Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. ХОЛЯВКО, В.Ф. КИМ, И.Б. ФОРМУСАТИК,
А.П. БУРИЧЕНКО, И.И. СУХАНОВ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

АНАЛИЗ, ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Утверждено
Редакционно-издательским
Советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРК
2004

УДК
Х

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Баранов,
доктор физ.-мат. наук, проф. В.Г. Дубровский

Работа подготовлена на кафедре прикладной и теоретической физики
для студентов всех специальностей всех форм обучения

В.Н Холявко, В.Ф. Ким, И.Б. Формусатик, А.Б. Буриченко, И.И. Суханов.
Лабораторный практикум по физике. Анализ, обработка и представление результатов измерений физических величин. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 52 с.

В пособии даны методические рекомендации по математической обработке и представлению результатов измерения физических величин, построению таблиц, графиков и оформлению протокола лабораторных работ.

Работа предназначена для студентов всех специальностей всех форм обучения.

УДК ____________

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Цели и задачи лабораторного практикума по физике

Физика является наукой опытной - экспериментальной. Поэтому основным ее методом является наблюдение явления, выделение существенных элементов, измерение основных физических величин, построение модели явления и физической картины протекания процессов в ней.

Осознание модельного характера нашего познания окружающего мира невозможно без личного участия человека в каком–либо физическом опыте, эксперименте. Поэтому в курсе общей физики лабораторному практикуму придается большое значение.

Кратко цели и задачи лабораторного практикума по физике можно сформулировать следующим образом: ознакомить студентов с рядом физических явлений (относительно легко воспроизводимых в условиях учебного заведения), научить их основным методам проведения физического экспериментального исследования, обработки, представления и анализа полученных результатов.

1.2. Что должен знать и уметь студент

После выполнения циклов лабораторных работ студент должен знать:

- два основных вида измерений (прямые и косвенные);
- типы погрешностей по их проявлению от измерения к измерению (случайные, систематические, промахи);
- виды погрешностей по их происхождению (приборные или инструментальные, методические, личные);
- системы и назначение электроизмерительных приборов, классы точности приборов и другие условные обозначения на приборах;
- правила расчета погрешностей прямых и косвенных измерений (в том числе, правила для получения самих расчетных формул для вычисления погрешностей косвенных измерений);

- доверительный интервал и доверительную вероятность;
- значащие цифры и правила приближенных вычислений;

Студент должен уметь:

- формулировать цель (цели) лабораторной работы;
- включать и настраивать стандартные приборы (осциллографы, гониометры и др.);
- производить правильный отсчет по прибору (в том числе, по нониусной шкале прибора);
- вычислять стандартную систематическую приборную погрешность на основе паспортных данных прибора, его класса точности;
- определять стандартную погрешность измерений величин с учетом стандартной (среднеквадратичной) случайной погрешности и стандартной систематической погрешности;
- оформлять таблицу приборов и таблицы измерений;
- производить вычисление погрешностей прямых и косвенных измерений;
- строить графики с учетом погрешностей измерений;
- записывать результаты измерений в стандартной форме;
- делать адекватные выводы.

В конечном счете, после выполнения циклов лабораторных работ по физике студент должен получить определенный навык правильного проведения измерений, представления и оформления результатов измерений и анализа с учетом погрешностей разных типов и видов.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Физический эксперимент представляет собой преднамеренное воспроизведение физического явления при создании условий, минимизирующих влияние несущественных (и мешающих) для данного явления факторов. При создании этих условий экспериментатор исходит из определенной модели явления.

Любое физическое измерение предполагает: выбор определенного метода измерений (экспериментального метода), наличие некоторого средства измерений (прибора), и человека – экспериментатора. Так как от всех влияющих на рассматриваемое явление второстепенных (вредных) факторов избавиться невозможно, то результаты от одного измерения к другому измерению меняются случайным образом. Так появляются случайные погрешности измерений.

Средство измерений – прибор вносит свою лепту, причем, как правило, систематическим образом (например, «сбитый нуль шкалы» прибора). Также весьма существенный вклад может дать выбранный метод измерений. А это зависит от принятой модели явления. Такая погрешность (называемая методической) также носит, как правило, систематический характер.

Наконец, от квалификации экспериментатора зависит многое. При низкой его квалификации следует ожидать появления в измерениях как серьезных «промахов», так и погрешностей случайного или систематического характера.

Рассмотрим все аспекты процесса измерений более подробно.

2.1. Понятие об измерении физических величин. Классификация измерений.

Важнейшей задачей физического эксперимента является определение количественных характеристик исследуемого объекта или явления. Основным способом получения такой информации является измерение.

Измерением называется процесс, заключающийся в определении количественного значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств (приборов) и выражении этого значения в принятых единицах.

Результатом измерения является некоторое число, которое показывает, во сколько раз измеренная физическая величина больше или меньше другой величины, принятой за единицу.

Для осуществления измерения требуется наличие измерительной меры и измерительного прибора.

Измерительная мера – вещественное воспроизведение единицы измеряемой физической величины с определённой наперёд заданной точностью. Примерами являются наборы гирь, магазины сопротивлений, магазины ёмкостей и др.

Измерительный прибор – средство измерений, предназначенное для выдачи количественной информации об измеряемой величине в доступной для восприятия форме, например, измерительная линейка, рулетка, амперметр, вольтметр и др.

Приборы могут быть заранее градуированы в единицах измерения физической величины, в этом случае мера используется заранее в процессе изготовления прибора.

В зависимости от общих приёмов получения результата измерения делятся на два основных вида: прямые и косвенные.

Прямым называется измерение, при котором численное значение измеряемой величины определяется непосредственно по заранее проградуированному прибору (считывается непосредственно со шкалы прибора). Таковы, например, измерения времени секундомером, массы тела взвешиванием на циферблатных весах и т.д.

Косвенным называется измерение, при котором численное значение физической величины определяется по результатам прямых измерений других величин, связанных с искомой величиной известной математической зависимостью. Например, измерения плотности тел по их массе и объёму, мощности в цепях постоянного тока амперметром и вольтметром относятся к косвенным измерениям.

Совокупность приёмов использования принципов и средств измерений называется **методом измерений**. Различают следующие два основные метода измерений:

- **метод непосредственной оценки** (отсчёта), заключающийся в том, что о значении измеряемой величины судят по показаниям одного (прямые измерения) или нескольких (косвенные измерения) приборов, заранее проградуированных в единицах измеряемой величины или в единицах других величин, от которых зависит измеряемая величина;

- **метод сравнения**. Здесь измеряемая величина сравнивается непосредственно с мерой. Этот метод имеет несколько разновидностей, он более точен по сравнению с методом непосредственной оценки. Отличительной чертой метода сравнения является непосредственное участие мер в процессе измерения.

2.2. Источники и виды погрешностей измерений.

В классической физике предполагается, что при заданных условиях значение физической величины, в принципе, может быть измерено сколь угодно точно. Это значение физической величины назовём истинным.

При практическом осуществлении процесса измерения значение физической величины x отличается от истинного x_0, то есть эксперимент даёт лишь приближённое значение измеряемой величины. Отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины называют **погрешностью** (или ошибкой) измерения. Погрешность Δ, определяемая как разность между измеренным значением x и истинным значением x_0, выраженная в единицах измеряемой величины x называется **абсолютной погрешностью**

$$\Delta = x - x_0. \tag{2.1}$$

Отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины, выраженную в долях единицы или в процентах, называется **относительной погрешностью**:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_0} \cdot 100\%. \tag{2.2}$$

Практически обычно пользуются **приближённым** значением относительной погрешности, беря отношение абсолютной погрешности к действительному или измеренному значению величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\%. \tag{2.3}$$

Относительная погрешность характеризует точность измерения, но для её определения по формуле (2.3) нужно знать абсолютную погрешность.

Для указания и нормирования погрешности средств измерения (измерительных приборов) используется так называемая **приведённая погрешность**. Она определяется как отношение максимальной абсолютной погрешности к нормирующему значению измеряемой величины x_N и выражается в относительных единицах или в процентах, т.е.

$$\gamma_{пр} = \frac{\Delta}{x_N} \cdot 100\% . \qquad (2.3)$$

Чаще всего x_N - это предел измерения прибора.

Результат измерения имеет ценность лишь тогда, когда можно оценить его интервал неопределённости, то есть степень достоверности. Поэтому численное значение измеренной физической величины обязательно должно сопровождаться указанием и величины возможной её погрешности.

Оценка погрешностей измерения является одной из основных задач при обработке результатов любого эксперимента.

Характер проявления и причины возникновения погрешностей как средств измерений, так и результатов измерений весьма разнообразны. Поэтому в практике установилось деление погрешностей на ряд разновидностей, за каждой из которых закреплено определённое наименование.

Например, погрешность измерения может быть вызвана влиянием внешних факторов (колебаниями температуры, вибрациями, внешними магнитными и электрическими полями), самой методикой эксперимента (так называемая методическая погрешность), неточностью отсчёта, несовершенством измерительных приборов (приборная погрешность) и другими факторами.

Погрешности в зависимости от характера вызвавших их причин и характера изменений принято разделять на три вида:

1. **Систематические погрешности** – погрешности, остающиеся неизменными (как по величине, так и по знаку) или закономерно изменяющиеся (по известному закону) при повторных измерениях одной и той же величины. Они

могут быть связаны с ошибками приборов (инструментальные погрешности) и с самой постановкой опыта (методические погрешности).

2. **Случайные погрешности** – погрешности, изменяющиеся случайным, непредсказуемым образом (по величине и по знаку) при многократных измерениях одной и той же величины.
3. **Промахи** – «грубые» погрешности, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Такие погрешности обычно связаны с невнимательностью экспериментатора, неверностью взятого отсчёта или его записи и т.д. При повторных измерениях промах легко обнаруживается и исключается из рассмотрения.

Любопытно отметить, что промахи – очень часто встречающийся тип ошибки у студентов, начинающих осваивать физический практикум. С приобретением опыта выполнения лабораторных работ этот вид ошибок встречается всё реже, но всё-таки не исчезает полностью.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Случайные погрешности возникают в результате действия неконтролируемых факторов, воздействие которых нельзя точно предсказать. Однако существуют методы, позволяющие их уверенно оценить (и уменьшить) в каждом конкретном случае. Эти методы основаны на теории вероятностей и законах математической статистики. Суть их сводится к следующему.

