Лабораторный практикум по физике
Кафедра ПиТФ НГТУ

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ
часть 1

Многократные измерения времени соударения шаров

В лабораторной работе измеряется время соударения τ двух одинаковых стальных шаров.

Цель лабораторной работы: провести многократные измерения времени соударения шаров, исследовать статистическое распределение времени соударения (построить статистическую гистограмму, описать её).

Лабораторная установка. Измерительная установка включается кнопкой "Сеть" на передней панели цифрового микро-секундомера *МС*. Кнопку "Выбор работы" необходимо переключить в положение "Соударение шаров". Кнопка "Пуск" стирает предыдущее показание на индикаторе микро-секундомера и переводит его в готовность к следующему измерению. Шары 1 и 2 подвешены на тонких проводящих нитях (Рис. 1). Шар 1 отводят в сторону и помещают на Основание 3, при этом шар поднимается. Затем Основание 3 смещают, направление смещения показано стрелкой. Шар 1 срывается с Основания, сталкивается со вторым, свободно висевшим шаром, электрическая цепь через шары замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряется микро-секундомером и фиксируется на его индикаторе.

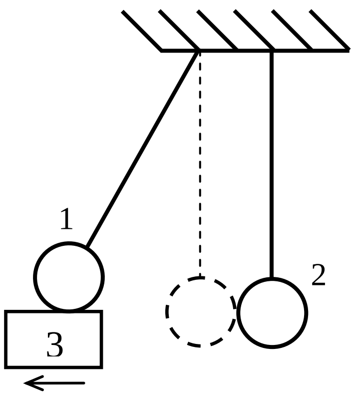

Рис. 1

Теоретически столкновение шаров изучается в приближении центрального удара, когда шары движутся вдоль линии, соединяющей их центры масс. *Поэтому в данной лабораторной работе необходимо обеспечить стабильность положения и относительной скорости шаров в момент удара.*

Для этого:

- отрегулировать длину проводов, так, чтобы центры висящих шаров располагались на одной высоте (смотреть на шары сбоку);
- разместить шары на проводах так, чтобы их центры располагались в вертикальной плоскости симметрии установки (смотреть на шары сверху);
- следить за тем, чтобы перед каждым ударом шар касался Основания 3 в одной и той же точке: если этого не сделать, то точка контакта шаров будет от удара к удару случайным образом смещаться по горизонтали;
- свободно висящий шар должен быть неподвижным перед каждым ударом.

Таблица измерений. Результаты многократных измерений следует представить в виде таблицы 1. Здесь № – порядковый номер измерения, τ – измеренное время соударения в микросекундах. В таблице 1 показаны строки только для первых 10 измерений. Здесь № – порядковый номер измерения, τ – измеренное время соударения в микросекундах. Другие обозначения будут разъяснены ниже. Заметим, что единицы измерения указываются (обязательно!) в отдельной (второй) строке. В третьем столбце будем указывать номер интервала при построении гистограммы.

В последующих лабораторных работах студент может самостоятельно выбрать форму таблицы измерений, например, записывать результаты по строкам или по столбцам, добавлять ячейки в таблицу для записи промежуточных и окончательных расчётов.

Таблица 1.

№	τ_i	№ инт	$\left\|\tau_i - \bar{\tau}\right\|$	$\left(\tau_i - \bar{\tau}\right)^2$	
	мкс или $10^{-6} c$		мкс или $10^{-6} c$	$10^{-12} c^2$	$10^{-6} c$
1 2 3 ⋮ 9 10					$\bar{\tau} =$ $s =$ $\sigma =$

<u>**Статистическая гистограмма (пример)**</u> – графический способ представления распределения большого числа данных.

Многократные измерения проводятся одно за другим, последовательно. Поэтому в таблице 1 результаты упорядочены по номеру измерения (не путать с длительностью соударения τ!). Нашей следующей задачей будет показать распределение результатов *по величине*. Однако привычный графический способ сравнения величин – нанести точки на числовую ось – становится не слишком наглядным, когда точек много.

Предположим, что произведено N измерений времени соударения шаров, как говорят, получена *выборка* N измерений (из *генеральной совокупности* бесконечного числа всех возможных результатов измерений). Среди измеренных значений есть $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$. Пусть, например, $\tau_{\min}$ = 110,6 мкс, $\tau_{\max}$ = 112,0 мкс. Разобьем промежуток $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ на k интервалов. Рекомендуется выбирать нечётное значение k, близкое к $\sqrt{N}$. При $N = 50$ возможные значения $k = 6,\ 7$ или 8. Выберем k = 7. Ширина интервала

$$b = (\tau_{\max} - \tau_{\min})/k$$

В нашем случае b = (112,0-110,6)/7 = 0,200 мкс. Следовательно, границами первого интервала будут $\tau_{\min}$ =110,60 *мкс* и $\tau_{\min} + b$ =110,80 *мкс*, границами второго - $\tau_{\min} + b$ =110,80 *мкс* и $\tau_{\min} + 2b$ =111,00 *мкс* и так далее.

Составим таблицу расчётов гистограммы (табл. 2). Здесь первый столбец – порядковый номер m интервала от 1 до k = 7. Второй и третий столбец – границы интервалов, левая и правая.

Таблица 2. $b = 0,20 мкс$.

m	Границы интервалов		N_m	Относительная частота $P_m = N_m / N$
	левая	правая		
	мкс	*мкс*		
1	110,60	110,80	4	0,08
2	110,80	111,00	10	0,20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$\tau_{\min} + 6b$	$\tau_{\max}$	2	0,04

В промежуточных расчётах необходимо брать 1-2 запасные значащие цифры по отношению к цене деления прибора. Цена деления микросекундомера 0,1 мкс, поэтому величину b следует округлять до 0,001 мкс, а границы интервалов до 0,01 мкс. Именно так в таблице 2 записаны численные значения границ первого интервала.

Подсчитаем число результатов измерений N_m из таблицы 1, попавших в каждый из m интервалов $(1 \le m \le 7)$. Удобно сделать это следующим образом. Рядом с каждым результатом в таблице 1 в третьем столбце укажем номер интервала, в который попал данный результат. Если результат измерения попал точно на границу, его следует относить всегда к левому, либо всегда к правому интервалу. Под это правило обязательно не будет подпадать одна точка – либо крайняя правая, либо крайняя левая. Однако такое единичное исключение из правила незначительно влияет на форму гистограммы, а с увеличением выборки это влияние уменьшается. Теперь число единичек в третьем столбце – это число результатов, попавших в первый интервал, число двоек – во второй и т. д..

