

Лабораторный практикум по физике  
Кафедра ПиТФ НГТУ

Лабораторная работа №1

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

В данной работе проводится измерение времени упругого соударения двух одинаковых стальных шаров для нескольких пар шаров различного диаметра.

Цель работы: сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей времени соударения  $\tau$  от диаметра шара  $D$ .

### 1. Описание установки и эксперимента

Измерительная установка та же, что и на вводном занятии. Напомним, она включается кнопкой "Сеть" на передней панели цифрового микро-секундомера  $МС$ . Кнопку "Выбор работы" необходимо переключить в положение "Соударение шаров". Кнопка "Пуск" стирает предыдущее показание на индикаторе микро-секундомера и переводит его в готовность к следующему измерению.

Два одинаковых металлических шара подвешены на проводящих нитях (см. рис. 1 Вводного занятия). Шар 1 отводится в сторону до соприкосновения с упором и при этом поднимается на высоту  $h$ . Затем шар отпускают. При движении шар соударяется со вторым, неподвижно висящим шаром, вследствие чего замыкается электрическая цепь через шары. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряется микросекундомером и отображается на его индикаторе.

## 2. Теория

Упругий удар двух тел. В лабораторной системе отсчета (ЛСО или Л - системе) шар 1, начиная двигаться с высоты  $h \approx 0,1\text{ м}$ , к моменту соударения приобретает скорость  $\vec{V}_0$ . На шар действуют две силы, тяжести и упругости подвеса. Шар движется по дуге окружности, сила упругости всегда перпендикулярна вектору скорости шара, поэтому её работа равна нулю. *Работой сил трения в подвесе можно пренебречь.*

По закону сохранения полной механической энергии увеличение кинетической энергии шара 1 (она была равна нулю, а стала  $\frac{mV_0^2}{2}$ ) равно уменьшению его потенциальной энергии  $mg\Delta h = mgh$ . Поэтому

$$\left| \vec{V}_0 \right| = \sqrt{2gh} \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

Из Вводного занятия известно, что длительность удара – сотни микросекунд,  $\tau \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$  с. Импульс силы тяжести за время удара  $|\Delta \vec{p}_G| = mg\tau$  намного меньше импульса первого шара

$$\frac{mg\tau}{mV_0} = \frac{g\tau}{V_0} \leq \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1,4} \leq 10^{-2}$$

Аналогичная оценка справедлива и для силы натяжения нити подвеса. Таким образом, импульс внешних сил намного меньше суммарного импульса шаров  $mV_0$  до удара. Силы взаимодействия шаров, внутренние силы этой системы тел, не меняют суммарного импульса шаров в соответствии с 3-м законом Ньютона. Следовательно, с относительной погрешностью порядка 1% суммарный импульс пары шаров при ударе можно считать постоянным. Иными словами, в приближении *мгновенного удара* ( $\tau \rightarrow 0$ ) суммарный импульс группы тел сохраняется, даже если результирующая внешних сил отлична от нуля.

Путь шара с постоянной скоростью  $V_0$  за время соударения  $\tau$  был бы равен  $V_0 \cdot \tau \leq 1,4 \cdot (10^{-4} \div 10^{-3}) \text{ м} \approx 0,14 \div 1,4 \text{ мм}$ , что намного меньше диаметра шаров и, тем более, длины подвеса. Однако в действительности этот путь ещё меньше, т.к. в процессе соударения скорости шаров меняются в диапазоне от нуля до  $V_0$ . Ещё меньше смещение шаров по вертикали, т.к. каждый шар движется на подвесе в окрестности нижней точки окружности. Поэтому движение шаров в процессе соударения можно считать прямолинейным по горизонтали. Таким образом, выполняются условия *центрального удара*, когда шары движутся вдоль линии, соединяющей их центры.