Для того, чтобы выявить случайную погрешность измерений, необходимо повторить измерение при одних и тех же условиях несколько раз. Если при этом результаты измерений заметно отличаются друг от друга, мы имеем дело с ситуацией, когда случайная погрешность играет существенную роль.

3.1. Гистограмма и функция распредщеления.

Допустим, что сделано N измерений, при одних и тех же условиях, некоторой физической величины x, и получены результаты $x_i \ (i = 1,2,3,\ldots,N)$ (в этом случае говорят о *серии* из N измерений). Результаты этих измерений можно наглядно представить, построив диаграмму, которая показывает, как часто получаются те или иные значения в этой серии. Такую диаграмму называют **гистограммой** и строят следующим образом.

Пусть все значения результатов серии измерений заключены между минимальным $x_{\min}$ и максимальным $x_{\max}$ значениями, $x_{\min} \le x_i \le x_{\max}$ (см. рис. 1).

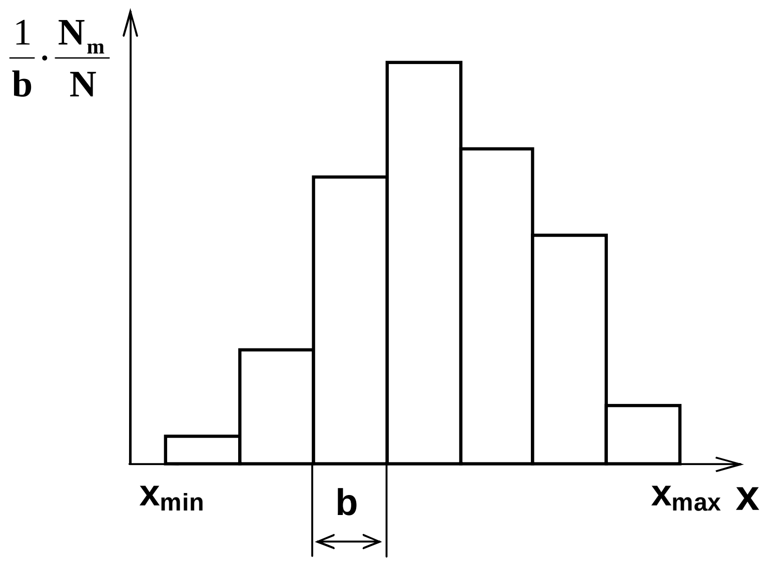


Рис. 1

Разобьём промежуток $[x_{\min}, x_{\max}]$ оси абсцисс на некоторое число k (на практике приблизительно равное $\sqrt{N}$) одинаковых интервалов. Ширина каждого интервала при этом получается равной $b = (x_{\max} - x_{\min})/k$. По результатам серии измерений подсчитаем, сколько результатов попало в каждый интервал. Пусть N_m – число результатов, попавших в m-ый интервал ($1 \le m \le k$). Тогда N_m/N -доля всех измерений серии, попавших в m-ый интервал. Построим теперь на этих k интервалах прямоугольники с высотой, равной $N_m/(Nb)$. Получающаяся таким образом ступенчатая диаграмма и называется гистограммой. Пример гистограммы приведён на рис.1.

Величина $P_m = N_m/N$ называется **вероятностью** попадания результата измерения в m-ый интервал. Она равна площади прямоугольника, построенного на данном интервале. Заметим, что площадь под гистограммой (т.е. суммарная площадь всех прямоугольников) равна 1.

Если увеличивать число измерений N и число разбиения k, то ширина интервалов b будет уменьшаться. В пределе, когда число измерений N стремится к бесконечности, а ширина интервалов b стремится к нулю, гистограммы (построенные для каждого конкретного N и соответствующего b) приближаются к некоторой плавной кривой. Функцию, графиком которой является эта кривая, называют **плотностью распределения** результатов измерений (см. рис.2) и обозначают как $p(x)$.

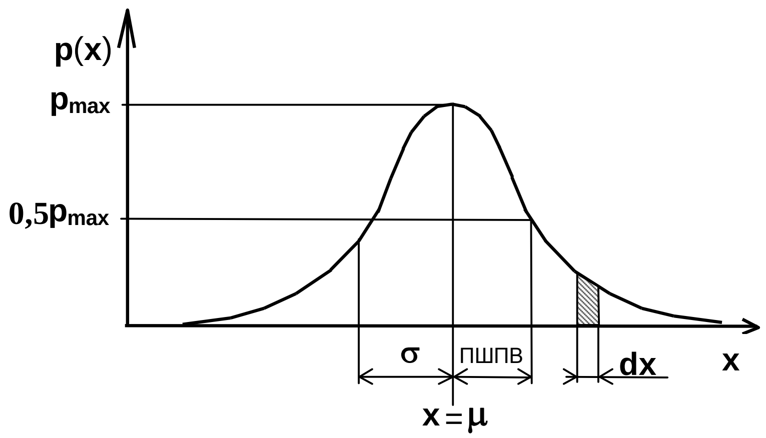


Рис. 2

При этом ширина интервалов b переходит в dx – бесконечно малое приращение измеряемой случайной величины x. Заметим, что площадь прямоугольника, построенного на m-ом интервале ширины b, равна N_m/N, а площадь под кривой $p(x)$ над интервалом dx равна $p(x)dx$. Значит, при предельном переходе следует заменить N_m/N на $p(x)dx$. Тогда видим, что, действительно, функция $p(x)$ получается из гистограммы предельным переходом:

$$\lim_{N\to\infty, b\to 0} \frac{N_m}{Nb} = \lim_{N\to\infty, b\to 0} \frac{N_m/N}{b} = \frac{p(x)dx}{dx} = p(x).$$

Вероятность попадания результата отдельного измерения в интервал от x до $x+dx$ равна $p(x)dx$. Тогда $P(x_1, x_2)$ - вероятность получения результата наблюдения в любом конечном интервале $[x_1, x_2]$ – равна площади под кривой $p(x)$ между соответствующими абсциссами x_1 и x_2. Поэтому функцию $p(x)$ называют ещё **функцией распределения вероятностей** или **плотностью вероятности**. Функция $p(x)$ связана с $P(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$p(x) = \frac{d\,P(x_1, x)}{dx}, \qquad P(x_1, x_2) = \int_{X_1}^{X_2} p(x)dx.$$

Полная площадь под кривой $p(x)$ равна единице, как вероятность достоверного события.

3.2. Среднее значение и среднеквадратичное отклонение.

Предположим, что погрешности равных значений, но разных знаков встречаются одинаково часто (математически это выражается тем, что функция распределения $p(x)$ симметрична относительно x_0, где x_0 – результат измерения, не содержащий случайной погрешности). Тогда при большом числе измерений $N >> 1$ количество результатов с некоторой погрешностью $+\Delta$ приближенно равно количеству результатов с погрешностью $-\Delta$. При вычислении суммы всех x_i «противоположные» погрешности почти сократятся. Значит, чтобы приближенно найти x_0 с погрешностью, меньшей чем для отдельного измерения, надо найти среднее арифметическое значение всех x_i (оно обозначается как $< x_N >$ или $\bar{x}$):

$$x_0 \approx < x_N >, \qquad \text{где } < x_N > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.1}$$

Величина $< x_N >$ называется также **выборочным средним** для данной серии измерений (а сама серия называется **выборкой**). При увеличении числа измерений N до бесконечности выборочное среднее стремится к некоторому пределу,

$$\lim_{N\to\infty} < x_N > = \mu \ .$$

Величина μ называется **математическим ожиданием** измеряемой величины x. Математическое ожидание иногда называют просто средним значением.

Если погрешности равных значений, но разных знаков встречаются одинаково часто, то $\mu = x_0$; всюду далее будем считать, что это условие выполнено.

Точное определение x_0 невозможно, так как это потребовало бы бесконечного числа измерений. Возможно лишь, во-первых, найти выборочное среднее $< x_N >$, и во-вторых, оценить, на сколько отличается $< x_N >$ от x_0. Для этого надо сначала найти «разброс» результатов отдельных измерений, иначе говоря, определить, на сколько отдельное x_i отличается («в среднем») от x_0.

Количественной характеристикой разброса является так называемое **среднеквадратичное отклонение** (сокращенно – **СКО**). Для объяснения, что это такое, определим сначала **выборочное СКО** $S_{x,N}$:

$$S_{x,N} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x_N \rangle)^2} \qquad (3.2)$$

Можно доказать (методами математической статистики), что при стремлении числа измерений к бесконечности выборочное СКО стремится к некоторому пределу σ_x:

$$\lim_{N\to\infty} S_{x,N} = \sigma_x \ . \qquad (3.3)$$

Собственно СКО – это и есть σ_x, то есть предел выборочных СКО.

Часто в качестве одной из характеристик разброса отдельных x_i берут половину ширины графика функции распределения на половине его высоты (полуширина на полувысоте, сокращенно – **ПШПВ**), как показано на рисунке 2. Однако сама функция распределения нам точно не известна, так как для ее определения потребовалось бы бесконечное число измерений. Поэтому на практике определяют ПШПВ для гистограммы. Ясно, что при очень большом числе измерений ПШПВ для гистограммы и для функции распределения почти совпадают.

Точно так же как для x, для любой случайной величины существуют функция распределения, математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение.

Поскольку x_i – случайные величины, то их сумма $\sum_{i=1}^{N} x_i$ – также случайная величина. Вместе с ней случайной величиной является и выборочное среднее $\langle x_N \rangle$. Его математическое ожидание равно x_0, т.е. математическому ожиданию результата отдельного измерения. Среднеквадратичное отклонение величины $\langle x_N \rangle$ обозначим как $\sigma_{\bar{x},N}$. В математической статистике доказывается, что, если результаты отдельных измерений не зависят друг от друга, то $\sigma_{\bar{x},N}$ связано с σ_x и числом измерений N следующим образом:

$$\sigma_{\bar{x},N} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{3.4}$$

Точное значение σ_x неизвестно, однако при большом числе измерений $\sigma_x \approx S_{x,N}$, откуда

$$\sigma_{\bar{x},N} = \frac{S_{x,N}}{\sqrt{N}}. \tag{3.5}$$

Видно, что погрешность формулы $x_0 \approx < x_N >$ при больших N уменьшается как $1/\sqrt{N}$.