Пусть, например, в 1-й интервал, между $\tau_{\min}$ и $\tau_{\min}+b$ попало 4 измерения, во 2-й - 10 и т.д. Запишем значения N_m в 4-й столбец таблицы 2. *При этом необходимо проверить, что сумма всех N_m равна полному числу измерений N.*

Подсчитаем *относительную частоту попадания* в m-й интервал $P_m = N_m / N$ для каждого интервала и запишем все их в 4-й столбец таблицы. Теоретически сумма всех частот равна единице:

$$P_1 + \ldots + P_7 = \frac{N_1}{N} + \ldots + \frac{N_7}{N} = \frac{N_1 + \ldots + N_7}{N} = 1$$

Мы все результаты измерений распределили по интервалам. Можно сказать, что вероятность попадания результата измерений в m-й интервал равна $P_m = N_m / N$, а в любой из k интервалов промежутка $[\tau_{min}; \tau_{max}]$ - равна единице. Поэтому относительную частоту P_m называют *эмпирической, т.е. опытной, вероятностью* попадания результата измерений в m-й интервал. Сумма округлённых эмпирических вероятностей может незначительно отличаться от единицы.

Построение гистограммы. Все графики в лабораторных работах строятся на миллиметровой бумаге. По горизонтали – ось измеряемой величины τ, по вертикали две оси: слева от гистограммы - ось N_m, количества измерений, попавших в m-й интервал, а справа от гистограммы – ось эмпирической вероятности $P_m = N_m / N$. На рис. 2 масштабы по осям выбраны для рассмотренного выше примера гистограммы.

Выбор масштабов. Масштабы следует выбирать:

a) простыми (0,1 ед/см; 0,5 ед/см и т.д..), чтобы при построении не производить сложных вычислений;
b) масштабы и нач**а**ла отсчёта по каждой оси должны быть такими, чтобы график занимал как можно б**о**льшую часть всего листа;
c) по осям проставляются только числовые отметки, кратные выбранному масштабу.

У осей должны быть проставлены обозначения и единицы измерения соответствующих величин.

Над каждым интервалом строим прямоугольник высотой N_m (ширина прямоугольника равна b).

Гистограмма, представляющая собой ступенчатый (столбчатый) график относительной частоты, наглядно показывает распределение результатов измерений.

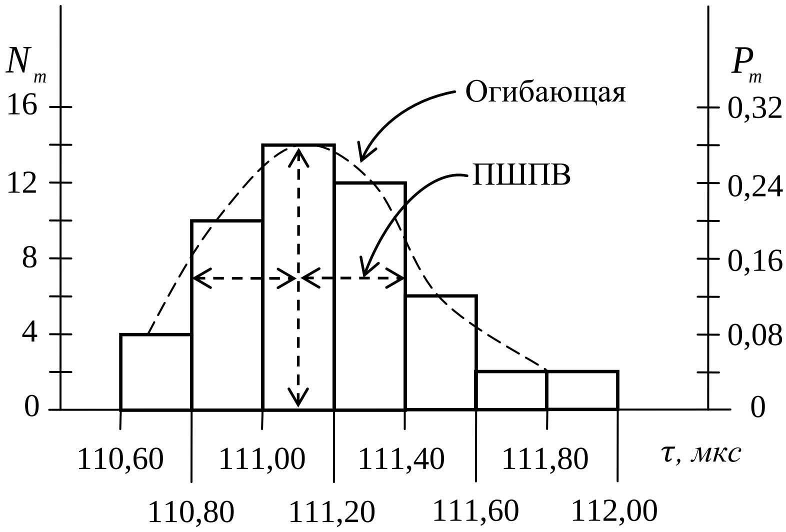

Рис. 2

<u>Обработка гистограммы</u> (предварительная). Необходимо графически определить полуширину гистограммы на полувысоте (ПШПВ), выборочное среднее результатов измерений $\bar{\tau}$ и выборочное среднеквадратичное отклонение σ_τ.

Для определения ПШПВ найдите на гистограмме столбец наибольшей высоты. Затем на уровне половины высоты проведите горизонтальную линию до пересечения с границами гистограммы. Половина этого отрезка между границами и есть полуширина на полувысоте. Определите величину ПШПВ в микросекундах по масштабу горизонтальной оси времени. Запишите это значение на миллиметровке.

Выборочное среднее результатов измерений определяют по формуле

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tau_i}{N}} \qquad (1)$$

Выборочное среднеквадратичное отклонение (СКО) определяется через сумму квадратов отклонений результатов измерений от среднего значения

$$\boxed{\sigma_\tau = \sqrt{\frac{\left(\tau_1 - \bar{\tau}\right)^2 + \left(\tau_2 - \bar{\tau}\right)^2 + \ldots + \left(\tau_N - \bar{\tau}\right)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tau_i - \bar{\tau}\right)^2}{N-1}}} \qquad (2)$$

Для трёх измерений расчёты могут быть произведены на простом калькуляторе. Однако для $N = 50$ попытка расчётов по формуле (2) «вручную» обречена на провал, т.к. слишком велика вероятность ошибки в расчётах. Необходимо использовать статистические функции инженерного электронного калькулятора или компьютерную программу «Статистический калькулятор», тогда столбцы $\left|\tau_i - \bar{\tau}\right|$ и $\left(\tau_i - \bar{\tau}\right)^2$ не понадобятся. На калькуляторе режим статистики обычно вызывается кнопкой «STAT» или σ. В этом режиме каждое значение выборки набирается на клавиатуре и затем вводится кнопкой «DATA» (ДАННЫЕ) или кнопкой «ADD» (ДОБАВИТЬ). После введения последнего значения следует нажать кнопку $\bar{x}$ и записать выборочное среднее значение, затем нажать кнопку σ_{n-1} (или s_{n-1}) и записать выборочное среднеквадратичное значение.

Задание к вводному занятию

1. Измерить время столкновения шаров $N = 50$ раз.
2. Построить гистограмму результатов измерений.
3. Обозначить полуширину на полувысоте (ПШПВ) гистограммы и рассчитать её величину в масштабе оси времени.
4. По формулам (1) и (2) рассчитать выборочные среднее $\bar{\tau}$ и среднеквадратичное отклонение σ_τ
5. Обозначить среднее $\bar{\tau}$ на горизонтальной оси времени.

Контрольные вопросы к вводному занятию

1. Какая величина откладывается по горизонтальной оси гистограммы?
2. Что такое ось количества измерений?
3. Как эмпирическая вероятность отображается на гистограмме?
4. Чему теоретически равна сумма всех эмпирических вероятностей?

Общие требования к выполнению лабораторных работ

Предварительная подготовка

1. Ознакомьтесь с теорией вопроса, изложенной в описании лабораторной работы и в указанной к ней литературе.
2. Найдите ответы на контрольные вопросы:
   a. каковы цели эксперимента;
   b. принцип действия измерительной установки;
   c. какие величины непосредственно измеряются, а какие вычисляются;
   d. какую зависимость вы должны получить теоретически и исследовать практически в процессе эксперимента.
3. **Заготовка протокола работы.** К началу лабораторного заготовьте титульный лист отчета о лабораторной работе, второй и третий листы отчёта – по образцу в [3].