Для оценки времени соударения шаров используем второй закон Ньютона:  $d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{12}$ . Здесь  $\vec{p}_1$  - импульс шара 1, а  $\vec{F}_{12}$  - сила, с которой второй шар действует на первый. Перейдём к проекциям векторов на горизонтальную ось:  $dp / dt = F$ . Конечное изменение импульса можно выразить через среднее по времени значение модуля силы  $\overline{F}_{12}$ , действующей на шар 1 со стороны шара 2, за время соударения  $\tau$ :

$$\Delta p_1 = p_1(\tau) - p_1(0) = \tau \overline{F}_{12}.$$

Отсюда время соударения шаров

$$\tau = \frac{\Delta p_1}{\overline{F}_{12}} = \frac{|\Delta p_1|}{|\overline{F}_{12}|} \quad (1)$$

По 3-му закону Ньютона 1-й шар действует на второй с такой же по величине силой  $\vec{F}_{21}$ , направленной противоположно:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Обозначим для краткости среднее значение модуля силы взаимодействия буквой  $F = |\overline{F}_{12}| = |\overline{F}_{21}| \equiv \overline{F}_{12} = \overline{F}_{21}$ .

В нерелятивистских инерциальных системах отсчёта (ИСО) приращение скоростей (импульсов), промежутки времени и силы являются инвариантами, поэтому при переходе из одной ИСО в другую все величины в (1) не изменятся.

**Столкновение в системе центра инерции.** Взаимодействие шаров проще всего рассматривать в системе отсчёта их центра инерции. Такую систему обозначают СЦИ или Ц-система. Скорость центра инерции группы тел определяется как суммарный импульс, отнесённый к суммарной массе

$$\vec{V}_y = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \vec{V}_0 + 0}{2m} = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

Так как суммарный импульс шаров при ударе сохраняется, то сохраняется и скорость центра инерции. Следовательно, систему отсчёта, связанную с центром инерции (СЦИ или Ц - систему), можно в течение удара считать инерциальной. Поэтому при переходе в Ц - систему все величины в (1) не изменятся. Однако в Ц - системе соударение шаров математически выглядит проще, чем в Л - системе.

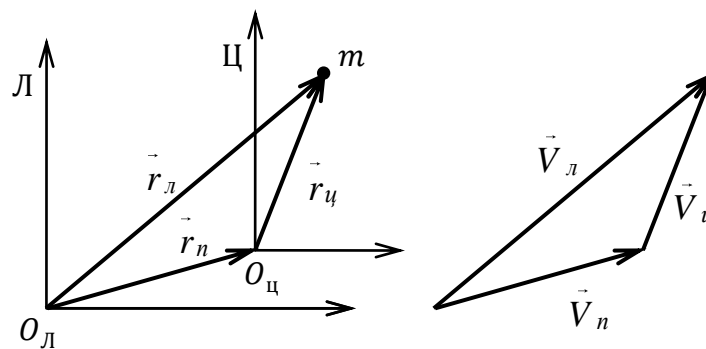


Рис. 1

Мгновенные радиусы - векторы материальной точки  $m$  в Л- и Ц- системах отсчёта  $\vec{r}_L$  и  $\vec{r}_C$  связаны через радиус-вектор переноса начала отсчёта  $\vec{r}_n$ , определяющий положение начала отсчёта Ц – системы в Л - системе (рис. 1):  $\vec{r}_L(t) = \vec{r}_C(t) + \vec{r}_n(t)$ . Продифференцировав это равенство по времени, получаем преобразование скоростей Галилея: скорость точки  $\vec{V}_C$  в движущейся Ц – системе равна разности скорости  $\vec{V}_L$  этой точки в неподвижной

Л - системе отсчёта и скорости переносного движения  $\vec{V}_n$  движущейся системы отсчёта относительно неподвижной:  $\vec{V}_u = \vec{V}_л - \vec{V}_n$ .

Переносная скорость для Ц – системы равна  $\vec{V}_n = \vec{V}_u = \frac{\vec{V}_0}{2}$ .

Применим эту формулу к каждому из шаров. Для первого шара до удара скорость в Ц - системе равна  $\vec{V}_{1u} = \vec{V}_0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = \frac{\vec{V}_0}{2}$ , а для второго шара

$\vec{V}_{2u} = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$ . Обозначим импульсы первого и второго шаров в СЦИ до

удара  $\vec{p}_{1u}$  и  $\vec{p}_{2u}$ , а после соударения  $\vec{p}'_{1u}$  и  $\vec{p}'_{2u}$  (здесь штрихи - не обозначения производных, а традиционные обозначения величин после удара):

$$\vec{p}_{1u} = m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \vec{p}_{2u} = -m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \text{т.е. } \vec{p}_{1u} = -\vec{p}_{2u}, \quad p_{1u} = p_{2u}$$

Следовательно, закон сохранения импульса в СЦИ имеет вид:

$$\vec{p}_{1u} + \vec{p}_{2u} = \vec{p}'_{1u} + \vec{p}'_{2u} = 0 \quad (2)$$

Отсюда  $p'_{1u} = p'_{2u}$ . Соотношение (2) можно доказать и в более общем случае неравных масс шаров. Оно имеет простой физический смысл: в системе отсчёта, связанной с центром инерции, сам центр инерции покоится.

