ФИЗИКА

Методические указания
к выполнению контрольной работы № 6
для студентов ИДО

Новосибирск
2000

Составители: М.И.Дивак, М.Ф.Кузнецов,
А.А.Погорельская, Л.М.Родникова,
Н.Д.Третьякова, В.В.Христофоров

Рецензент доц. каф. ПиТФ А.А.Харьков

Работа подготовлена на кафедре
общей физики

Новосибирский государственный
технический университет, 2000 г.

Вопросы, которые выносятся на экзамен
по данному разделу

1. **Опытное обоснование корпускулярно-волнового дуализма вещества. Гипотеза де Бройля, волны де Бройля.***
2. **Соотношение неопределенностей Гейзенберга как проявление корпускулярно-волнового дуализма вещества.**
3. **Волновая функция, ее физический смысл. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.**
4. **Решение уравнения Шредингера для частицы в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме.**
5. **Туннельный эффект.**
6. Квантовый гармонический осциллятор.
7. Применение уравнения Шредингера для описания атома водорода.
8. **Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа, их физический смысл. Спин электрона. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям.**
9. **Расщепление энергетических уровней атомов при образовании молекул.**
10. **Тепловые колебания кристаллической решетки. Теплоемкость кристаллической решетки. Фононы.**
11. **Функция распределения Ферми-Дирака. Ее физический смысл. Вырождение электронного газа.**
12. Понятие о квантовой статистике Бозе-Эйнштейна.
13. Влияние температуры на распределение электронов проводимости в металле по энергиям. Теплоемкость электронного газа.
14. **Электропроводность металлов. Зависимость от температуры.**
15. **Элементы зонной теории. Расщепление энергетических уровней атомов и образование энергетических зон в кристаллах.**
16. **Металлы, диэлектрики и полупроводники с точки зрения зонной теории твердого тела.**
17. **Собственные полупроводники. Электропроводность и ее зависимость от температуры.**
18. **Примесные полупроводники. Электропроводность и ее зависимость от температуры.**
19. **Фотопроводимость полупроводников.**
20. **Контакт электронного и дырочного полупроводника (p-n переход), его вольт-амперная характеристика. Физические процессы в p-n переходе.**
21. Принцип работы транзистора.
22. **Состав ядра. Дефект массы и энергия связи ядра. Взаимодействие нуклонов, ядерные силы. Устойчивость ядер.**
23. **Естественная радиоактивность. Закон радиоактивного распада.**
24. **Ядерные реакции и законы сохранения. Применение ядерной энергии в народном хозяйстве.**

25. Реакции деления и синтеза атомных ядер.
26. Элементарные частицы, их классификация и взаимная превращаемость.

∗Примечание: выделены основные вопросы.

Список литературы

1. Савельев И.В., Курс общей физики. - М.: Наука, 1989 – Т.3; 1998 – кн.5.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. - М.: Высшая школа, 1985, 1990, 1994, 1997, 1998, 1999.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. - М.: Высшая школа, 1989, 1999.
4. Епифанов Г.И. Физика твердого тела. - М.: Высшая школа, 1977.
5. Бушманов Б.Н., Хромов Ю.А. Физика твердого тела. - М.: Высшая школа, 1971.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.: Высшая школа, 1981, 1988.

Содержание контрольной работы №6

Темы	номера задач
1. Длина волны де Бройля	601 - 610
2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	611 - 620
3. Уравнение Шредингера	621 - 630
4. Теплоемкость твердых тел	631 - 640
5. Квантовая статистика Ферми-Дирака	641 - 650
6. Электропроводность твердых тел	651 - 660
7. Ядерные реакции. Радиоактивность	661 - 670

Рассмотрим элементы теории по каждой из указанных тем и примеры решения задач.

Тема 1. ДЛИНА ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ.

Изучение природы света показало, что наряду с волновыми он обладает корпускулярными свойствами. Таким образом, в оптических явлениях проявляется корпускулярно-волновой дуализм (двойственность) света. В 1924г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что дуализм не является особенностью только оптических явлений, а имеет универсальное значение. Движение любой частицы, согласно де Бройлю, является волновым процессом, длина волны которого

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1.1)$$

где p - импульс частицы, h - постоянная Планка.