При конечном N величины $\langle x_N \rangle$ и $S_{x,N}$ выражаются через набор значений x_i. При N, стремящемся к бесконечности, эти выражения переходят в выражения для x_0 и σ_x через функцию распределения $p(x)$:

$$x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \tag{3.6}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D}, \tag{3.7}$$

где величина D называется дисперсией и равна

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - x_0^2) p(x) dx. \tag{3.8}$$

3.3. Нормальное распределение. Функция Гаусса.

Законы распределения результатов эксперимента могут быть различными в разных экспериментах. Одним из наиболее часто встречающихся является *нормальный (гауссов)* закон распределения, который описывается *функцией Гаусса*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.9}$$

Если по формулам (3.6) – (3.8) найти среднее x_0 и СКО σ_x для этого распределения, то получим $x_0 = \mu$, $\sigma_x = \sigma$.

В теории вероятностей доказано, что хотя закон распределения результатов отдельных измерений (т.е. функция $p(x)$) может быть, в принципе, любым, оказывается, что распределение выборочного среднего $\langle x_N \rangle$ при больших N *всегда* почти гауссово (тем ближе к гауссову, чем больше N). Поэтому принимают, что для **единичного** измерения погрешности распределены по закону Гаусса, если, во-первых, имеется достаточно большое число причин возникновения погрешностей, и, во-вторых, ни одна из этих причин не является существенно преобладающей над остальными.

Видно, что нормальное (гауссово) распределение имеет следующие свойства:

1. Гауссово распределение симметрично относительно математического ожидания x_0, т.е. отклонения в обе стороны встречаются одинаково часто;
2. чем больше отклонение x_i от x_0, тем реже оно встречается;
3. ПШПВ для гауссова распределения не слишком отличается от σ_x (точнее, ПШПВ$\approx 1.18 \cdot \sigma_x$);
4. при $\sigma_x \to 0$ все распределение «стягивается» к одному значению x_0.

3.4. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Коэффициенты Стьюдента.

При нормальном законе распределения в интервал $\left[x_0 - \sigma_x, x_0 + \sigma_x\right]$ попадает 68,3% всех результатов измерений, в интервал $\left[x_0 - 2\sigma_x, x_0 + 2\sigma_x\right]$ попадает 95,44% всех результатов измерений, а в $\left[x_0 - 3\sigma_x, x_0 + 3\sigma_x\right]$ - 99,73% (именно этим числам равен определённый интеграл от функции Гаусса по соответствующим интервалам (т.е. площадь под кривой над соответствующим интервалом)). Получается, что каждому интервалу $\left[x_0 - t\sigma_x, x_0 + t\sigma_x\right]$ соответствует своя определённая доля P результатов измерений, которые в него попадают. Эта доля P равна вероятности попадания результата единичного измерения в интервал $[x_0 - t\sigma_x, x_0 + t\sigma_x]$. По определению, этот интервал значений и вероятность P, ему соответствующая, называются **доверительными.**

Доверительная вероятность P зависит от величины доверительного интервала, измеренного в единицах σ_x: $P = P(t)$. На это можно посмотреть и с другой стороны: доверительный интервал зависит от доверительной вероятности, $t = t(P)$.

Допустим, мы сделали всего одно измерение, получив при этом результат x_1, но зато *заранее* знаем σ_x (это возможно, если предварительно на данной измерительной установке проведены многократные измерения, в результате чего СКО определено с высокой точностью). Тогда при заданной доверительной вероятности P можно найти доверительный интервал, в котором находится x_0:

$$x_0 = x_1 \pm \sigma_x t(P) \quad ; \tag{3.10}$$

Формула (3.10) означает, по определению, что с вероятностью P имеет место неравенство

$$x_1 - \sigma_X t(P) \le x_0 \le x_1 + \sigma_X t(P) \quad . \tag{3.11}$$

С вероятностью $(1-P)$ истинное значение может оказаться и вне доверительного интервала (3.10) , поэтому запись интервала следует обязательно сопровождать указанием доверительной вероятности P. Значения $t(P)$, отличные от 1,2,3, и соответствующие значения P могут быть найдены по таблицам в справочниках. Рекомендуется результат записывать для $P = 0.95$, т.е. выбирать доверительный интервал $\pm 2\sigma_x$.

Однократными измерениями, как прямыми, так и косвенными, можно ограничиться в большинстве лабораторных работах практикума по физике для студентов 1,2 курсов НГТУ. СКО непосредственно измеряемых величин указаны обычно на пояснительных табличках к каждой лабораторной работе. Если погрешность не указана, она находится исходя из погрешностей приборов.

Разберемся, наконец, как оценить x_0 по результатам **нескольких измерений** при заданной доверительной вероятности P. По аналогии с (3.10) можно записать

$$x_0 = < x_N > \pm \sigma_{\bar{x},N} \cdot t(P)\,. \qquad (3.12)$$

Если σ_x известно заранее, то можно воспользоваться тем, что $\sigma_{\bar{x},N} = \sigma_x / \sqrt{N}$, откуда получим

$$x_0 = < x_N > \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \cdot t(P)\,. \qquad (3.13)$$

Если же σ_x заранее не известно, но количество измерений достаточно велико, то можно считать, что $\sigma_x \approx S_{x,N}$, откуда

$$x_0 \approx < x_N > \pm \frac{S_{x,N}}{\sqrt{N}} \cdot t(P)\ . \qquad (3.14)$$

Из формул (3.13), (3.14) видно, что при достаточно больших N погрешность определения x_0 уменьшается с ростом N как $1/\sqrt{N}$.

Если же N не слишком велико, то формулой (3.14) пользоваться нельзя, так как σ_x может существенно отличаться от выборочного СКО $S_{x,N}$. Если σ_x больше $S_{x,N}$, то ширина доверительного интервала, найденная по формуле (3.14), окажется меньше, чем она есть на самом деле. Чтобы это исправить, следует заменить коэффициент $t(P)$ в формуле (3.14) на так называемый коэффициент Стьюдента $t(P,N)$, который зависит от числа измерений. Таким образом, при небольших N вместо формулы (3.14) следует пользоваться формулой

$$x_0 = < x_N > \pm \frac{S_{x,N}}{\sqrt{N}} \cdot t(P,N)\,. \qquad (3.15)$$

Коэффициенты Стьюдента могут быть найдены средствами математической статистики. Наиболее употребляемые коэффициенты Стьюдента приведены в таблице 3.1

Для любого конечного N выполняется неравенство $t(P,N) > t(P)$; это значит, что доверительный интервал, определяемый по формуле (3.15), действительно шире, чем доверительный интервал, определяемый по формуле (3.14). При N, стремящемся к бесконечности, $t(P,N)$ стремится к $t(P)$, так что формула (3.15) при этом переходит в (3.14). Из таблицы 3.1 видно, что, например, для $P = 0.95$ (т.е. $t(P) = 2$) равенство $t(P,N) \approx t(P)$ выполняется для $N \geq 30$. Поэтому, чтобы при этой доверительной вероятности пользоваться формулой (3.14), следует провести не менее 30 измерений.

Таблица 3.1

P	0,6	0,683	0,9	0,95	0,99	0,997
N	t(N,P)					
2	1,38		6,31	12,7	63,7	212
3	1,06	1,32	2,92	4,30	9,92	182
4	0,98	1,20	2,35	3,18	5,84	9,0
5	0,94	1,15	2,13	2,78	4,60	6,4
6	0,92	1,11	2,02	2,57	4,03	5,4
7	0,90	1,09	1,94	2,45	3,71	4,8
8	0,90	1,08	1,90	2,36	3,50	4,4
9	0,89	1,07	1,86	2,31	3,36	4,2
10	0,88	1,06	1,83	2,26	3,25	4,0
15	0,87	1,05	1,75	2,13	2,95	3,6
20	0,86	1,03	1,73	2,10	2,87	3,4
30	0,85	1,02	1,70	2,04	2,75	3,2
50	0,85	1,01	1,68	2,01	2,68	3,1
100	0,84	1,00	1,66	1,98	2.63	

Отметим ещё, что в физической литературе “погрешность” измерений, то есть фактически $S_{x,N} \cdot t(P,N) \big/ \sqrt{N}$ из формулы (3.15), принято обозначать той же буквой σ, что и СКО в формуле Гаусса. На практике это ни к какой путанице не приводит, однако то, что это различные величины, следует понимать.

4. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ (ПРИБОРНЫЕ) ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

В лабораторном практикуме используются **измерительные меры** (средства измерений, предназначенные для воспроизведения физической величины данного размера), например, гири, магазины сопротивлений, и измерительные приборы (средства измерений в виде технических устройств, предназначенных для выработки сигнала в форме, удобной для восприятия, хранения и передачи измерительной информации), например, вольтметры, осциллографы, оптические приборы. Измерительные меры и **измерительные приборы** имеют нормированные метрологические характеристики.

В любом измерительном приборе можно выделить собственно техническое устройство прибора – его «механизм» и отсчётное устройство прибора – его «циферблат». Результат измерения зависит от обеих составляющих.

В бытовых приборах, например, в часах со стрелочным циферблатом обычно механизм и циферблат не согласованы в следующем смысле. Если у вас на руках швейцарские часы (отличный высокоточный механизм) со стрелочным циферблатом без секундной стрелки с двенадцатью часовыми делениями, то вы сможете отсчитывать время с точностью хуже 1 минуты – циферблат грубый, хотя механизм прибора обеспечивает существенно более высокую точность. С другой стороны, вы можете легко представить противоположный случай прибора, когда механизм очень грубый, а отсчётное устройство, т.е. циферблат, содержит излишне подробную шкалу. В этом случае у вас может создаться ошибочное впечатление высокой точности измерения, в то время как механизм не способен обеспечить такую точность в силу низкой точности изготовления.

В измерительных приборах техническое устройство и отсчётное устройство, как правило, согласованы путем указания так называемого класса точности прибора, который представляет собой интегральную характеристику «механизма» и «циферблата», определяемую пределами допускаемой погрешности средства измерения.

4.1. Классы точности приборов и предельные приборные погрешности

Приборы могут нормироваться по разным видам погрешностей. Для того чтобы заранее оценивать погрешность, которую вносит данное средство измерения (прибор) в конечный результат, пользуются так называемыми нормированными значениями погрешности. Под **нормированными** значениями понимаются погрешности, являющимися предельными для данного типа средство измерения.