- Второй лист обычно содержит цель работы, таблицы приборов, исходные данные и рабочие формулы.
- В таблице приборов обязательно должны быть указаны названия приборов. Характеристики приборов вносятся в таблицу после допуска к работе и включения установки.
- Рабочие формулы содержат два основных принципиально различных блока: теоретические зависимости, подлежащие исследованию в процессе эксперимента, и расчётные формулы, используемые при измерениях физических величин, входящих в исследуемые зависимости. Расчётные формулы содержат также формулы для определения погрешностей измеряемых величин.
- К началу занятия изобразите эскиз теоретических зависимостей с указанием единиц измерения величин, откладываемых по осям.
- На третьем листе расположите таблицу измерений.

4. На лабораторном занятии получите у преподавателя разрешение выполнять работу (допуск). Для этого необходимо:

   а) ответить на контрольные вопросы;

   б) уточнить объем измерений и форму таблицы измерений.

Оформление результатов лабораторных работ

1. В таблицу приборов для каждого прибора должны быть записаны наименование (например, вольтметр), тип (механический, электронный, цифровой), пределы измерений (в единицах измеряемой величины), цена деления (видимая – для цифрового прибора, расчётная – для стрелочного), класс точности прибора и максимальная приборная погрешность.
2. В таблицу измерений первичные данные следует заносить "как вижу", например, в виде числа делений без пересчета в другие единицы, чтобы исключить ошибки при снятии первичных данных. Для последующих

промежуточных расчетов рекомендуется предусмотреть в таблице одну или несколько позиций (столбцов).

3. Окончательное значение измеряемой величины записывают в виде доверительного интервала («Вводное занятие», часть 2).

Построение графиков

1. График строится на миллиметровой бумаге.
2. По горизонтальной оси обычно откладывают аргумент, а по вертикальной - его функцию. Для проверки теоретических зависимостей подбираются такие переменные, чтобы получить график в виде прямой линии, *линеаризуют* график (в большинстве последующих работ). Например, график функции $y = ax^2$ можно построить в переменных y, x^2 или $\sqrt{y}, x$.
3. У осей должны быть проставлены обозначения и единицы размерности соответствующих величин. При этом по оси ординат обозначение самой величины указывают слева от оси, а единицы размерности – справа, без скобок и запятой. По оси абсцисс обозначения самой величины и её размерности указываются под осью, через запятую, без скобок. Стрелки на осях экспериментальных графиков отсутствуют.
4. Масштабы по осям следует выбирать:
   a. простыми (0,1 ед/см; 0,5 ед/см и т.д..), чтобы при построении не производить сложных вычислений;
   b. масштабы и нач**а**ла отсчёта по каждой оси должны быть такими, чтобы график занимал как можно большую часть всего листа;
5. Размеры графика (гистограммы) по вертикали и по горизонтали должны относиться друг к другу примерно как 1:1 или 1:1,5, а экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.
6. По осям откладываются только масштабные единицы, а точки с координатами (x, y), полученными в эксперименте, наносятся на график. Более детально о построении графиков см. в [3].

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ
часть 2

Обработка результатов измерений

Цель работы: проверить гипотезу о нормальном распределении времени соударения шаров, при необходимости провести цензурирование выборки, записать доверительные интервалы для времени соударения.

Основные понятия теории измерений. *В этом разделе измеряемая величина обозначена буквой* x. Целью измерений является получение количественной информации об измеряемой физической величине, об её истинном значении $x_{ист}$. В метрологической практике истинным для данного измерительного прибора считают значение, измеренное более точным прибором.

Из-за множества причин измеренное значение x может не совпадать с $x_{ист}$. Следовательно, любые результаты измерений дают нам не точное значение $x_{ист}$, а лишь его оценку.

Меры погрешности. *Абсолютная погрешность* Δ (другие обозначения - Δx или Δ_x) - это отклонение измеренного значения от истинного

$$\Delta = x - x_{ист}$$

В единичном измерении Δ может быть как положительной, так и отрицательной.

Необходимо различать термины *абсолютная погрешность и абсолютное значение погрешности,* т.к. абсолютное значение погрешности - значение погрешности без учёта её знака (модуль погрешности)

$$\Delta_{абс} = |\Delta| = |x - x_{ист}|.$$

Относительная погрешность δ (другие обозначения – δx или δ_x) - это отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{ист}} \approx \frac{\Delta}{x} \quad \text{или} \quad \delta(\%) = \frac{\Delta}{x_{ист}} 100\% \qquad (3)$$

Виды погрешности. По характеру изменения и причинам возникновения погрешности можно разбить на три класса: *систематические, случайные и грубые (промахи, выбросы).*

Систематические погрешности Δ_C (causal - причинный) постоянны для всей серии измерений или определённым образом зависят от условий измерения (времени, координаты, силы тока и т.п.). Причинами возникновения систематических погрешностей являются:

- отклонение параметров реального средства измерений от расчётных значений, например, погрешность калибровки микро-секундомера; постоянная разность в высоте подвеса шаров; сдвиг шкалы стрелочного прибора (в других лабораторных работах);
- влияние не учитываемых факторов, например, посторонней засветки при фотометрических измерениях в оптике.

Обнаружение и учёт систематических погрешностей, устранение причин их возникновения – сложная метрологическая задача.

Случайные погрешности Δ_O (occasional - случайный), непредсказуемо изменяющиеся по величине и знаку от измерения к измерению, возникают в результате действия большого числа независимых неконтролируемых или недостаточно изученных причин. Вследствие этого при постоянных условиях многократных наблюдений одной и той же величины обнаруживается разброс результатов наблюдений. Случайную погрешность, вызванную микроскопическими явлениями, например, тепловым движением молекул, можно в какой-то степени уменьшить, но полностью устранить нельзя. К случайному разбросу также приводит и действие большого числа независимо изменяющихся макроскопических причин. Такой разброс, аналогично систематическим погрешностям, можно уменьшить или устранить, расширяя число контролируемых условий и стабилизируя их.

Одним из основных признаков, по которому изменения измеряемой величины относят к систематическим или случайным, является скорость изменения. Если причина, вызывающая погрешность, изменяется медленно или тем более постоянна, её закономерность может быть выявлена измерениями. Быстрые изменения, не измеримые данным прибором, приводят к непредсказуемым отклонениям результатов измерений. С ростом быстродействия средств измерения переменные погрешности из случайных переходят в разряд систематических.