Гипотеза де Бройля была вскоре подтверждена экспериментально (опыты Дэвиссона и Джермера 1927г.). Волновыми свойствами обладают все тела, но проявляются они только для частиц с малой массой (микрочастиц), так как для них длина волны де Бройля достаточно велика. Причем, микрочастица должна находиться в условиях, когда ее длина волны де Бройля будет соизмерима с размерами той области пространства, в которой частица движется. Например, при движении электрона внутри телевизионной трубки, линейные размеры которой намного больше длины волны де Бройля электрона, учитывать волновые свойства электрона не имеет смысла. При движении же электрона внутри кристалла, расстояние, между атомами которого по порядку величины равно его длине волны де Бройля, учитывать волновые свойства электрона необходимо.

Задача. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, имеющего кинетическую энергию: а) W_1 = 10 кэВ; б) W_2 = 1 МэВ.

Дано: W_1 = 10 кэВ $=10^4$ эВ = $10^4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж

W_2 = 1 МэВ $=10^6$ эВ = $10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж

———————————————————————

λ_1 – ?, λ_2 – ?

Решение. Длина волны де Бройля определяется по формуле (1.1). Импульс частицы p для скоростей, малых по сравнению со скоростью света в вакууме ($v \ll c$), равен

$$p = mv .$$

Учитывая, что импульс можно выразить через кинетическую энергию $mv = \sqrt{2Wm}$, для длины волны де Бройля получаем

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm}} \tag{1.2}$$

Если же скорость частицы нельзя считать малой по сравнению со скоростью света в вакууме, то импульс частицы, согласно релятивистской теории, равен

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

где m_0 - масса покоя частицы.

Выражение импульса через кинетическую энергию в этом случае имеет вид

$$p = \sqrt{2Wm_0 + \frac{W^2}{c^2}} .$$

Длина волны де Бройля, следовательно, равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + \frac{W^2}{c^2}}} . \qquad (1.3)$$

Видно, что формула (1.3) переходит в формулу (1.2), если членом $\frac{W^2}{c^2}$ по сравнению с членом $2Wm_0$ можно пренебречь.

Оценка показывает, что в случае а) член $\frac{W^2}{c^2}$ составляет менее 1% от члена $2Wm_0$. Следовательно, пользуемся формулой (1.2), из которой получаем

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 12{,}2 \cdot 10^{-12}\, м .$$

Для случая б) пользуемся формулой (1.3),из которой получаем

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} + \frac{\left(10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}}} = 0{,}87 \cdot 10^{-12}\, м .$$

Ответ. а) $\lambda = 12{,}2 \cdot 10^{-12}\, м$; б) $\lambda = 0{,}87 \cdot 10^{-12}\, м$.