Обобщённой метрологической характеристикой средств измерения является **класс точности**, который определяет допустимые пределы всех погрешностей, а также все другие свойства, влияющие на точность средства измерения. Чаще всего встречаются три типа классов точности.

1. Класс точности прибора задан в виде **относительной погрешности δ:**

$$\delta = \frac{\Delta_x}{x} \cdot 100\% \qquad (4.1)$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности равен:

$$\Delta_x = \delta \cdot \frac{x}{100} \qquad (4.2)$$

Данный вид класса точности указывают внутри кружочка на шкале прибора, например,
обозначает, что относительная погрешность равна 1,5%.

1,5

2. Класс точности прибора задан в виде **приведенной погрешности γ:**

$$\gamma_{np} = \frac{\Delta_x}{x_N} \cdot 100\%, \qquad (4.3)$$

где x_N – нормирующее значение измеряемой величины, которое равно пределу измерения $x_{пред}$ для приборов с нулевой отметкой на краю шкалы. Если же нулевая отметка находится посередине шкалы, то x_N равно **протяжённости диапазона** измерений (например, для амперметра со шкалой от –30 до + 60 А $x_N = 60 - (-30) = 90$ А). В этом случае предел допускаемой приборной погрешности (максимально возможная абсолютная погрешность)

$$\Delta_x = \gamma_{пр} \cdot \frac{x_N}{100} \tag{4.4}$$

Этот вид класса точности изображают на шкале прибора числом без изображения кружочка или подчёркивания, например, просто 1,5.

На приборах с резко неравномерной шкалой класс точности указывается в долях от длины шкалы и обозначается числом над уголком:

1,5

3. Класс точности задан двумя числами $\gamma_к$ и $\gamma_н$. Тогда относительная погрешность измерений

$$\delta = \left\{ \gamma_к + \gamma_н \left(\frac{x_{пред}}{x} - 1 \right) \right\}, \%, \tag{4.5}$$

где $\gamma_к$ – приведённая погрешность в конце диапазона измерений, а $\gamma_н$ – приведённая погрешность в начале диапазона (при $x = 0$).

Тогда предел допускаемой приборной погрешности равен:

$$\Delta_x = \delta \cdot x/100 = \{ (\gamma_к - \gamma_н) x + \gamma_н \, x_{пред} \}/100 \tag{4.6}$$

Этот вид класса точности указывают на шкале прибора в виде условной дроби $\gamma_к / \gamma_н$, например, 0,5/0,2.

Предельные приборные (инструментальные) погрешности Δ_x определяют лишь так называемые основные погрешности. В общем случае инструментальная погрешность зависит как от измеряемой величины (на одном диапазоне измерений прибора одна погрешность, на другом диапазоне измерения прибора – другая), так и от условий проведения измерений (рабочие условия могут заметно отличаться от нормальных, например, температура выходит за пределы (20±5)°C, относительная влажность вне предела 30 – 80 % и т.д.). В ответственных физических экспериментах правильный учет инструментальной погрешности составляет отдельную задачу измерения.

Отметим ещё раз, что приборные погрешности, наряду с методическими, которые отдельно рассматриваются в разделе 5, относятся к систематическим погрешностям.

4.2. Совместный учет случайных и систематических погрешностей

Результаты измерений всегда содержат как систематические, так и случайные ошибки. Пусть они характеризуются стандартными погрешностями $\sigma_{сист}$ и $\sigma_{случ}$. Суммарная погрешность находится по формуле:

$$\sigma^2_{полн} = \sigma^2_{сист} + \sigma^2_{случ} \qquad (4.7)$$

Как было отмечено в предыдущем пункте, систематическая погрешность, вносимая прибором, оценивается через его класс точности по одной из формул (4.2), (4.4) (4.6). По этим формулам получают максимально возможную погрешность Δ_x, вносимую в результат самим прибором.

Обычно систематическую ошибку, вносимую измерительным прибором, характеризуют не максимально возможной погрешностью, а так называемой стандартной систематической погрешностью, которая, как показано в теории ошибок, равна

$$\sigma_{ст\ сист} = \frac{\Delta_x}{3} \qquad (4.8)$$

В том случае, если класс точности неизвестен, то стандартная погрешность с доверительной вероятностью 68% может быть оценена по формуле:

$$\sigma_{ст.сист} = (0{,}3 \div 0{,}5)\,C$$

Таким образом, при совместном учете случайных и инструментальных погрешностей получается, что с доверительной вероятностью 68% погрешность результат измерения равна

$$\sigma_{полн} = \sqrt{\sigma^2_{случ} + \left(\frac{\Delta_x}{3}\right)^2} \qquad (4.9)$$

Видно, что если измерения проводятся прибором достаточного класса точности (приборная погрешность значительно меньше случайной погрешности), то нет необходимости в учете приборной погрешности. С другой стороны, если у вас заведомо не высока точность прибора, то нет необходимости в проведении многократных измерений физической величины.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. Замечания о случайных и систематических погрешностях

Систематические и случайные погрешности принципиально отличаются по следующим двум обстоятельствам.

Во-первых, случайные погрешности обнаруживаются при повторении измерений, а систематические – нет. В этом отношении систематические погрешности опаснее случайных погрешностей.

Во-вторых, случайные погрешности можно существенно снизить путем повторений измерений и обработкой результатов измерений методами математической статистики. Систематические погрешности не поддаются подобному анализу и обработке: повторение измерений не выявляет систематическую погрешность, а статистическая обработка не снижает величину этой погрешности. Более того, нет каких-либо общих рецептов по выявлению и устранению этих типов погрешностей.

Эти замечания относятся главным образом к систематическим методическим погрешностям. Что касается систематических инструментальных погрешностей, то обычно стараются снизить их уровень еще на этапе конструирования измерительного средства, который никак не связан с предстоящими конкретными измерениями в конкретном физическом эксперименте. И в отношении инструментальных погрешностей есть одна общая рекомендация – выбирать измерительное средство с заведомо достаточным уровнем инструментальной погрешности.

Это означает, что если вас удовлетворит результат измерения физической величины с относительной погрешностью, например, 2 %, то достаточно выбрать измерительное средство класса точности 2 по относительной погрешности. Потому что если вы желаете непременно получить результат с точностью не хуже 2%, то вы будете проводить многократные измерения и добьетесь того, что случайные погрешности будут порядка или ниже, чем приборные погрешности, и тогда суммарная погрешность будет определяться только приборной погрешностью. А вы уже выбрали достаточно хороший прибор.

И, разумеется, в данном случае нет необходимости в использовании прибора, например, класса точности 0,05. Это сравнимо с тем, как если бы вы измеряли расстояние между двумя остановками автобуса микрометром.

С инструментальными погрешностями мы в основном разобрались.

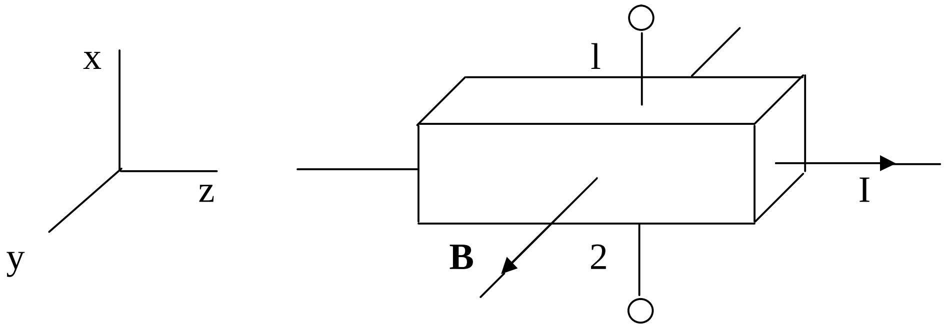
В дальнейшем будем обсуждать только методические погрешности.

Мы уже указывали на важность модельных представлений в нашем познании. Выбор той или иной модели может вносить свой весьма существенный вклад в погрешность измерений. Поэтому обычно экспериментаторы стараются измерить физическую величину несколькими методами. При этом удается выявить и исключить методические погрешности, присущие тому или иному методу. Если при измерениях различными методами получаются согласующиеся результаты, то это означает, что уровень методических погрешностей, содержащихся в этих методах, относительно низок и исследователи могут делать более обоснованные выводы относительно результатов измерений.

5.2. Пример выявления и устранения методической погрешности

Рассмотрим следующий пример измерений. Существует важный физический эффект, называемый эффектом Холла. Суть этого эффекта заключается в следующем.

Пусть имеется образец кристалла типичного размера порядка, например, $(1{,}0 \times 0{,}3 \times 5{,}0)$ мм.



Если поместить образец в однородное магнитное поле (направленное по оси y) и пропустить по образцу электрический ток в продольном направлении (по оси z), то из-за действия на носители зарядов силы Лоренца, между верхней и нижней гранью образца (по оси x между точками 1 и 2) возникнет разность потенциалов, называемая ЭДС Холла ε_x.

Например, если носителями тока являются электроны проводимости, то сила Лоренца будет отклонять их к нижней грани, там будет их избыток, в результате нижняя грань образца зарядится отрицательно, а верхняя грань – положительно. Задача исследователя состоит в измерении величины ЭДС Холла и установлении её зависимости от других физических величин, существенных для этого эффекта.

На первый взгляд всё предельно ясно: надо измерить разность потенциалов между противоположными точками 1 и 2 на верхней и нижней грани образца u_{12}. Если выбран вольтметр достаточного класса точности (абсолютная приборная погрешность заведомо существенно меньше ожидаемого эффекта, т.е. величины ε_x), то путем многократных измерений можно получить результат с низкой случайной и суммарной погрешностью. На деле, если мы произведем измерения именно описанным образом, то наши измерения будут содержать систематическую методическую погрешность.

Действительно, в реальном эксперименте дело обстоит несколько иначе.

В силу малости размера образца обычно не удается припаять подводящие к образцу проводники строго напротив друг друга на противоположных гранях. Вследствие этого измерения, помимо ЭДС Холла ε_x, будут содержать дополнительное (паразитное) падение напряжения u_d вдоль продольного размера образца, т.е. $u_{12} = \varepsilon_x + u_d$, где u_d может быть любого знака.

Если мы выявили этот источник методической погрешности, то надо найти способ исключения этой погрешности. А способ исключения обнаруживается в самой природе эффекта Холла.