Грубые погрешности (промахи, выбросы) – аномально большие отклонения результата измерения, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Грубые погрешности возникают при резком однократном кратковременном изменении условий измерения (скачок напряжения в сети), а также из-за однократной ошибки экспериментатора в расчётах или при считывании показаний прибора. Грубые погрешности обнаруживают с помощью статистических критериев. Результаты, содержащие грубые погрешности, отбрасывают. Такой пример будет рассмотрен ниже.

Теоретическая плотность вероятности. При построении гистограммы (см. «Вводное занятие, часть 1», рис. 2) эмпирические вероятности $P_m = N_m / N$ зависят от ширины интервала b, что может вызывать затруднения при сравнении гистограмм. Поэтому в математической статистике чаще используют вероятность, приходящуюся на единичный интервал изменения x, называемую *плотностью распределения вероятностей* или просто *плотностью вероятностей*

$$p = \frac{N_m}{Nb}$$

Если все высоты прямоугольников в гистограмме разделить на ширину интервала b, изменится только вертикальный масштаб гистограммы.

Рассмотрим поведение гистограммы, когда число измерений неограниченно возрастает, следовательно, растёт плотность расположения точек на числовой оси x. Поэтому величину b можно уменьшать, всё равно точки в каждый интервал попадут. Огибающая такой преобразованной гистограммы при $N \to \infty$ и $b \to 0$ (обозначим $b = dx \to 0$) перейдет в плавную кривую $p(x)$:

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ b\to 0}} \frac{N_m / N}{b} = p(x) = \frac{p(x)dx}{dx}$$

Отсюда видно, что относительная частота или эмпирическая вероятность $P_m = N_m / N$ переходит в $p(x) \cdot dx$ - вероятность попадания результата в интервал $x, x + dx$. Графически это площадь бесконечно узкого прямоугольника со сторонами $p(x)$ и dx (заштрихован на рис. 3). Термин "площадь" в теории функций понимается шире, чем в геометрии: стороны прямоугольника не обязательно измеряются в метрах. Так, в данной работе величина x, а также dx, τ и b измеряются в секундах, а размерность $[p(x)] = 1/[x]$, поэтому площадь $p(x) \cdot dx$ безразмерна.

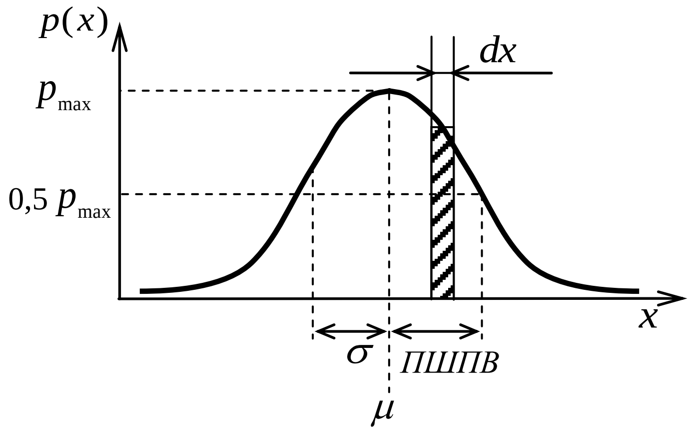

Рис. 3

Вероятность $P(x_1, x_2)$ попадания результата в конечный интервал $[x_1, x_2]$ находят интегрированием плотности распределения:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Она численно равна площади под кривой $p(x)$ на соответствующем интервале $[x_1, x_2]$. Полная площадь под кривой $p(x)$ равна единице как вероятность достоверного события: в какой-то из интервалов результат измерения обязательно попадёт.

В реальных физических экспериментах результат измерений часто определяется суммой не зависящих друг от друга факторов, каждый из которых вносит в сумму незначительный вклад. В пределе сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых принимает значения, распределённые по так называемому *нормальному закону* (*распределению Гаусса*):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4)$$

Это замечательное распределение обладает следующими свойствами (рис. 4):

1. существует наиболее вероятное значение x, *мода* распределения:

   $$x(p = p_{max}) = \mu\,;$$

2. отклонения x от μ в обе стороны встречаются одинаково часто: гауссово распределение симметрично относительно μ, поэтому среднее значение $\bar{x}$ равно μ;
3. чем больше отклонение x от μ, тем реже оно встречается;
4. мерой случайной погрешности, т.е. мерой отклонения x от центра распределения μ является "сигма" σ – *стандартное* или *среднеквадратичное отклонение (СКО)*, которое примерно равно 1,18 полуширины на полувысоте (*ПШПВ*) гауссова распределения (Англоязычный аналог этого термина *HWHH* – half width on half height):

   $$ПШПВ \approx 1{,}18\sigma.$$

5. При $\sigma \to 0$ всё распределение "стягивается" к одному значению $x = \mu$ (рис. 4), которое в отсутствие систематической погрешности и принимается за истинное значение $x_{ист.}$. Следовательно, с точки зрения математической статистики, *целью измерений является определение координаты центра распределения* $\mu = x_{ист}$;
6. В интервал $\pm\sigma$ вокруг μ попадает примерно 68 % всех результатов измерений (рис. 5). Т.е. «расстояние» между неизвестным центром

распределения μ и любым взятым «наугад» результатом измерения x_i $(i = 1 \div N)$ не превышает σ с вероятностью $P = 0,68$:

$$|x_k - \mu| \le \sigma; \quad P \approx 0,68 \tag{5}$$

7. В интервал $\pm 2\sigma$ вокруг центра попадает примерно 95 % всех результатов измерений, следовательно, расстояние между неизвестным центром распределения μ и любым результатом измерения x_i $(i = 1 \div N)$ не превышает 2σ с вероятностью $P = 0,95$:

$$|x_k - \mu| \le 2\sigma; \quad P \approx 0,95, \tag{6}$$

а в интервале $\pm 3\sigma$ (его также называют шестисигмовым интервалом [4]) заключено 99,73 % всех результатов