Тема 2. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

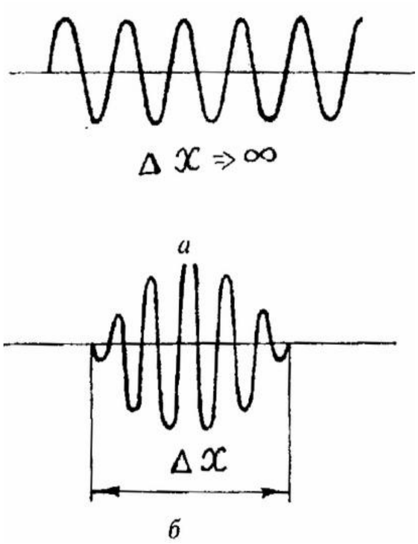

Рис. 2.1. Монохроматическая волна и волновой пакет

В классической механике точность определения координаты и импульса материальной точки в один и тот же момент времени в принципе не ограничена. Волновые же свойства микрочастиц ограничивают эту точность. Дадим качественное объяснение этого утверждения. Определенная длина волны есть характеристика идеализированной бесконечной по протяженности монохроматической волны, описываемой синусоидой (Рис. 2.1а). Любая же реальная волна, в том числе волна де Бройля, занимает конечную область пространства, как говорят, является волновым пакетом (Рис 2.1б). Математически волновой пакет может быть представлен как результат суперпозиции синусоид с различными длинами волн, численные значения которых лежат в определенном диапазоне $\Delta\lambda$. Поскольку длина волны де Бройля и импульс частицы связаны соотношением (1.1), то ясно что, если длины волн лежат в некотором диапазоне $\Delta\lambda$, то в некотором диапазоне Δр лежат и значения импульса. Величина $\Delta\lambda$ а, следовательно, Δр растет при уменьшении размеров волнового пакета Δx. Размер волнового пакета характеризует неопределенность координаты микрочастицы. Из сказанного следует, что уменьшение величины Δx приводит к увеличению неопределенности импульса Δр. Гейзенберг показал, что сделанное утверждение можно выразить с помощью системы неравенств, которые называются соотношениями неопределенности:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \tag{2.1}$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \tag{2.2}$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar, \tag{2.3}$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - неопределенность координат частицы; $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ - неопределенность проекций импульса на указанные оси координат; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ - постоянная Планка с чертой.

Соотношением неопределенности связаны также время пребывания частицы в некотором энергетическом состоянии Δt с неопределенностью энергии этого состояния ΔE :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \tag{2.4}$$

Применительно к электрону в атоме это означает следующее. В стационарном состоянии атом может находиться как угодно долго $\Delta t \to \infty$. Именно поэтому энергия этого состояния имеет вполне определенное значение $\Delta E_{стац} \to 0$. «Время жизни» возбужденного состояния атома имеет конечную величину порядка $\Delta t = 10^{-8}$с. Следовательно, неопределенность энергии этого состояния конечна: $\Delta E_{возб} \geq \dfrac{\hbar}{\Delta t}$. Если при переходе электрона из возбужденного состояния в стационарное атом испускает квант света (фотон), то энергия этого фотона будет иметь такую же неопределенность $\Delta E_{возб}$.

Задача. При переходе из возбужденного состояния в стационарное, атом за время $\tau = 10^{-8}$ секунды испустил фотон, длина волны которого $\lambda = 0{,}55$ мкм. Оцените величину неопределенности, с которой можно установить координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность его длины волны.

Дано: $\lambda = 0{,}55$ мкм $= 0{,}55 \cdot 10^{-6}$м.

$\tau = \Delta t = 10^{-8}$с.

———————

Δx – ? $\Delta\lambda/\lambda$ – ?

Решение. Неопределенность координаты можно оценить так: $\Delta x \sim c \cdot \Delta t$, где с – скорость света. Численно это дает $\Delta x \sim 3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-8} = 3$ м.

Для определения относительной неопределенности длины волны воспользуемся соотношением неопределенности Гейзенберга для энергии возбужденного состояния и времени пребывания в этом состоянии

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar\,. \qquad (2.5)$$

Знак равенства в этой формуле означает, что ищется минимально возможная неопределенность энергии ΔE. Выше отмечалось, что такую же неопределенность будет иметь и испущенный атомом фотон. Поскольку энергия фотона связана с частотой световой волны формулой $E_ф = h\nu$, то неопределенности энергии фотона соответствует неопределенность частоты равная

$$\Delta\nu = \Delta E / h\,. \qquad (2.6)$$

Частоту можно выразить через длину волны в вакууме $\nu = c/\lambda$. Используя эту формулу можно найти связь между дифференциалами частоты и длины волны:

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda\,.$$

Опуская знак минус, который означает, что увеличению частоты соответствует уменьшение длины волны, и, заменив знак дифференциала знаком неопределенности, получим

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda\,.$$

Подставляя последнее выражение в (2.6), а, также используя соотношение (2.5), имеем

$$\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{\hbar}{\Delta t \cdot h}\,.$$

Учитывая, что $h = 2\pi\hbar$, для относительной неопределенности длины волны фотона из последней формулы получаем

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi c\Delta t}\,.$$

Подставляя в это выражение численные значения, получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}55\cdot10^{-6}}{2\pi\cdot3\cdot10^{8}\cdot10^{-8}} \cong 3\cdot10^{-8}.$$

Ответ.~3 м, ~$3\cdot10^{-8}$.