Что произойдет, если мы изменим знак вектора индукции магнитного поля? Изменится знак ЭДС Холла ε_x, так как теперь носители зарядов будут под действием силы Лоренца смещаться в противоположную сторону. В то же время дополнительное падение напряжения u_d знак не изменит (для смены знака u_d нужно изменить направление протекания тока).

Учтем эту особенность эффекта Холла следующим образом. Измерим напряжение между точками 1 и 2 при одном направлении поля, которое назовем «положительным»: u_{12}^{+}, затем измерим напряжение при противоположном направлении магнитного поля, которое назовем «отрицательным»: u_{12}^{-}.

Очевидно, что

$$u_{12}^{+} = \varepsilon_x + u_d, \qquad u_{12}^{-} = -\varepsilon_x + u_d, \tag{5.1а}$$

или

$$u_{12}^{+} = \varepsilon_x - u_d, \qquad u_{12}^{-} = -\varepsilon_x - u_d. \tag{5.1б}$$

Из соотношений (5.1а) или из (5.1б) находим величину ЭДС Холла ε_x:

$$\varepsilon_x = | u_{12}^{+} - u_{12}^{-} | / 2. \tag{5.2а}$$

Если есть необходимость, то из тех же соотношений можно найти также величину паразитного дополнительного падения напряжения u_d:

$$u_d = | u_{12}^{+} + u_{12}^{-} | / 2. \tag{5.2б}$$

Таким образом, найден способ устранения выявленной конкретной методической погрешности при измерении ЭДС Холла. Разумеется, могут быть и другие источники методических погрешностей. Их также надо выявлять и постараться исключить или внести поправку в измеренные значения. Все зависит от реальной экспериментальной ситуации.

В учебных лабораторных установках нередки случаи, когда условия физического эксперимента отличаются от предполагаемых теорией, а поправка на это несоответствие сделано недостаточно аккуратно. Это является причиной возникновения методических погрешностей. Особенно это касается тех случаев, когда из различных соображений производится совмещение двух или более лабораторных работ на одной установке. Потому крайне важно зафиксировать:

- отличается ли реальная физическая установка от описанной в методических указаниях к лабораторной работе;

- какие предположения сделаны при выводе рабочих формул;
- что может явиться источником методических погрешностей.

Эти вопросы должны выясняться в каждой лабораторной работе. Ответы на эти вопросы помогут найти причины расхождений экспериментально найденных значений физических величин (или зависимостей) от табличных значений (или теоретических зависимостей). Это важно при формулировке выводов по проделанной лабораторной работе и защите работы.

Мы столь много говорим о методических погрешностях потому, что они всегда самые опасные. В истории науки были многочисленные случаи, когда методические погрешности не были выявлены, потому и не устранены, а исследователи объявляли о своих сенсационных открытиях. Позже другие исследователи при попытках повторить проведенные эксперименты выявляли имеющиеся методические погрешности и эффекта не обнаруживали.

Примеры добросовестного научного отношения к проведению физического эксперимента следует искать в публикациях так называемых классических опытов. Мы отсылаем читателя к экспериментальным работам Г.П. Томсона [1] по обнаружению волновых свойств электронов, русский перевод которых помещен на странице 247 в книге А. Портиса «Физическая лаборатория» [2].

Можно не все понять в тексте статей Г.П. Томсона (которые, кстати, содержат всего несколько простых формул), но мы хотели бы, чтобы читатель почувствовал степень научной добросовестности автора и понял, насколько важно обращать пристальное внимание на возможные методические погрешности измерений.

6. КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Не каждую физическую величину измеряют непосредственно. Простейший пример (даже не из физики, а из геометрии): допустим, мы хотим измерить площадь прямоугольника S. Для этого мы должны измерить длины его сторон a и b, и перемножить их: $S = ab$. Это – пример **косвенного** измерения. При косвенных измерениях физическая величина вычисляется по формуле через величины, полученные в прямых измерениях. В приведенном выше примере измерения длины сторон – прямые измерения, а вычисление площади – косвенное. Отметим, что нахождение суммы или разности двух непосредственно измеряемых величин также можно рассматривать как косвенное измерение. В большинстве случаев измеряется как раз не непосредственно интересующая нас величина f, а другие величины, от которых величина f функционально зависит.

Пусть некоторая физическая величина f является функцией величин $x, y, \ldots, t$, которые определяются прямыми измерениями:

$$f = f(x, y, \ldots, t).$$

Допустим также, что $x, y, \ldots, t$ распределены по нормальному закону (закону Гаусса) со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \sigma_t$ (обычно для случайных погрешностей это выполняется). Тогда, как доказано в теории ошибок, f также распределена по закону Гаусса с СКО, равным

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{6.1}$$

В формуле (6.1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ – частная производная функции $f(x, y, \ldots, t)$ по x, т.е. производная, при вычислении которой все остальные аргументы, кроме x (в нашем случае $y, \ldots, t$), считаются постоянными. Аналогичный смысл имеют частные производные по $y, \ldots, t$.

Наилучшим значением величины f при косвенном измерении является $f_{наил} = f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{t})$, где $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{t}$ – средние значения величин $x, y, \ldots, t$.

Часто более удобно пользоваться формулами не для σ_f, а для относительной среднеквадратичной погрешности, то есть для величины $\frac{\sigma_f}{f}$. Особенно просто формула для относительной погрешности выглядит в случае, когда $f = A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \ldots \cdot t^{\gamma}$, где A, α, β, γ – постоянные:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \ldots + \left(\gamma \frac{\sigma_t}{t}\right)^2} \,. \qquad (6.2)$$

Вывести (6.2) из (6.1) вы легко можете сами. В частных случаях, когда $f = A \cdot x \cdot y$ или $f = A \cdot x / y$, формула (6.2) сводится к следующей:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} \,. \qquad (6.3)$$

Этой формулой легко пользоваться даже при вычислениях в уме, а вот про исходную формулу (6.1) этого не скажешь!

В другом частном случае, когда надо найти погрешность суммы или разности двух измеренных величин, т.е. $f = x + y$ или $f = x - y$, формула (6.1) сводится к формуле:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \,. \qquad (6.4)$$

Иначе говоря, при нахождении суммы или разности нескольких величин складываются квадраты среднеквадратичных отклонений, а при нахождении произведения или частного складываются квадраты относительных погрешностей.

Отметим некоторые важные следствия, которые могут быть получены из анализа формул этого раздела.

Прежде всего заметим, что следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух сравнительно больших чисел. Например, толщину стенки трубы можно было бы определять как разность наружного и внутреннего диаметров, деленную на два. Однако относительная погрешность этого измерения будет велика, так как толщина стенки мала, а погрешность в ее определении находится путем сложения погрешностей измерения обоих диаметров по формуле (6.4).

Часто оказывается, что относительная погрешность одной из величин, входящих в формулу для f, много меньше относительной погрешности другой. Тогда при пользовании формулой (6.2) этой погрешностью можно пренебречь, и с самого начала не учитывать ее в вычислениях. Например, если $f = A \cdot x^2 \cdot y$, и $\frac{\sigma_y}{y} << \frac{\sigma_x}{x}$, то вторым слагаемым под корнем в (6.2) пренебрегаем, откуда получим $\frac{\sigma_f}{f} \approx 2\frac{\sigma_x}{x}$.

Видно также, что при измерениях, которые обрабатываются по формуле (6.2), следует обратить особое внимание на точность измерения величины, входящей в расчетную формулу с наибольшим показателем степени.

7. ОБРАБОТКА И ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.

7.1. Окончательная запись результатов измерений.

Окончательная запись результатов измерений производится в виде:

$$x_0 = A \pm \Delta; \quad P = \alpha, \tag{7.1}$$

где A – измеренное значение физической величины, Δ – погрешность измерений, P – установленная доверительная вероятность.

Запись (7.1) означает, что с вероятностью $P = \alpha$ истинное значение измеряемой величины находится в интервале от $A - \Delta$ до $A + \Delta$. Этот интервал называется **доверительным интервалом**, а $P = \alpha$ – **доверительной вероятностью** или **коэффициентом надёжности**.

В случае, когда заранее известно СКО σ_x и проводится **однократное** измерение (прямое или косвенное) при заданной доверительной вероятности, для A и Δ имеем:

$$A = x_1; \qquad \Delta = t(P) \cdot \sigma_x \tag{7.2}$$

В случае, когда СКО σ_x заранее неизвестно и проводятся многократные измерения, а систематическая погрешность много меньше случайной, для A и Δ при заданной доверительной вероятности имеем

- при числе измерений $N > 30$: $\quad A = \langle x_N \rangle; \qquad \Delta = \frac{S_{x,N}}{\sqrt{N}} t(P)$ (7.3)
- при числе измерений $2 < N < 30$: $\quad A = \langle x_N \rangle; \quad \Delta = \frac{S_{x,N}}{\sqrt{N}} t(P,N)$ (7.4)

Здесь $S_{x,N}$ – выборочное СКО, определяемое формулой (3.2), а $t(P,N)$ – коэффициент Стьюдента.

В случае, когда систематические и случайные погрешности соизмеримы, погрешности измерений Δ подсчитываются в соответствии с п. 4.2.

Чаще всего результат измерений находят с доверительной вероятностью 0,68. В этом случае саму доверительную вероятность $P=\alpha=0{,}68$ можно не указывать, а погрешность называется **стандартной** (или **среднеквадратичной**) погрешностью и равна σ .

Например, запись $m=(7{,}43\pm 0{,}05)$кг означает, что в результате измерения массы тела найдено значение 7,43кг со стандартной погрешностью 0,05кг с доверительной вероятностью $P\approx 0{,}68$ (по умолчанию). Подразумевается, что при вычислении стандартной погрешности учтены как случайные, так и систематические ошибки.

При выполнении этих расчётов приходится иметь дело с приближёнными вычислениями.

7.2. Операции над приближёнными числами. Точность расчётов.

Точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений. Вычисления, проведённые с большим числом десятичных знаков, требуют лишних затрат труда и создают ложное впечатление о большей точности измерений. В то же время, разумеется, не следует ухудшать результаты измерений, пользуясь излишне грубыми методами вычислений. Во всех случаях следует придерживаться следующего простого правила.

Ошибка, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т.е. в десять раз) меньше суммарной ошибки измерений. При этом можно быть уверенным, что в результате арифметических действий мы ощутимым образом не исказим нашего результата.

Для того, чтобы это правило выполнялось, в промежуточных расчётах удерживают на одну значащую цифру больше, чем в первичных данных. В окончательном результате запасную цифру отбрасывают.