$$|x_k - \mu| \le 3\sigma; \quad P \approx 0,9973 \tag{7}$$

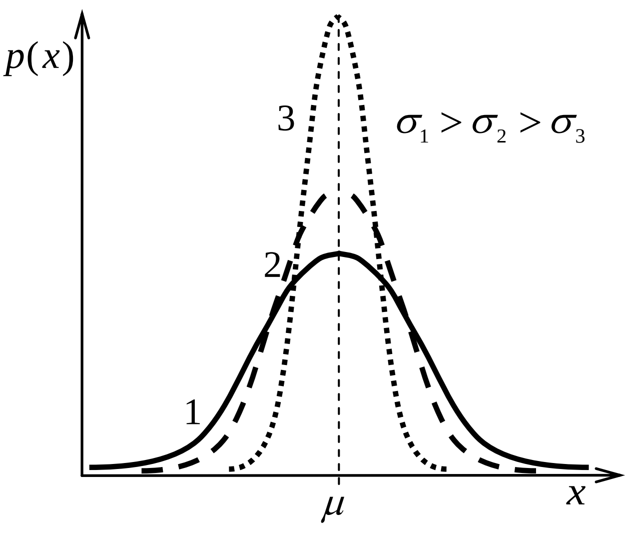

Рис. 4

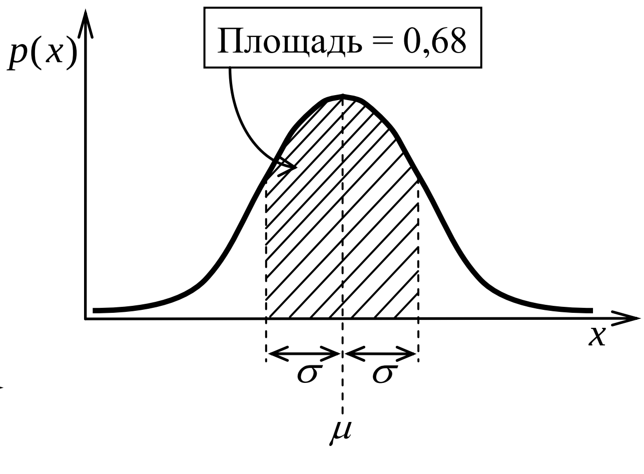

Рис. 5

<u>**Расчёт среднего и СКО.**</u> Расчётной оценкой моды μ нормального распределения является *выборочное среднее* $\bar{x}$ (формула (1) Части 1 Вводного занятия). Среднее значение случайной величины x называют *математическим ожиданием*. Таким образом, выборочное среднее – оценка математического ожидания.

Оценкой случайной погрешности σ является *выборочное среднеквадратичное отклонение* (СКО) s (формула (2) Части 1 Вводного занятия).

Анализ гистограммы (по указанию преподавателя). На рис. 6 показана последовательность получения общего результата измерений. Этапы "Построение гистограммы" и "Расчёт среднего и СКО" независимы, могут выполняться параллельно. Их результаты используются при проверке нормальности распределения.

Возможно удаление грубых погрешностей из выборки с повторением первых этапов.

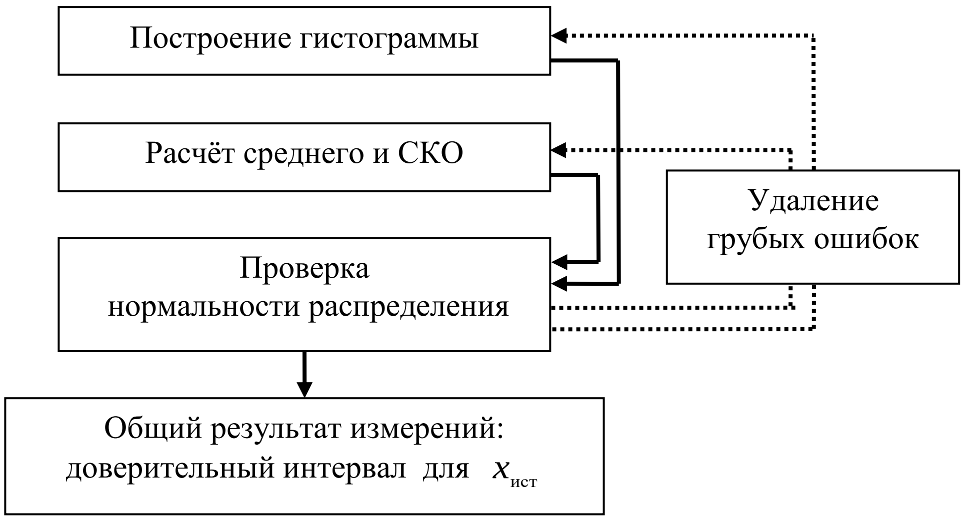

Рис. 6

Проверка нормальности распределения (по указанию преподавателя). Проверка нормальности распределения – важный этап статистического анализа данных. *Формулы* (1),(2) *для оценки моды и СКО применимы только к нормальному распределению*. Если выборка не принадлежит нормальной генеральной совокупности, то, вообще говоря, использовать формулы (1, 2) некорректно.

Мы проведём простейшую оценку нормальности распределения по двум критериям:

- по форме гистограммы
- по отношению ПШПВ гистограммы и выборочной СКО.

Форма гистограммы: если огибающая гистограммы симметрична и колоколообразна, пусть даже приближённо, как на рис. 2, - это один из признаков нормального распределения результатов измерений.

Отношение ПШПВ $/\sigma$: если отношение близко к единице, а именно, лежит в пределах 0,7÷1,5, это тоже признак нормального распределения.

Если выполняются оба признака, то результаты измерений подчиняются нормальному закону, как говорят, нормальное распределение не отвергается. Можно переходить к расчёту общего результата измерений – доверительного интервала.

Если один из признаков отсутствует – нормальное распределение сомнительно. Если не выполняются оба признака – нормальное распределение, как говорят, отвергается. Следует искать причину анормальности результатов.

Например, если гистограмма бимодальна, т.е. имеет два максимума (рис. 7), то наиболее вероятная причина - однократное постоянное по величине изменение условий измерения.

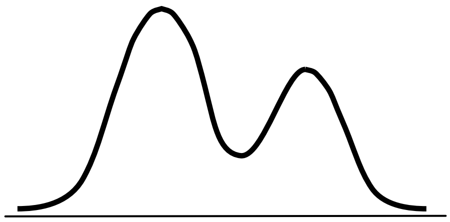

Рис. 7

Примеры:

1. "Один раз уронили микроскоп и продолжили измерения, не проверив его настройку";
2. В измерениях времени соударения шаров сдвинули Основание (опору шара) в сторону;
3. Включили освещение в комнате во время серии фотометрических измерений.

Наши критерии просты, но приближённы. Математически более сложный, но и более достоверный анализ, например, по критерию χ^2 - "хи-квадрат", в случаях, признанных нами сомнительными, может как подтвердить нормальность, так и отвергнуть.

<u>Грубая погрешность</u> (по указанию преподавателя). Иногда на гистограмме есть крайний изолированный прямоугольник, содержащий всего одно значение, обязательно минимальное или максимальное (рис. 8).

Возможно, аномально отклоняющееся значение является грубой ошибкой. Проверить это можно с помощью *правила трёх сигм*. По свойствам нормального распределения в шестисигмовый интервал попадает 99,73% всех нормально распределённых результатов. На долю отклонений от центра распределения, превышающих 3σ, приходится всего $0,27\% < 1/300$ от общего числа измерений. Поэтому достоверные сильно отклоняющиеся значения могут появиться при $N >$ 300 ÷ 1000, а при N = 50 они крайне маловероятны. Зато велика вероятность ошибочной записи одного из 50 чисел или сбоя микро-секундомера.