Соударение называется *упругим*, если суммарная кинетическая энергия шаров не меняется. Реальное соударение можно считать упругим приближённо: часть энергии перейдёт в энергию необратимой деформации, затем в тепло. Для шаров из закалённого стекла потери кинетической энергии при ударе достигают 10%, для бильярдных шаров из слоновой кости - 20%, для стальных шаров могут превышать 50%.

Запишем закон сохранения кинетической энергии в СЦИ в приближении *абсолютно упругого удара* с учётом закона сохранения импульса (2):

$$\frac{p_{1y}^2}{2m} + \frac{p_{2y}^2}{2m} = 2 \frac{p_{1y}^2}{2m} = \frac{p_{1y}'^2}{2m} + \frac{p_{2y}'^2}{2m} = 2 \frac{p_{1y}'^2}{2m} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что длины всех векторов одинаковы

$$p_{1y} = p_{2y} = p_{1y}' = p_{2y}'$$

При ударе меняются только направления векторов. В верхней части рис. 2 показана диаграмма импульсов в СЦИ при абсолютно упругом центральном ударе. Ниже показаны изменения импульсов шаров при ударе.

Изменение импульса 1-го шара

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1y}' - \vec{p}_{2y}' = -m\vec{V}_0 = -\vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

одинаково в СЦИ и в лабораторной системе отсчёта. Таким образом, в Л – системе в результате мгновенного абсолютно упругого центрального удара первый шар остановится, а второй отскочит со скоростью  $\vec{V}_0$ .

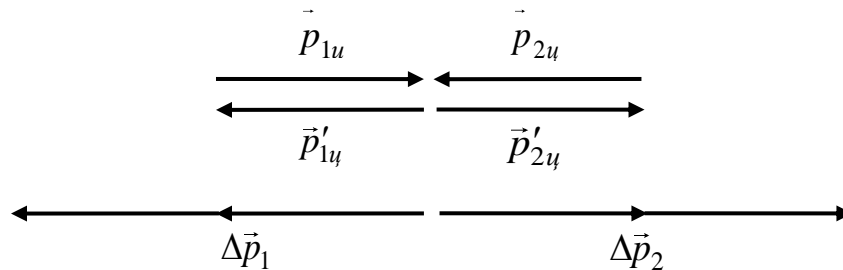


Рис. 2

**Преобразования энергии при столкновении.** Процесс упругого соударения шаров в СЦИ можно представить в виде двух последовательных этапов:

1) на первом этапе оба шара одновременно тормозятся и упруго деформируются, пока кинетическая энергия шаров полностью не перейдёт в энергию упругой деформации;

2) на втором этапе величина упругой деформации  $X$  уменьшается до нуля, энергия упругой деформации переходит в кинетическую энергию шаров.

Закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров имеет вид (кинетическая энергия 2-х шаров равна работе 2-х сил упругой деформации, действие которых и привело к полной остановке обоих шаров):

$$2 \frac{m(V_0/2)^2}{2} = 2 \frac{mV_0^2}{8} = 2 \cdot \int_0^{X_{\max}} F dx \quad (4)$$

где  $X_{\max}$  – максимальная величина продольной деформации, одинаковая для каждого из шаров. По определению средней величины  $\frac{1}{X_{\max}} \int_0^{X_{\max}} F dx = \langle F \rangle$ , где  $\langle F \rangle$  – средняя сила, действующая на отрезке от 0 до  $X_{\max}$ . Отсюда

$$\int_0^{X_{\max}} F dx = \langle F \rangle \cdot X_{\max} \text{ и средняя величина упругой силы}$$

$$\langle F \rangle = \frac{mV_0^2}{8X_{\max}} \quad (5)$$

Будем считать, что усреднённое по координате  $x$  на этом отрезке значение силы  $\langle F \rangle$  равно усредненному по времени соударения  $\bar{F}$ , которое входит в выражение (1). Подставляя в (1) выражение (5), получаем, что время соударения шаров