Напомним, что значащими цифрами являются все цифры в десятичном представлении числа, кроме нулей, стоящих в начале числа. Нули в середине числа или в конце числа (справа) – значащие цифры. Например, в числе 0,05040 первые два нуля не являются значащими, а третий нуль и четвёртый – значащие.

В случае больших целых чисел с нулями на конце возникает вопрос, являются эти нули значащими цифрами или они служат лишь для определения разрядов числа (например, в числе 380 000). Чтобы избежать такой неопределённости, следует записывать подобные числа в так называемом стандартном виде, а именно

$$a = a_0 \cdot 10^n,$$

где целое число n-порядок числа a, а основание числа a_0 находится в промежутке $[1;10[$. Например, приведённое выше число 380000 следует записывать в виде $3{,}8 \cdot 10^5$, если оно имеет две значащие цифры, или $3{,}80 \cdot 10^5$, если оно имеет три значащие цифры и т.д.

Если приближённое значение физической величины содержит лишние или недостоверные цифры, то его округляют. При этом руководствуются следующими правилами.

Последняя сохраняемая цифра не изменяется, если:

- первая отбрасываемая цифра, считая слева направо, меньше 5;
- первая отбрасываемая цифра, равная 5, получилась в результате предыдущего округления в большую сторону.

Последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если:

- первая отбрасываемая цифра больше 5;
- первая отбрасываемая цифра, считая слева направо, равна 5 при отсутствии предыдущих округлений или при наличии предыдущего округления в меньшую сторону.

Округление следует выполнять сразу до желаемого количества значащих цифр, а не по этапам, что может привести к ошибкам.

При выполнении различных математических операций с приближёнными числами надлежит руководствоваться следующими правилами:

- при сложении и вычитании в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков;
- при умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством значащих цифр;
- результат расчёта значений функций x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$ некоторого приближённого числа x должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе x.

Если некоторые приближённые числа содержат больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень и т.д.), чем другие, то их предварительно округляют, сохраняя только одну лишнюю цифру.

7.3. Правила округления значений погрешности и результата измерений

При вычислении погрешности, особенно при пользовании электронным калькулятором, значения погрешностей первоначально получают с большим числом знаков. Однако зачастую исходными данными для расчёта являются нормируемые значения погрешностей средств измерения (приборов), которые указываются всего с одной или двумя значащими цифрами. Вследствие этого и в окончательном значении рассчитанной погрешности должны быть оставлены только первые одна-две значащие цифры. При этом приходится учитывать следующее обстоятельство. Если первоначально полученное число начинается с цифры 1 или 2, то отбрасывание второго знака приводит к очень большой ошибке (до 30 – 50% от полученного при этом округлении результата), что недопустимо. Например, если вычисление погрешности приводит к результату 0,14, то её округление до 0,1 изменяет величину погрешности на целых 40%. Если же первоначально полученное число начинается с цифры 9, то сохранение второй значащей цифры, то есть указание погрешности, например, 0,94 вместо 0,9, является дезинформацией, так как исходные данные не обеспечивают такой точности.

Исходя из этого, на практике установилось следующее правило: если полученное число начинается с цифры, равной или большей, чем $\sqrt{10} \approx 3$, то в нём сохраняется лишь одна значащая цифра; если же оно начинается с цифры, меньшей 3, то есть с цифры 1 или 2, то в нём сохраняется две значащие цифры. В соответствие с этим правилом установлены и нормируемые значения погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 указываются две значащие цифры, но в числах 0,5; 4; 6 указывается один знак.

В итоге, можно сформулировать следующие **три правила округления** рассчитанного значения погрешности и полученного результата измерения.

1. Погрешность результата измерения округляется до двух значащих цифр, если первая из них – 1 или 2 и до одной значащей цифры, если она равна 3 и более.
2. Результат измерения округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округлённое значение погрешности.
3. Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одной – двумя запасными значащими цифрами.

Например, один и тот же результат, в зависимости от погрешности, запишется в виде:

$$x = (1{,}2 \pm 0{,}3); \qquad x = (1{,}24 \pm 0{,}04); \qquad x = (1{,}243 \pm 0{,}012) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, последняя из указанных цифр (или даже две из них) оказывается сомнительной, а остальные – достоверными.

Ещё пример. На вольтметре класса точности 2,5 с пределом измерения 300В был получен отсчёт измеряемого напряжения $U = 267{,}5$В.

По классу точности определяем абсолютную погрешность согласно формуле (4.3):

$$\Delta_U = \frac{2.5 \cdot 300}{100} = 7{,}5\,\text{В}.$$

Так как в Δ_U первая значащая цифра равна 7 (больше трёх), то при записи окончательного результата она должна быть округлена по обычным правилам округления до первой значащей цифры, т.е. $\Delta_U \approx 8\,\text{В}$, а полученное значение $U = 267{,}5\,\text{В}$ должно быть округлено до того же десятичного разряда, которым оканчивается округлённое значение погрешности, то есть в нашем примере до единиц вольт.

Таким образом, окончательный результат должен быть записан в виде:

$$U = (268 \pm 8)\,\text{В},$$

или в стандартной форме:

$$U = (2{,}68 \pm 0{,}08) \cdot 10^2\,\text{В}.$$

7.4. Установление зависимостей физических величин

Когда устанавливается зависимость одной величины от другой и сравнивается с теоретически ожидаемой зависимостью, то обычной является практика построения линейных зависимостей. Одна из причин применения этого правила лежит в нашем восприятии: различить две близкие по форме кривые линии весьма непросто, а прямая линия легко «узнается» среди других линий.

Рассмотрим случай, когда погрешность имеет только величина y. На практике этот случай встречается довольно часто. (Более общий случай требует существенно усложненной обработки). Пусть теоретическая модель предсказывает линейную зависимость. Задача состоит в том, чтобы «через» экспериментальные точки провести наилучшим образом прямую линию и сравнить с теоретически ожидаемой зависимостью.

Пусть искомая наилучшая прямая имеет вид

$$y = ax + b, \qquad (7.6)$$

где угловой коэффициент (тангенс угла наклона) a и величина смещения b подлежат определению с некоторыми среднеквадратичными погрешностями σ_a и σ_b.

Для этой цели применяется, например, метод наименьших квадратов – один из стандартных методов математической статистики. В этом методе наилучшие значения параметров прямой a и b находятся из условия минимума суммы квадратов величин отклонений $d_i = y_i - (ax_i + b)$

$$S = \sum (y_i - ax_i - b)^2 \tag{7.7}$$

Метод минимизации суммы квадратов отклонений, предложенный еще Лежандром в 1806 г, сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum \{-2x_i (y_i - ax_i - b)\} = 0 \tag{7.8а}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum \{-2(y_i - ax_i - b)\} = 0 \tag{7.8б}$$

Решение системы уравнений несложно. Результаты получаются следующие:

- наилучшая прямая проходит через центр тяжести всех экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \ , \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i \tag{7.9}$$

- параметры наилучшей прямой равны

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{D} \ , \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \ , \qquad D = \sum (x_i - \bar{x})^2 \ . \tag{7.10}$$

Математическая статистика дает также среднеквадратичные погрешности в определении параметров a и b:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)\cdot D}} \ , \qquad \sigma_b = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)}} \tag{7.11}$$

Если согласно теоретической модели ожидаемая прямая проходит через начало координат, т.е.

$$y = kx \tag{7.12}$$

то наилучшее значение углового коэффициента k и его среднеквадратичная погрешность σ_k определяются соотношениями:

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}\ , \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a x_i)^2}{(n-1)\cdot x_i^2}} \qquad (7.13)$$

Приведенные формулы не требуют собственно построения графика. Они дают строгий аналитический способ статистической обработки экспериментальных данных. Существует упрощенный способ оценки параметров наилучшей прямой по данным, представленным на графике, который работает тем лучше, чем больше имеется экспериментальных точек на графике (более 15-20 точек).

Для определения погрешностей σ_a, σ_b и σ_k поступим следующим образом. «Рабочий участок» оси абсцисс (участок, на котором расположены экспериментальные точки) разбиваем на три равные части, и в дальнейшем не будем обращать внимание на среднюю ее часть.

Поворачиваем наилучшую прямую линию вокруг центра тяжести $(\bar{x}, \bar{y})$ таким образом, чтобы на левом участке *выше* прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем под ней, а на правом участке – наоборот. Затем поворачиваем прямую линию таким образом, чтобы на левом участке *ниже* прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем над ней, а на правом участке – наоборот. Обозначим разницу в угловых коэффициентах через Δa. Тогда

$$\sigma_a = \Delta a / \sqrt{n}\ . \qquad (7.14)$$

Теперь смещаем наилучшую прямую вниз параллельно самой себе таким образом, чтобы над ней было вдвое больше точек, чем под ней. Затем смещаем прямую вверх параллельно самой себе таким образом, чтобы под ней было вдвое больше точек, чем над ней. Обозначим разницу в величине смещения через Δb. Тогда

$$\sigma_b = \Delta b / \sqrt{n}\ . \qquad (7.15)$$

В случае ожидаемой зависимости вида (7.12) «рабочий участок» оси абсцисс (это весь диапазон оси абсцисс) разбиваем также на три равные части, и в дальнейшем не будем обращать внимание на первую - левую, ближнюю к началу координат, ее часть.

Поворачиваем наилучшую прямую линию вокруг начала координат таким образом, чтобы *над ней* (т.е. над второй и третьей частью «рабочего участка») выше прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем под ней. Затем поворачиваем прямую линию таким образом, чтобы *под ней* оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем над ней. Обозначим разницу в угловых коэффициентах через Δk. Тогда

$$\sigma_k = \Delta k / \sqrt{n}. \tag{7.16}$$

Применение этих несложных правил дает оценки величин погрешностей σ_a, σ_b и σ_k вполне удовлетворительные при выполнении учебных лабораторных работ.

8. ОФОРМЛЕНИЕ ПРОТОКОЛА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

8.1. Содержание протокола лабораторной работы

Экспериментальные исследовательские работы, как правило, требуют многодневных и многомесячных подготовок, собственно эксперимент также может длиться не один день. Поэтому ведению лабораторного журнала, где фиксируются (протоколируются) все моменты, связанные с экспериментом, придается самое серьезное внимание. В истории науки были нередки случаи, когда именно фиксация незначительных, казалось, деталей приводила в последующем к важным научным открытиям.