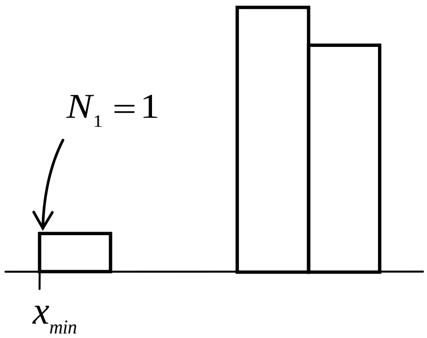

Рис. 8а

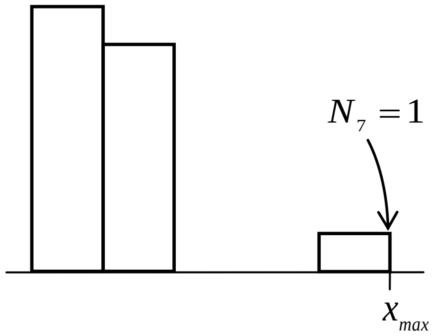

Рис. 8б

Чтобы проверить, является ли измеренное значение аномальным, на горизонтальной оси гистограммы от среднего значения $\bar{x}$ откладываем интервал 3×ПШПВ (рис. 9). Если аномальное значение отклоняется от $\bar{x}$ больше, чем на 3×ПШПВ, как на рис. 9, его следует считать грубой ошибкой, удалить из выборки (*зачеркнуть, а не замазать!*), и, найдя новое крайнее значение τ, *повторить построение гистограммы*. Такая операция называется *цензурированием выборки* и может выполняться в цикле несколько раз, пока не останутся значения, лежащие в пределах 3×ПШПВ.

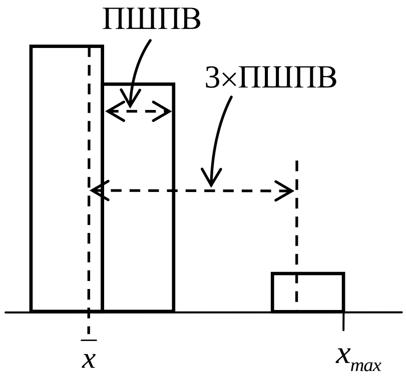

Рис. 9

Общий результат измерений – доверительный интервал

Расчёт общего результата измерений зависит от вида измерений, которые подразделяют на прямые и косвенные, однократные и многократные (табл. 3).

Прямое измерение — это измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных, как, например, при измерении массы на циферблатных весах, температуры термометром, электрического напряжения стрелочным или цифровым вольтметром. С помощью цифрового микро-секундомера на вводном занятии осуществляется прямое измерение интервала времени.

Табл. 3

Измерения	
прямые	однократные
косвенные	многократные

Прямое однократное измерение

! *Сведения, изложенные в этом разделе, необходимы для записи результатов всех последующих лабораторных работ.*

Возможна оценка истинного значения $x_{ист}$ по результату однократного измерения x_1, если предварительно на данной измерительной установке в одинаковых условиях проведены многократные измерения ($N > 30$), в результате чего СКО σ определено с высокой точностью.

Используем шестое свойство нормального распределения (см. рис. 5): чем шире интервал вокруг центра распределения μ, тем больше результатов измерений в этом интервале. Формулу (5) можно обратить относительно неизвестного центра μ: с вероятностью $P = 0,68$ центр распределения удалён от любого единичного результата измерений x_1 на расстояние, не превышающее σ. Это условие записывают в виде *доверительного интервала* для истинного значения измеряемой величины

$$x_{ист} \equiv \mu = x_1 \pm \sigma; \qquad P = 0,68 \tag{8}$$

Аналогично на основе (6), (7) можно записать доверительные интервалы $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$:

$$x_{ист} \equiv \mu = x_1 \pm 2\sigma; \quad P \approx 0,95 \tag{9}$$

$$x_{ист} \equiv \mu = x_1 \pm 3\sigma; \quad P \approx 0,9973 \tag{10}$$

Все три варианта доверительного интервала показаны на рис. 10, причём отрезки σ и кратные ему изображены в масштабе числовой оси измеряемой величины x.

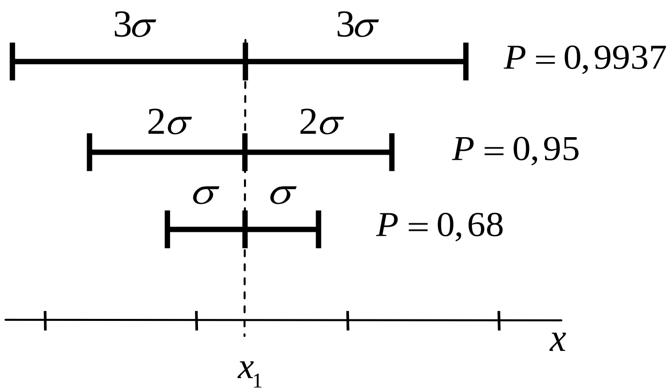

Рис. 10

Вероятность P, с какой истинное значение измеряемой величины может находиться в выбранном доверительном интервале, называется *доверительной вероятностью. Запись доверительного интервала без указания доверительной вероятности неполна.*

Доверительные интервалы (8) - (10) для однократного измерения можно объединить в общую формулу с коэффициентом $t(P)$ при σ:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{ист} = x_1 \pm t(P)\cdot\sigma; \quad P = \ldots \\ P = 0,68; \qquad t = 1 \\ \boldsymbol{P} = 0,95; \qquad \boldsymbol{t} = 2 \\ P = 0,9973; \quad t = 3 \end{array}} \tag{11}$$

Чем больше доверительная вероятность, тем шире соответствующий ей доверительный интервал вокруг измеренного значения, тем больше коэффициент $t(P)$.

По таблицам в [2, 3] можно выбрать значения P, отличающиеся от приведённых в (11), и соответствующие им значения $t(P)$.

Метрологические нормативные документы рекомендуют записывать результат измерений для $P \geq$ 0,9. Поэтому проще всего выбрать доверительный интервал $\pm 2\sigma$ для $P = 0{,}95$.

Допустима форма записи доверительного интервала в виде:

$$x_1 - t(P) \cdot \sigma \leq x_{ист} \leq x_1 + t(P) \cdot \sigma; \qquad P = \ldots$$

Среднеквадратичные отклонения измеряемых величин и исходных данных указаны на пояснительных табличках к каждой лабораторной работе.