Тема 3. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Второй закон Ньютона, являясь основным уравнением классической динамики, позволяет, зная начальные условия, рассчитывать положение и скорость частицы в любой момент времени. В микромире любая частица описывается волной де Бройля. Следовательно, необходимо иметь уравнение, с помощью которого можно рассчитывать параметры такой частицы-волны для любой точки пространства в любой момент времени. Такое уравнение было предложено Шредингером (1926г.):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)+U\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где m – масса частицы; U(x,y,z,t) – потенциальная энергия; $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица; t – время; x,y,z – координаты. Это уравнение является основным законом квантовой нерелятивистской механики.

Искомой величиной при решении этого уравнения является волновая Ψ – функция (пси – функция), которая в общем случае зависит от координат и времени Ψ(x,y,z,t). Сама Ψ – функция не имеет физического смысла. Физический смысл имеет квадрат модуля Ψ – функции $|\Psi|^2$, который равен плотности вероятности обнаружить частицу-волну в данной точке пространства в данный момент времени:

$$|\Psi|^2=\frac{dW}{dV},$$

где dW - вероятность обнаружить частицу в пределах бесконечно малого объема dV. Чтобы квадрат модуля пси – функции соответствовал своему физическому смыслу, сама пси - функция должна быть конечна, однозначна и непрерывна, а ее производные – конечны и однозначны. Кроме того, поскольку вероятность события, которое обязательно произойдет, в математике считается равной единиц, то этому, так называемому, условию нормировки должна удовлетворять и пси – функция.

Если потенциальная энергия частицы не зависит от времени, то Ψ – функцию можно заменить произведением двух функций, одна из которых зависит только от координат, а другая - только от времени:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\cdot\varphi(t).$$

Такая замена позволяет разбить уравнение Шредингера на два. Одно из них зависит только от координат, оно называется стационарным уравнением Шредингера, а второе – от времени. При этом решение второго уравнения, оказывается, не влияет на искомую плотность вероятности:

$$|\Psi(x,y,z,t)|^2=|\psi(x,y,z)|^2.$$

Стационарное уравнение Шредингера для одномерного движения частицы вдоль оси x имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi,$$

где E – полная энергия частицы-волны.

Рассмотрим с квантово-механической точки зрения задачу о поведении частицы, находящейся в ограниченной области пространства. Будем считать, что частица может перемещаться только вдоль оси координат x, причем, для выхода за пределы области необходимо сообщить частице бесконечно большую энергию. Иначе говоря, решим уравнение Шредингера для частицы, находящейся в одномерной, бесконечно глубокой потенциальной яме. Будем считать потенциальную энергию частицы внутри ямы равной нулю (рис. 3.1):

U = 0 при 0 ≤ x ≤ l;

U = ∞ при x < 0, x > l.

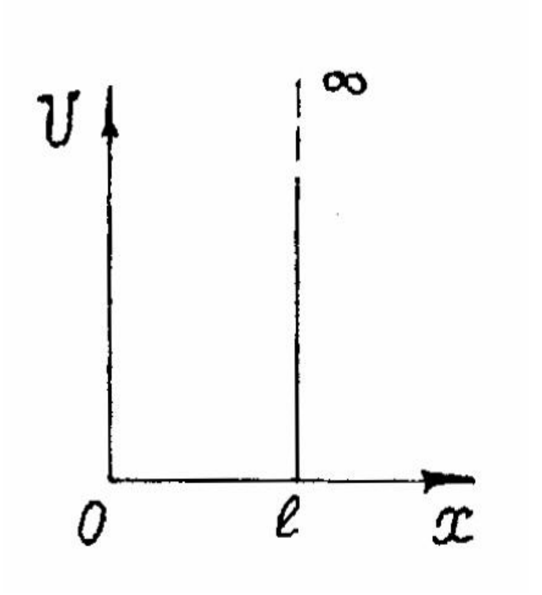

Рис. 3.1.
Зависимость потенциальной энергии от координаты

Тогда уравнение Шредингера для области 0 ≤ x ≤ l

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \text{, или } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0.$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E. \tag{3.1}$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha),$$

где $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$.