$$\tau = \frac{8X_{\max}}{V_0} \quad (6)$$

**Столкновение кубиков.** Из (6) следует, что  $\tau$  пропорционально  $X_{\max}$ . Для определения зависимости  $\tau$  от диаметра  $D$  необходимо найти зависимость  $X_{\max}$  от  $D$ . Для этого рассмотрим сначала грубую физическую модель, в которой шар диаметром  $D$  заменен телом кубической формы с ребром  $D$  (рис. 3).

Считаем, что при упругом соударении двух стальных кубов, когда при соударении соприкасающиеся грани идеально совпадают, справедлив закон Гука:

$$\frac{|\vec{F}_{12}(x)|}{S} = E \cdot \frac{x}{D} \quad (7)$$

- относительная продольная деформация  $x/D$  пропорциональна механическому напряжению  $|\vec{F}_{12}|/S$ . Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $S = D^2$  – площадь поперечного сечения деформируемого тела.

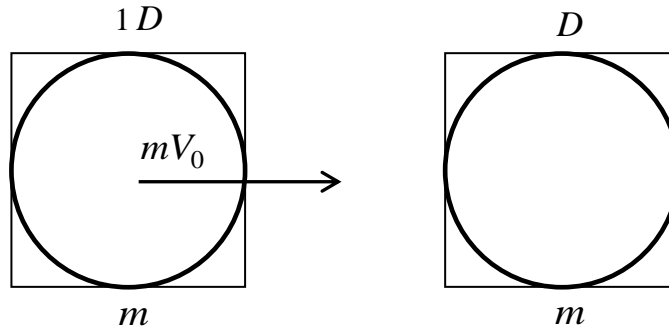


Рис.3

Тогда работа силы упругой деформации, действующей на один шар от начала соударения до максимальной деформации (что соответствует полной остановке шаров в СЦИ) есть

$$\int_0^{X_{\max}} F dx = \int_0^{X_{\max}} E \frac{S}{D} x dx = E \cdot D \frac{X_{\max}^2}{2}$$

Подставив это значение интеграла в (4), получим:

$$2 \frac{mV_0^2}{8} = 2E \cdot D \frac{X_{\max}^2}{2}$$

Отсюда  $X_{\max} = \sqrt{\frac{mV_0^2}{4E \cdot D}}$ . Так как  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot D^3$ , где  $\rho$  – плотность тела, а  $V = D^3$  – его объём, получаем:

$$X_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot V_0 D \quad (8)$$

где  $\rho$  - плотность стального куба. Подставляя найденное выражение для  $X_{\max}$  в формулу (6), для времени соударения кубических тел получаем



$$\tau = 4 \cdot \left( \frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot D, \quad (9)$$

т.е. время соударения пропорционально размеру куба.

**Столкновение шаров** (по указанию преподавателя). Закон Гука в виде (7) справедлив лишь для равномерно сжатого вдоль одного из рёбер прямоугольного параллелепипеда (или цилиндра). Для шара картина принципиально другая. В этом случае зависимость силы упругости  $F_{упр}$  от величины продольной деформации является нелинейной, потому что вместе с деформацией возрастает площадь контакта:

$$F_{упр} \approx 1,04 \cdot E \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что  $F_{упр}$  растёт быстрее, чем величина деформации; это случай так называемой системы с жесткой характеристикой.

В этом случае закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров можно записать так:

$$\begin{aligned} 2 \frac{mV_0^2}{8} &= 2 \cdot \int_0^{X_{\max}} F_{упр} \cdot dx = 2 \int_0^{X_{\max}} 1,04 \cdot E \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= 0,83 \cdot E \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot X_{\max}^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Учитывая, что  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \left( \frac{D}{2} \right)^3$ , для  $X_{\max}$  получаем

$$X_{\max} = 0,95 \cdot \left( \frac{\rho}{E} \right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{D}{2} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), получаем время соударения шаров:

$$\tau = 3,80 \cdot \left( \frac{\rho}{E} \right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{-\frac{1}{5}} \cdot D \quad (12)$$

Получается, что для стальных шаров в рамках модели системы с жёсткой характеристикой, так же, как и для тел кубической и цилиндрической

формы, максимальная величина продольной деформации  $X_{\max}$  пропорциональна размерам тел – диаметру  $D$ . То есть, обе модели приводят к линейной зависимости времени соударения стальных шаров от их диаметра:

$$\tau = A \cdot D \quad (13)$$

где  $A$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от  $\rho, E$  и  $V_0$  и формы сталкивающихся тел.