Если погрешность прямого измерения не указана, она определяется, исходя из погрешностей измерительных приборов:

1. Прибор с штриховой шкалой. Принято считать, что для шкалы с интервалом между штрихами 1 мм, рассматриваемой с расстояния наилучшего зрения 250 мм, погрешность отсчета равна 0,3 ÷ 0,5 цены деления $C_{дел}$. Т.е. в единицах измеряемой величины $\sigma = (0{,}3 \div 0{,}5)\, C_{дел}$.
2. Погрешность цифрового прибора принимаем равной единице последнего разряда.
3. В более сложных способах оценки погрешности учитываются классы точности приборов разных типов (механических, электронных, цифровых).

Прямые многократные измерения

Если погрешность прибора неизвестна, то по единичному измерению невозможно определить доверительный интервал измеряемой величины. В таком случае необходимо проводить многократные, повторяющиеся в неизменной экспериментальной обстановке, измерения. Этот метод и используется в большинстве лабораторных работ курса физики.

С увеличением числа измерений выборочное среднее (1) приближается к моде нормального распределения, а выборочное СКО (2) стремится к σ:

$$\bar{x} \to \mu; \quad s \to \sigma$$

Поэтому, казалось бы, можно по аналогии с (11) записать доверительный интервал

$$x_{ucm} = \bar{x} \pm t(P) \cdot s\,; \quad P = \ldots$$

Однако при любом конечном числе измерений выборочное СКО может оказаться как больше, так и меньше неизвестного σ. Второй случай – самый опасный: при подстановке s вместо σ преуменьшается ширина доверительного интервала, расчётная погрешность оказывается меньше истинной. Вот почему иногда используют упоминавшийся выше способ округления погрешности в большую сторону.

Таблица 4

N	P				
	0,68	0,9	**0,95**	0,99	0,997
	$t(P,N)$				
2	1,84	6,3	**12,7**	63,6	212,3
3	1,32	2,9	**4,3**	9,9	182
4	1,20	2,4	**3,2**	5,8	9,0
5	1,14	2,1	**2,8**	4,6	6,4
10	1,06	1,8	**2,3**	3,2	4,0
15	1,04	1,8	**2,1**	3,0	3,6
20	1,03	1,7	**2,1**	2,9	3,4
30	1,02	1,7	**2,0**	2,8	3,2
50	1,01	1,7	**2,0**	2,7	3,1

Заданную доверительную вероятность обеспечивают, расширяя интервал путём замены коэффициентов $t(P)$ на коэффициенты Стьюдента (табл. 4) $t\left(P,N\right) > t(P)$. Из таблицы видно, что, например, $t\left(P = 0,95; N\right) \approx t(P)$ только при $N \geq 30$, т.е. только при таком большом числе измерений выборочное СКО s незначительно отличается от σ - СКО генеральной совокупности с бесконечным числом измерений.

С другой стороны, для сужения интервала, т.е. для уточнения оценки $x_{ист}$, используют свойство среднего значения: выборочное среднее $\bar{x}$ в (1) зависит от суммы случайных нормально распределённых результатов измерений x_k и потому само является случайной нормально распределённой величиной со среднеквадратичным отклонением среднего $\sigma_{\bar{x}}$.

В математической статистике доказывается, что если результаты измерений не зависят друг от друга, то СКО выборочного среднего

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

То есть, проведя 50 измерений, можно сузить доверительный интервал (фактически уменьшить погрешность измерений более чем в семь раз)!

В общем случае точное значение σ неизвестно, однако при большом числе измерений $\sigma \approx s$, поэтому

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Видно, что отклонение $\bar{x}$ от μ при больших N уменьшается как $1/\sqrt{N}$. Это означает, что, хотя от измерения к измерению единичные результаты "прыгают" в среднем на σ, разброс выборочных средних от выборки к выборке по N случайных измерений уменьшается с ростом N, что и позволяет сузить доверительный интервал, проводя многократные измерения. Уменьшение случайного разброса путём усреднения многократных измерений широко используется в цифровых приборах.

Используя коэффициенты Стьюдента и переходя к выборочному СКО среднего значения, окончательно запишем погрешность измерений и доверительный интервал для результата многократных измерений

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{t(P,N)\cdot s}{\sqrt{N}}; \quad P = \ldots}; \qquad \boxed{x_{ист} = \bar{x} \pm \frac{t(P,N)\cdot s}{\sqrt{N}}; \quad P = \ldots} \qquad (12)$$

В частности, запишем доверительный интервал для трёх измерений, подставив из таблицы 4 коэффициент Стьюдента $t(0,95;3)$ = 4,3:

$$\boxed{x_{ист} = \bar{x} \pm \frac{4,3 \cdot s}{\sqrt{3}} \approx \bar{x} \pm 2,48 \cdot s; \quad P = 0,95} \tag{13}$$

Эту формулу можно использовать во многих последующих лабораторных работах.

Важным свойством нормального распределения является вложенность доверительных интервалов: интервал для большего числа измерений целиком вложен в доверительный интервал для меньшего числа измерений (рис. 11). Для анормально распределённых результатов, как, например, на рис. 8, вложенность может нарушаться. Это обстоятельство можно использовать в качестве дополнительной проверки нормальности распределения.

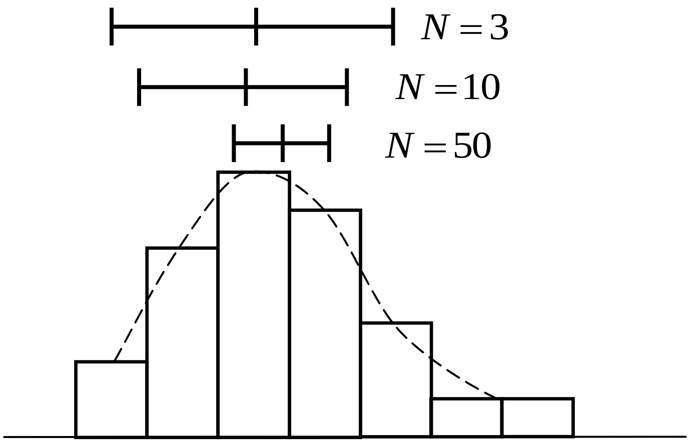

Рис. 11

<u>Округление доверительного интервала</u>

Сначала округляют величину погрешности, а затем – центр доверительного интервала.

В соответствии с нормативными рекомендациями [1] погрешность измерений необходимо выражать числом с одной или двумя значащими цифрами.

Значащие цифры - все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа (Рис. 12).

Примеры:

а) Число 12,0 имеет три значащие цифры;

б) Число 120 имеет три значащие цифры;

в) 0,514 имеет три значащие цифры;

г) 0,0056 имеет две значащие цифры.

$$0,\overbrace{0\underbrace{24050}_{\text{Значащие цифры}}}^{\text{Десятичные разряды}}$$

Рис. 12

Результаты промежуточных расчётов округляют до 4-х значащих цифр, чтобы избежать влияния этого округления на конечное значение погрешности, записываемой с 1-2 значащими цифрами.