Поскольку частица не может выйти за пределы бесконечно глубокой потенциальной ямы, иначе говоря, стенки ямы абсолютно непроницаемы для частицы, вероятность обнаружить ее вне ямы вплоть до точек с координатами $x = 0$, $x = l$ равна нулю. Так как в одной точке пространства не может быть двух различных значений вероятности обнаружить частицу, то и внутри ямы у её границ вероятность обнаружить частицу также должна быть равна нулю. Это означает, что для пси-функции, квадрат модуля которой есть плотность вероятности, выполняются следующие граничные условия:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Используя первое граничное условие, получаем:

$\psi(0) = A\sin(k \cdot 0 + \alpha) = 0$, следовательно, $\sin\alpha = 0$, и $\alpha = 0$.

Используя второе граничное условие, получаем:

$\psi(l) = A\sin(kl) = 0$, следовательно, $kl = n\pi$,

где квантовое число n может принимать значения $n = 1,2,3...$(значение $n = 0$,допустимое с математической точки зрения, не имеет физического смысла, так как при этом пси-функция получается равной нулю внутри ямы для любых значений координаты x). Используя связь k и E (3.1), получим

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \cdot n^2.$$

Таким образом, при движении частицы-волны в ограниченной области пространства, уравнение Шредингера имеет решение лишь для определенных (квантовых) значений полной энергии. Они называются собственными значениями, а соответствующие им пси-функции – собственными функциями:

$$\psi(x) = A\sin(\frac{\pi n}{l}x).$$

Вероятность и плотность вероятности обнаружить частицу в бесконечно малой области одномерного пространства dx внутри ямы, следовательно, равны

$$dW = A^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)dx\,,\ |\psi|^2 = A^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right).$$

Графики зависимости плотности вероятности от координаты для различных значений квантового числа n показаны на рис.3.2.

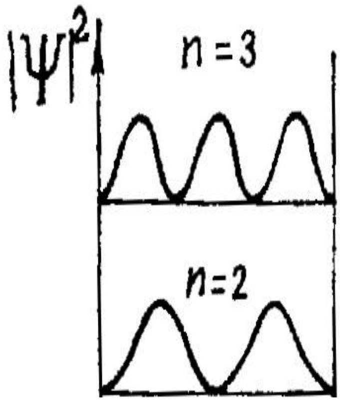

Рис. 3.2. Плотность вероятности нахождения частицы в яме

<u>Задача</u>. Собственные функции, описывающие состояние частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме, имеют вид $\psi(x) = A\sin(\frac{\pi n}{l}x)$. Используя условие нормировки, определите постоянную A.

<u>Решение</u>. Поскольку частица, согласно условию задачи, находится в некотором месте пространства, то вероятность обнаружить ее в диапазоне значений координаты $-\infty < x < +\infty$ равна единице:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\,dx = 1.$$

Область интегрирования можно ограничить диапазоном $0 < x < l$, так как вне этого диапазона пси – функция равна нулю:

$$\int_0^l\left|A\sin\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)\right|^2 dx = 1, \qquad A^2\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)dx = 1.$$

Отсюда следует

$$A^2\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4\pi n}\sin(\frac{2\pi n}{l}\cdot l)\right) = 1; \quad A^2\frac{l}{2} = 1; \quad A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

<u>Ответ</u>. $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$

Тема 4. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Молекулы, из которых состоят твердые тела, сильно связаны друг с другом и занимают положения соответствующие минимуму энергии их взаимодействия. Основной формой движения этих частиц являются колебания около положения равновесия. Амплитуда колебаний составляет незначительную часть расстояния между молекулами (≈ 0,05%).

Согласно классическим представлениям кристалл, состоящий из N молекул, которые рассматриваются как материальные точки, является системой с 3N колебательными степенями свободы. На каждую из них приходится в среднем энергия kT ($\frac{1}{2}kT$ в виде кинетической и $\frac{1}{2}kT$ в виде потенциальной энергии), где k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура. Из этих представлений вытекает закон Дюлонга – Пти, который утверждает, что молярная теплоемкость всех кристаллов одинакова и равна $3R$, где R - универсальная газовая постоянная. Этот закон, как показывает опыт, хорошо выполняется для многих химически простых тел в кристаллическом состоянии при высоких температурах. При понижении температуры теплоемкость убывает, стремясь к нулю при приближении абсолютной температуры кристалла к 0К. При этом вблизи нуля теплоемкость изменяется пропорционально T^3.

