_2 - U_1) / 4 \quad (2.13)$$

Электрический ток в проводниках

В эксперименте проводники включаются в электрическую цепь, по ним протекает ток, поэтому выводы, полученные выше в электростатическом приближении, строго говоря, не выполняются.

Сравним электрические напряжения, возникающие в воде и на металлическом проводнике. По закону Ома разность потенциалов U пропорциональна току I и электрическому сопротивлению R проводящего участка:

$$U = IR \quad (2.14)$$

В свою очередь, общее электрическое сопротивление проводящей среды пропорционально её удельному сопротивлению. Разность потенциалов $U_2 - U_1$ в воде между краями ванны того же порядка, что и напряжение источника U_0 , порядка 10 -15 Вольт, т.е. вполне поддаётся измерению.

Удельное сопротивление стали на 5 - 6 порядков меньше, чем у воды. Поэтому разность потенциалов на металлическом проводнике порядка 10^{-5} - 10^{-4} В. Такое напряжение невозможно обнаружить с помощью вольтметра с ценой деления 0,01 В. Поэтому металлические проводники в условиях эксперимента можно считать практически эквипотенциальными.

Напряжение измеряется с помощью вольтметра. На рис. 2.5 показана эквивалентная схема электрической цепи по описанному выше варианту, когда один из измерительных щупов 4 (Рис. 2.4) вольтметра подсоединён к электроду

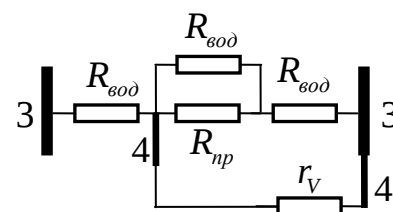


Рис. 2.5

ванны 3. Участки воды $R_{вод}$ подсоединяются к металлическому проводнику R_{np} как последовательно, так и параллельно. Сопротивление вольтметра r_v подключается параллельно.

Идеальный вольтметр должен иметь бесконечно большое сопротивление, только в этом случае присоединение вольтметра не изменяет разности потенциалов на участке цепи. Конечное сопротивление реального вольтметра вносит погрешность в измерение напряжения. Чем больше r_v по сравнению с сопротивлением измеряемого участка, тем меньше погрешность.

Сопротивление электронных цифровых вольтметров превышает 1 Мом, поэтому вносимая ими погрешность мала. Именно такие вольтметры и используются в лабораторной работе.

Погрешность определения координат эквипотенциальных точек

Погрешность отсчёта координаты по координатной сетке σ_{x1} может быть оценена как 1/10 или 1/5 цены деления координатной сетки ванны.

Погрешность σ_{x2} , определяемая чувствительностью измерительной установки, оценивается как $0,3 \cdot \Delta x$, где Δx - максимальное расстояние вдоль оси x , при смещении зонда на которое показание вольтметра не изменяется. Величина Δx может быть названа *зоной нечувствительности*.

Общая погрешность этих двух независимых составляющих равна

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} \quad (2.15)$$

Задание к лабораторной работе

1. Рассчитать цену деления координатной сетки.
2. Собрать электрическую цепь. Налить воду в ванну. Получить разрешение преподавателя на включение приборов.
3. Измерить напряжения U_1 и U_2 на краях координатной сетки ванны.
4. Выбрать приращение разности потенциалов $\Delta\varphi$ по формуле (2.13).
5. Измерить и нанести на первый лист миллиметровой бумаги семейство точек для пяти значений потенциала $U_1, U_1 + \Delta\varphi, \dots, U_1 + 4\Delta\varphi$, для каждого значения не менее 10 точек. Точки располагать по всему диапазону оси y .
6. Отключить источник питания.
7. Разместить проводник в ванне по указанию преподавателя. На втором листе миллиметровой бумаги изобразить в масштабе положение и форму проводника.
8. Включить источник питания.
9. Повторить измерения по п.5.

10. Измерить напряжения в двух крайних точках проводника вдоль оси x , записать эти значения. Измерить расстояние между этими точками вдоль оси x .
11. Измерить погрешность σ_{x2} , определяемую чувствительностью измерительной установки.
12. Рассчитать погрешность отсчёта координаты по координатной сетке σ_{x1} .
13. Рассчитать погрешность измерения координаты σ_x по формуле (2.15).
14. На каждом листе миллиметровки изобразить диапазон $\pm\sigma_x$ вокруг нескольких (по указанию преподавателя) точек каждой эквипотенциали.
15. В пределах этих диапазонов провести плавные эквипотенциальные кривые.
16. Построить силовые линии электрического поля от одного электрода ванны до другого, проходящие через заданные точки координатной сетки. Количество и положение точек задаёт преподаватель.
17. Считая поле в окрестности этих точек однородным, по формуле (2.7) оценить напряжённость поля.
18. Оценить напряжённость поля в металлическом проводнике.

Контрольные вопросы

1. Что такое напряженность и потенциал электрического поля?
2. Что такое циркуляция? Чему она равна для электростатического поля? Почему?
3. Опишите связь между потенциалом и напряженностью электрического поля:
 - а) интегральную;
 - б) дифференциальную.

4. Дайте определение силовой линии и эквипотенциальной поверхности электростатического поля.
5. Каково взаимное расположение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей?
6. Опишите свойства электростатического поля внутри проводника.
7. Как проходят силовые линии и эквипотенциали электростатического поля вблизи поверхности проводника?
8. При каком условии вольтметр вносит малую погрешность в результаты измерений?
9. Как вы в эксперименте будете определять точки в ванне с водой, равностоящие по потенциалу?
10. Как проводить силовые линии напряженности электрического поля?
11. Как вычислять напряженность электрического поля по экспериментальным данным?
12. Соответствует ли измеренное напряжение между крайними точками металлического проводника теории электростатики проводников?

Литература

1. *Суханов И.И.* Электричество и магнетизм, Изд-во НГТУ, 2022.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2.
4. *Калашиников С.Г.* Электричество