Именно эту теоретически полученную зависимость  $\tau$  от  $D$  необходимо подтвердить (или опровергнуть) экспериментально, измеряя время соударения шаров микро-секундомером. Значения диаметров шаров приведены в паспорте установки.

### 3. Задание к работе

1. Произведите измерения времени соударения для четырех пар шаров (по 3 измерения для каждой пары).
2. Результаты измерений и расчетов представьте в виде таблицы (показана часть таблицы для одного диаметра). В последнем столбце таблицы для каждого диаметра запишите доверительный интервал для времени соударения.

$D$	№	$\tau$	$ \tau_i - \bar{\tau} $	$(\tau_i - \bar{\tau})^2$		$\bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}}$
<i>мм</i>		<i>мкс</i>	<i>мкс</i>	<i>мкс<sup>2</sup></i>	<i>мкс</i>	<i>мкс</i>
21	1				$\bar{\tau} = \dots$	
	2				$s = \dots$	
	3				$\sigma_{\bar{\tau}} = \dots$	

3. Представьте зависимость времени соударения шаров  $\tau$  от их диаметра  $D$  в виде графика. К каждому из четырёх средних значений  $\bar{\tau}$  пристроить доверительный интервал  $\pm\sigma_{\bar{\tau}}$ , где

$$\sigma_{\bar{\tau}} = \frac{t(P, N) \cdot s}{\sqrt{N}} = \frac{4,3}{\sqrt{3}} \cdot s = 2,48 \cdot s, \quad P = 0,95$$

(схематично вид графика приведён на рис. 4).

4. Провести *регрессионную*, т.е. сглаживающую, прямую через все доверительные интервалы. Какая прямая соответствует теоретической зависимости (9), (12)? Существует ли такая прямая для ваших результатов измерений?

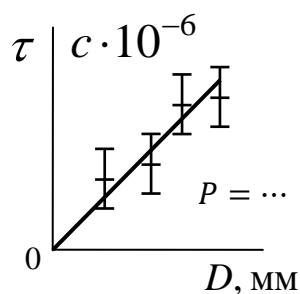


Рис. 4

#### 4. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?
2. Что такое центральный удар?
3. Как определяется время соударения шаров на основе 2-го закона Ньютона?
4. Действием каких сил пренебрегают при рассмотрении движения шаров на подвесе?
5. Какой удар можно приближённо считать мгновенным?
6. Когда можно применять закон сохранения импульса приближённо?
7. Какие силы изменяют суммарный импульс системы тел?

8. Как упругие силы взаимодействия шаров влияют на суммарный импульс шаров?

9. По формуле (1) и данным, приведённым в теории, оцените отношение силы упругой деформации шара к силе тяжести?

10. Почему при расчёте времени соударения мы можем перейти в другую инерциальную систему отсчёта?

11. Что такое система центра инерции?

12. При каком условии СЦИ можно считать инерциальной?

13. Чему равен суммарный импульс шаров в системе их центра инерции?

14. Что такое упругий удар? Какой закон выполняется при упругом ударе?

15. Изобразите диаграмму импульсов шаров в СЦИ. Покажите векторы изменения импульса каждого шара при ударе.

16. Какие этапы можно выделить в процессе упругого соударения?

17. Перечислите основные допущения, используемые при анализе соударения в системе центра инерции.

18. Исходя из начальных условий соударения в лабораторной системе отсчёта, **выведите** формулу для изменения импульсов шаров при ударе в СЦИ (по указанию преподавателя).

19. Исходя из закономерностей упругого удара в СЦИ, **выведите** зависимость  $\tau$  от  $D$  при соударении кубиков (по указанию преподавателя).

20. Что должно произойти с налетающим шаром в результате мгновенного абсолютно упругого центрального удара? Подтверждается ли это экспериментально?

#### Литература

Савельев И. В. Курс общей физики: - М.: Наука, год издания любой.