Арифметическое правило округления: Если первая отбрасываемая цифра ≥ 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу [2].

Этого правила недостаточно для обеспечения малой относительной погрешности округления. Например, округление числа 1,49 до одной значащей цифры, т.е. до 1, даст потерю точности вследствие большой ошибки округления: (1,49 – 1) /1,49 = 0,33 = 33 %. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т. е. указание 0,94 вместо 0,9, может, наоборот, явиться превышением точности, т.е. дезинформацией, так как исходные данные могут и не обеспечивать погрешность расчёта, равную (0,9-0,94)/0,94 ≈ 0,043 ≈ 4 %.

Дополнительное правило округления: На практике для уменьшения относительной погрешности округления было выработано следующее эмпирическое (проверенное опытом) правило: если первая значащая цифра числа, выражающего погрешность измерений, равна 1 или 2, то в нём сохраняют две значащие цифры, если же первая значащая цифра числа равна или больше 3, то сохраняется лишь одна значащая цифра.

С этим правилом согласуются нормируемые значения относительных погрешностей и связанных с ними классов точности средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 % указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6 % указывается лишь одна значащая цифра.

В результате совместного применения арифметического и эмпирического правил погрешность округления погрешности измерений лежит в пределах ± 3,5 %.

Существует альтернативный эмпирический метод округления: погрешность, задаваемую двумя значащими цифрами, округлять всегда в бо́льшую сторону. Достоинством такого метода является то, что погрешность не преуменьшается, недостатком – погрешность округления может достигать 8 %. Пример: округление 1,11 до 1,2. Относительная погрешность такого округления равна (1,2 – 1,11) / 1,11 ≈ 0,08.

Округление центра доверительного интервала: численное значение центра доверительного интервала должно иметь последнюю значащую цифру того же разряда, как и последняя значащая цифра округлённого значения погрешности.

Примеры

а) Правильно: 1,70 ± 0,03. Неправильно: 1,7 ± 0,03 или 1,700 ± 0,03.

б) Правильно: 1,213 ± 0,017. Неправильно: 1,21 ± 0,02

Числовые значения величины и её погрешности следует записывать с указанием одной и той же единицы измерения.

Например: (8,536 ± 0,007) кг.

Экспоненциальная запись числа в десятичной системе

$$N = M \cdot 10^{p}$$

N – записываемое число; M – *мантисса* числа N;

10 – *основание* показательной функции;

p – *показатель степени* (целое, может быть отрицательным);

10^{p} – *характеристика числа* N.

Число 352,68 может быть представлено в экспоненциальной форме разными способами, например: $0{,}35268 \cdot 10^3$; $3{,}5268 \cdot 10^2$; $35{,}268 \cdot 10$.

В стандартной форме экспоненциальной записи мантисса должна быть в пределах от единицы до 10: $1 \le M < 10$

Следовательно, стандартное представление числа 352,68 есть $3{,}5268 \cdot 10^2$.

В экспоненциальной форме обычно задаются основные физические постоянные, например, элементарный заряд $e = 1{,}6021 \cdot 10^{19}$ Кл; скорость света в вакууме $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ мс$^{-1}$.

Задание по обработке результатов измерений

Использовать результаты многократных ($N = 50$) измерений времени соударения шаров с вычисленными по ним средним значением времени соударений $\bar{\tau}$ и среднеквадратичным отклонением σ_τ, а также построенную по результатам гистограмму, на которой обозначены $\bar{\tau}$ и полуширина на полувысоте (ПШПВ).

1) По гистограмме провести, если необходимо, цензурирование выборки – см. выше раздел «Грубая погрешность» (по заданию преподавателя)
2) Найти отношение ПШПВ к СКО для $N = 50$ или для $N = 49$, если выборка цензурирована.
3) Нарисовать огибающую гистограммы (штриховая кривая на рис. 2 и на рис. 11). По форме гистограммы и по отношению ПШПВ к СКО сделать вывод, подтверждается или нет нормальное распределение результатов измерений.
4) Записать доверительный интервал для моды многократных измерений времени соударения шаров по формуле (12) для доверительной вероятности $P = 0{,}95$, используя таблицу 4,

   для $N = 50$ ($N = 49$);

   для $N = 3$ - выбрать любые три измерения, отметьте их в таблице измерений;

   для $N = 10$ - любые 10 измерений, отметьте их в таблице измерений.
5) Изобразить на гистограмме полученные доверительные интервалы в виде отрезков, "привязав" их к оси времени (показаны на рис. 11).

6) Сделать вывод о связи числа измерений с точностью определения истинного значения измеряемой величины.

Контрольные вопросы по обработке результатов измерений

1) Дайте определение погрешности: абсолютной, относительной, систематической, случайной, грубой.
2) Как по функции плотности вероятности графически определить вероятность попадания результата измерений в интервал $[x,\ x+dx]$?
3) Чему равна полная площадь под кривой функции плотности вероятности?
4) Запишите функцию нормального распределения, нарисуйте её график и укажите на графике её характерные параметры: а) моду случайной величины; б) математическое ожидание случайной величины; в) ПШПВ и СКО.
5) Напишите формулу наилучшей выборочной оценки а) моды случайной величины; б) среднеквадратичного отклонения?
6) Как изменится график функции нормального распределения, если случайная погрешность измерений уменьшится?
7) Определение какой величины является целью измерений при наличии случайной погрешности?
8) Чему равна площадь под графиком нормального распределения в пределах а) $\pm\sigma$ вокруг моды; б) в пределах $\pm 2\sigma$; в) в пределах $\pm 3\sigma$?
9) Что такое правило трёх сигм (дополнительный вопрос)?
10) В прямом однократном измерении получен результат x. СКО измерительного прибора σ. Напишите формулу доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины при а) $P = 0,68$; б) $P = 0,95$. Что означает равенство $P = 0,68$ или $P = 0,95$?

11) Что такое среднеквадратичное отклонение среднего значения многократных измерений и как оно изменяется с увеличением числа измерений?

12) В трёхкратном измерении были получены значения выборочного среднего $\bar{x}_3$ и выборочного СКО s_3. Запишите формулу доверительного интервала при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Список литературы

1) МИ 1317-2004. – Рекомендация «Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления.» - Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС). – Москва, 2004.
2) СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления. - М.: Изд-во стандартов, 1977.
3) Холявко В.Н. и др. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.
4) Джиджи К., Де Карло Н., Вильямс Б. Шесть сигм для "чайников". – М.: ООО "Вильямс", 2008.