После проведения всех экспериментов, обработки результатов измерений составляется полный отчет, который в заключительной части должен содержать выводы по исследованию.

При проведении учебных лабораторных работ вся подготовительная работа (в том числе выявление и устранение методических погрешностей) уже проделана преподавателями. И соответствующие записи имеются в лабораторных журналах (в журналах паспортизации работ). Студентам остается запротоколировать и отчитаться по проделанной лабораторной работе.

Протокол лабораторной работы содержит определенные пункты, в которых фиксируются все существенные моменты, связанные с проведением измерений, их обработкой и представлением результатов. Протокол объединен с отчетом, поэтому в конце протокола приводится вывод по лабораторной работе.

Формат листов протокола – А4.

Титульный лист к протоколу фиксирует организацию и место проведения лабораторной работы, название работы, имена авторов, дату. Пример оформления титульного листа приведен в Приложении.

Протокол по лабораторной работе содержит следующие обязательные пункты.

1. Цели лабораторной работы.
2. Таблица приборов.
3. Рабочие формулы и исходные данные.
4. Таблицы измерений.
5. Графики зависимостей.
6. Выводы .

Все, что возможно, студенты должны оформить еще до выполнения лабораторной работы, при подготовке к ней.

Опишем подробно содержание каждого из пунктов протокола.

8.2. Формулировка целей лабораторной работы

В учебных лабораторных работах преследуются лишь два типа целей - либо измерение непосредственно или косвенно некоторой физической величины (физической константы), либо установление некоторой зависимости и сравнение её с модельной теоретической зависимостью.

Поэтому формулировка целей к лабораторной работе должна начинаться только со слов «Измерить …» или «Установить зависимость … и сравнить с теоретически ожидаемой …». Целей может быть несколько.

Формулировка целей – это важный момент, так как лишь точно и кратко сформулированные цели позволяет студенту сделать правильный вывод.

Заметим, что целью не может быть «Исследование явления … », так как возможностей для всестороннего исследования просто нет в лабораторных установках. Целью не может быть «Научиться пользоваться … », если это не специальная лабораторная работа по изучению конкретного измерительного средства (осциллографа, например).

8.3. Таблица приборов

Этот пункт протокола фиксирует те измерительные приборы, с помощью которых проводятся измерения. Следовательно, в таблице приборов должны быть сведения о конкретных приборных (инструментальных) погрешностях.

Пример таблицы приборов

№	*Наименование*	*Фабр.№*	*Тип или система*	*Класс точности*	*Пределы измерения*	*Цена деления*	*Предел допускаемой погрешности*
1	Вольтметр	07388	магнитоэлектр.	1	200 В	2В	2 В
2							

8.4. Рабочие формулы и исходные данные

В отчете о лабораторной работе должны содержаться рабочие формулы. Рабочие формулы – это:

1. Расчетные формулы.
2. Проверяемые теоретические зависимости.

Чтобы из результатов измерений извлечь полезную информацию, часто необходимо, исходя из измеренных величин, рассчитать некоторые другие величины. Употребляемые при расчете формулы называются расчетными формулами. В описании каждой лабораторной работы имеется несколько формул. Не все из них – расчетные, а только те, в которые мы подставляем при расчете численные значения. Например: допустим, у нас есть шарик, изготовленный из материала известной плотности ρ, и нужно определить его радиус, но из инструментов есть только весы. Формула, связывающая радиус с массой, имеет вид:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3. \tag{8.1}$$

Если из формулы (1) выразить r через m, то получим:

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{m}{\rho} \right)^{1/3}. \tag{8.2}$$

Чтобы определить r, следует измеренное значение массы подставить в (8.2). Исходная же формула (8.1) при численных расчетах не используется, и расчетной не является.

Среди расчетных формул должны быть и формулы для погрешностей косвенных измерений; их часто необходимо выводить самому, по правилам вычисления погрешностей косвенных измерений.

Если мы хотим сравнить с результатами эксперимента какую-либо теоретическую зависимость, то среди рабочих формул должна быть и формула, выражающая эту зависимость.

Исходные данные – это величины, входящие в расчетные формулы, которые студенты измерять не должны. Они заданы заранее, при конструировании установки, на которой выполняется лабораторная работа, и обычно записаны рядом с установкой. Исходные данные могут содержать погрешности, которые должны учитываться при обработке результатов измерений. Исходные данные должны быть записаны в протоколе до таблицы измерений, в то же время, при необходимости, они могут входить и в таблицу измерений.

В протоколе лабораторной работы должны содержаться все необходимые для расчетов рабочие формулы – как те, которые есть в описании работы, так и те, которые придется вывести самим. Формул, которые не являются рабочими, в протоколе работы быть не должно.

8.5. Таблицы измерений

Данные, полученные при измерениях, и результаты расчетов (а часто и промежуточные этапы расчетов), записываются в таблице измерений.

Правила построения таблиц измерений таковы:

1. Таблица измерений должна обязательно содержать непосредственно измеряемые величины (первичные данные). Их следует заносить в таблицу

по принципу «как вижу», без пересчета в уме в другие единицы, часто ведущего к ошибкам.

2. Для последующих промежуточных расчетов следует предусмотреть в таблице одну или несколько колонок.
3. Величины, которые наносятся на графики, и другие конечные результаты расчетов также должны быть обязательно включены в таблицу.
4. Желательно, чтобы величины следовали в таблице слева направо в логической последовательности: сначала причина (величина, которую задает экспериментатор), потом следствие (измеряемая или вычисляемая величина).
5. Исходные данные, которые для всех измерений одни и те же, в таблицу лучше не включать.
6. Обычно таблицы должны также содержать погрешность измеряемой величины.
7. Первые две строки таблицы измерений включают обозначения измеряемых величин и единицы измерения. При необходимости единицы содержат множители типа 10^n.

Приведем пример оформления таблицы измерений. В лабораторной работе №2 надо определить начальную скорость пули v, выброшенной пружинным пистолетом, в зависимости от ее массы m. Исходными данными в этой работе являются m - массы пуль. Таблица измерений должна начинаться именно с них. Непосредственно измеряемой величиной является x - смещение баллистического маятника. Для каждой пули проводится серия из трех измерений, и определяется их среднее значение $\bar{x}$ и СКО σ_x. Скорость пули v вычисляется по формуле $v = k\bar{x}$. В этой формуле k зависит от массы пули и известно заранее, то есть также относится к исходным данным. Записывая сначала исходные данные, затем – непосредственно измеряемые величины, и после них – величины, вычисляемые, исходя из непосредственно измеренных, видим, что входящие в таблицу величины должны располагаться в следующем порядке:

$$m, k, x, \bar{x}, \sigma_x, v.$$

Теоретическая зависимость, которая проверяется в этой работе, имеет вид $v^{-2} = a + bm$, где a и b зависят от массы и жесткости пружины. Значит, придется строить график зависимости v^{-2} от m. Следовательно, величина v^{-2} и ее СКО $\sigma_{v^{-2}}$ также должны быть в таблице, после величин из списка, приведенного раньше. Тогда пример таблицы измерений к этой работе выглядит так:

№	m	k	x	$\overline{x}$	σ_x	v	v^{-2}	$\sigma_{v^{-2}}$	$v^{-2} \pm \sigma_{v^{-2}}$
	$кг \cdot 10^{-2}$	$с \cdot 10^{-2}$	$м \cdot 10^{-3}$	$м \cdot 10^{-3}$	$м \cdot 10^{-3}$	$м/с$	$(с/м)^2 \cdot 10^{-2}$	$(с/м)^2 \cdot 10^{-2}$	$(с/м)^2 \cdot 10^{-2}$
1	13.0 ± 0.1	0.951 ± 0.006	34	34.7	2	3.30	9.18	1.1	9.2 ± 1.1
			33						
			37						
2	6.2 ± 0.1	1.96 ± 0.03	19						
			20						
			19						
3									

8.6. Графики

Часто зависимость одной величины (обозначим ее, например, как y) от другой (обозначим ее как x) бывает удобно представить в виде графика. График наиболее наглядно отражает искомую зависимость.

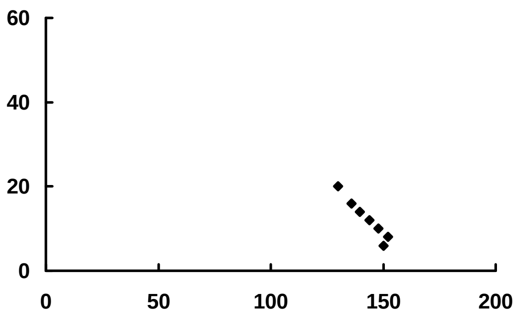
Графики должны быть построены так, чтобы можно было легко извлечь нужную информацию. Основные правила построения графиков таковы:

График строится на миллиметровой бумаге. Размер графика обычно примерно один тетрадный лист (и в любом случае не менее половины листа).

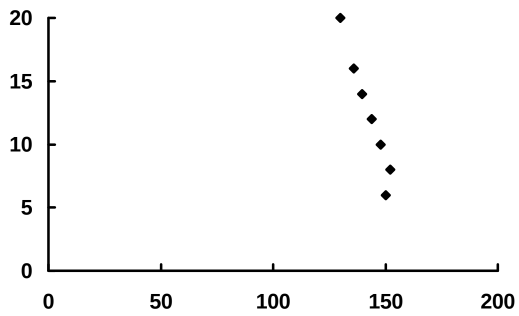
По горизонтальной оси обычно откладывают величину, которую задает экспериментатор (x), а по вертикали величину, которую он определяет (y). Иначе говоря, по горизонтали откладывается причина, а по вертикали следствие.

Для проверки теоретической зависимости на осях графика обычно откладывают такие величины, чтобы график получился в виде прямой линии. Например, пусть имеется простейший колебательный контур, состоящий из емкости C и индуктивности L. Допустим, мы можем менять ёмкость и измерять период колебаний, $T(C)$. Эта зависимость, как известно из теории, должна иметь вид $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Тогда, чтобы получить прямую, следует строить график, на осях которого отложены не C и T, а $\sqrt{C}$ и T , или же C и T^2.

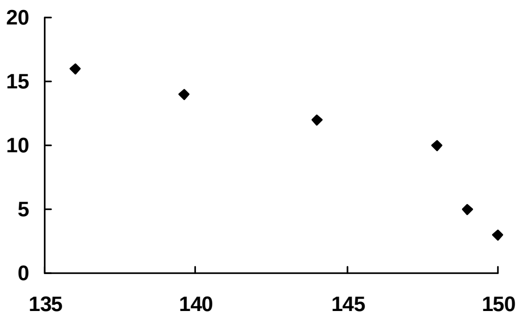
Масштаб графика должен быть выбран так, чтобы нанесенные на график точки занимали весь лист, а не сливались друг с другом. Если же, например, по оси X точки расположены далеко, а по оси Y близко, это также неправильно, так как при этом угол наклона проведенной через них прямой получается близким к нулю или к 90 градусам, и извлечь из него какую-либо информацию трудно или невозможно. При этом начало отсчета на графике не обязано совпадать с точкой $x = y = 0$. Однако если проверяется зависимость типа $y = ax$, то точка $x = y = 0$ должна присутствовать на графике. Примеры правильно и неправильно построенных графиков изображены на рисунке:



Неправильно, т.к.
точки почти сливаются

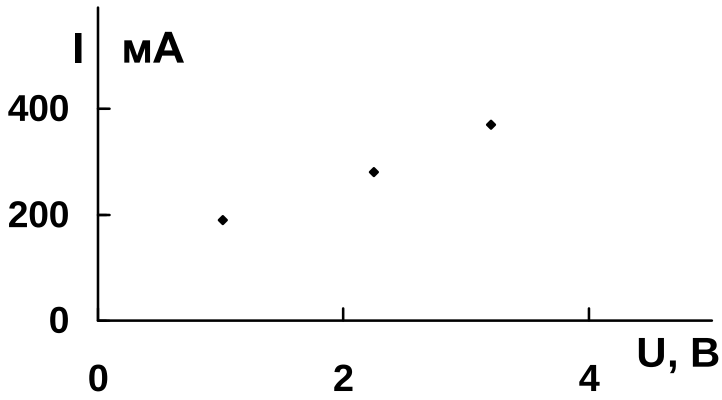


Неправильно, т.к. угол
наклона слишком велик



Правильно

Масштабы по осям должны быть простыми (1 единица измерения на деле-



ние, 0.1, 10,100 и т.д. ед. изм./деление), чтобы при построении не производить сложных вычислений. Возможны также величины, кратные 2 и 5 (0.2, 0.5 ед. изм./ деление и т.п.).

У осей должны быть проставлены обозначения и единицы измерения соответствующих величин. По осям откладываются только масштабные единицы, а значения, полученные экспериментально, наносятся на график. К каждой точке на графике обычно пристраиваются оценки стандартных отклонений (доверительный интервал) по оси Y, а в некоторых случаях и по оси X. Доверительные интервалы должны быть вычислены при одном и том же значении доверительной вероятности. Пример:

Отметим также, что:

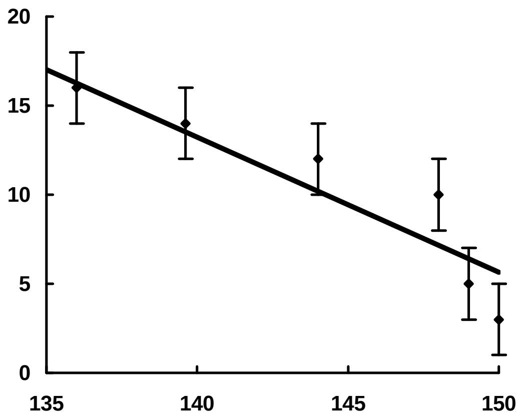
1. стрелки на осях координат не рисуются;
2. метки на осях наносятся со стороны поля графика; цифровые обозначения проставляются только для крупных единиц масштаба и соответствующие им метки делаются длиннее;
3. никаких линий и отметок, поясняющих построение точек, на график наносить нельзя, так как они загромождают рисунок и мешают анализировать результат.

Иногда на графике проводят теоретическую кривую. Ее следует проводить карандашом, чтобы при необходимости легко было стереть.

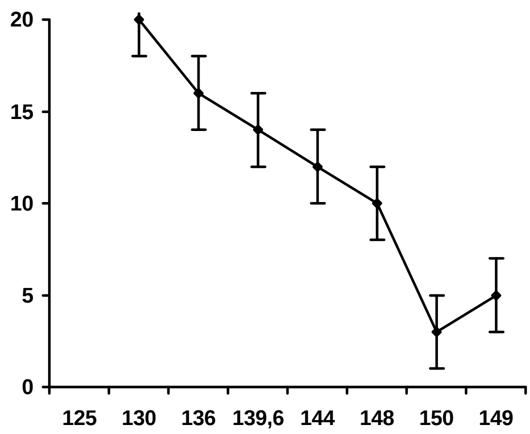
Экспериментально найденные зависимости изображают в виде плавных кривых линий (согласующихся с ожидаемыми теоретическими зависимостями) таким образом, чтобы измеренные средние значения величин одинаково часто встречались по одну и по другую сторону от кривой (процедура сглаживания результатов измерений). Причем, экспериментальная кривая (или прямая линия, если ожидаемая теоретическая зависимость – прямая) нигде не должна выходить за пределы отмеченных доверительных интервалов физических величин.

При невозможности изображения указанным образом плавных кривых (или прямых) линий в выводах к лабораторной работе приводится заключение о том, что экспериментально установленная зависимость не соответствует ожидаемой теоретической зависимости.

Ни в коем случае экспериментальная зависимость не должна изображаться в виде ломаной линии из прямых отрезков, соединяющих измеренные средние значения величин.



Правильно



Неправильно

8.7. Выводы

В этом пункте кратко формулируются итоги выполнения лабораторной работы в соответствии с целями работы.

Например, если целью работы являлось измерение некоторой физической величины, то в выводах приводится найденное в результате измерений и обработки результатов измерений значение физической величины с указанием погрешности измерений.

Если целью работы являлось установление некоторой зависимости физических величин и сравнение с теоретической зависимостью, то вывод может заключаться в том, что установленная в лабораторной работе зависимость величин с учетом погрешностей измерений не противоречит ожидаемой теоретической зависимости. Или вывод может заключаться в том, что экспериментально установленная зависимость не соответствует ожидаемой теоретической зависимости. В этом случае в выводах необходимо указать на возможный источник такого расхождения.

9. ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson G.P., Proc.Roy.Soc. V. 117. P, 600; V. 119. P. 651 (1928).
2. Портис А. Физическая лаборатория. – М.: Наука, 1972.
3. Сквайрс Дж. Практическая физика. – М.: Мир, 1971.
4. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука, 1985.
5. Новицкий Н.В., Зографф И.А. Оценка погрешностей результата измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.
6. ГОСТ Р50779.21–96. Статистические методы. Правила определения и методы расчёта статистических характеристик по выборочным данным. Ч.1. Нормальное распределение. – М.:Издательство стандартов, 1996.
7. Борисенко В.Е., Дерябин В.М., Сапожников А.И., Семихин В.И. Лабораторный практикум по физике. – Тюмень: Издательство ТГУ, 2002.

10. ПРИЛОЖЕНИЯ

10.1. Основные расчётные формулы

ПРЯМЫЕ МНОГОКРАТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ($n \geq 30$)

Среднее значение измеренной величины (выборочное среднее):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Среднеквадратичная погрешность отдельного измерения (выборочное среднеквадратичное отклонение):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} .$$

Результат измерения с доверительной вероятностью 68% равен:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x / \sqrt{n} .$$

ПРЯМЫЕ «ОДНОКРАТНЫЕ» ИЗМЕРЕНИЯ ($n \leq 3$)

При известной оценке среднеквадратичной погрешности σ_x результат измерения с доверительной вероятностью 68% равен:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x .$$

РЕЗУЛЬТАТ ИЗМЕРЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРИБОРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Класс точности прибора задан в виде относительной погрешности δ:

$$\delta = \frac{\Delta_x}{x} \cdot 100\% .$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности равен:

$$\Delta_x = \delta \cdot \frac{x}{100}.$$

Класс точности прибора задан в виде приведенной погрешности γ:

$$\gamma = \frac{\Delta_x}{x_{пред}} \cdot 100\%.$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности равен:

$$\Delta_x = \gamma \cdot \frac{x_{пред}}{100}.$$

Класс точности задан в виде относительной погрешности $\gamma_к / \gamma_н$:

$$\delta = \left\{\gamma_к + \gamma_н \left(\frac{x_{пред}}{x} - 1\right)\right\}, \%.$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности равен:

$$\Delta_x = \{(\gamma_к - \gamma_н) \cdot x + \gamma_н \cdot x_{пред}\} / 100.$$

С доверительной вероятностью 68% результат измерения равен

$$x = \bar{x} \pm \sqrt{\sigma_x^2 + \left(\frac{\Delta_x}{3}\right)^2}.$$

КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть величины $x, y, z, \ldots$ получены в результате прямых измерений

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x,\ y = \bar{y} \pm \sigma_y,\ z = \bar{z} \pm \sigma_z, \ldots.$$

Пусть величина F получена косвенно путем пересчета этих величин, то есть – это функция переменных $x, y, z, \ldots$:

$$F = F(x, y, z, \ldots)$$

Тогда с доверительной вероятностью 68% результат косвенного измерения равен:

$$F = \overline{F} \pm \sigma_F,$$

где

$$\overline{F} = F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots),$$

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \cdots}.$$

ПРИМЕРЫ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Если

$$F = x - y,$$

то

$$\overline{F} = \overline{x} - \overline{y}; \qquad \sigma_F = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Если

$$F = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{z^{\gamma}},$$

то

$$\overline{F} = \frac{\overline{x}^{\alpha} \overline{y}^{\beta}}{\overline{z}^{\gamma}}; \qquad \sigma_F = \overline{F}\sqrt{\left(\alpha\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\beta\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}.$$

10.2. Титульный лист протокола

Министерство образования и науки Российской Федерации

Новосибирский Государственный

Технический Университет

Кафедра ПиТФ

Лаборатория №201

Лабораторная работа №0

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

Факультет:	*ФТФ*
Группа:	*ФТ-41*
Студентка	*Бедненькая О.И.*
Преподаватель:	*Зверь Г.А.*
Дата выполнения работы:	*02.09.04*
Отметка о защите:	

Новосибирск, 2004