С точки зрения квантовой механики атомы химически простого твердого тела являются, при колебаниях с малой амплитудой, гармоническими квантовыми осцилляторами. Энергия такого осциллятора может принимать только дискретный набор значений $E = (n + 1/2)\hbar\omega$, где квантовое число $n = 0,1,2,3,\ldots$, причем изменение квантового числа n на единицу приводит к изменению энергии осциллятора на одинаковую величину, равную $\Delta E = \hbar\omega$. Величина $n = 0$ соответствует наименьшей, так называемой, нулевой энергии колебаний $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Теория теплоемкости кристаллических тел, учитывающая квантование колебательной энергии, была создана Эйнштейном и впоследствии усовершенствована Дебаем. Теория Эйнштейна дает лишь качественно верный ход зависимости теплоемкости от температуры вблизи 0К. Теория Дебая дает количественное соответствие опытным данным.

В отличие от Эйнштейна Дебай учел, что колебания атомов кристалла не являются независимыми. Смещение одного атома от положения равновесия приводит к смещению соседних с ним атомов. В результате в кристалле возникает бегущая волна. Дойдя до границ волна отражается и начинает распространяться навстречу падающей волне. При сложении этих волн образуются стоячие волны. Из теории стоячих волн известно, что длина бегущих волн λ, за счет сложения которых образуются стоячие волны, может иметь только дискретный набор значений, которые связаны с размерами кристалла L в направлении распространения волны формулой: $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$, где $n = 1,2,3,...$ - номер гармоники.

Каждая стоячая волна, с точки зрения квантовой механики, представляет собой квантовый гармонический осциллятор и обычно называется <u>модой</u>. Энергия моды с частотой ω_i складывается из порций, равных $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$. Эта порция (квант) энергии упругих колебаний среды называется <u>фононом</u>. Важно отметить, что в среде, состоящей из дискретных атомов, расположенных на расстоянии d, длина волны не может быть меньше чем $\lambda_{\min} = 2d$. Это означает, что циклическая частота упругих звуковых колебаний, возбуждаемых при распространении волн по кристаллу, не может быть больше чем

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi v_{зв}}{\lambda_{\min}}, \tag{4.1}$$

где $v_{зв}$ - скорость звуковых волн в кристалле (в теории Дебая $v_{зв}$ считается одинаковой для всех длин волн).

В упругой среде вдоль некоторого направления могут одновременно распространяться три разные независимые волны с одинаковыми циклическими частотами ω, отличающиеся поляризацией: одна продольная волна и две поперечные волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. Учитывая это, можно найти число различных мод, приходящихся на единицу объема кристалла, частоты которых лежат в диапазоне от ω до $\omega + d\omega$:

$$dN(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 v_{зв}^3} d\omega .$$

Максимальную частоту колебаний $\omega_{\max}$ находят, приравнивая полное число фононов к числу степеней свободы $3n$ в единице объема (n - число атомов в единице объема):

$$3n = \int_0^{\omega_{\max}} dN(\omega) = \int_0^{\omega_{\max}} \frac{3\omega^2}{2\pi^2 v_{зв}^3} d\omega = \frac{\omega_{\max}^3}{2\pi^2 v_{зв}^3} .$$

Отсюда

$$\omega_{\max} = v_{зв}^3 \sqrt{6\pi^2 n} .$$

Используя последнюю формулу, можно получить

$$dN(\omega) = 9n \frac{\omega^2}{\omega_{\max}} d\omega .$$

Теперь можно вычислить внутреннюю энергию тепловых колебаний единицы объема кристалла:

$$U = \int_0^{\omega_{\max}} < \varepsilon(\omega) > dN ,$$

где средняя энергия колебаний квантового осциллятора (моды) $< \varepsilon(\omega) >$, без учета нулевой энергии колебаний, как доказывается статистической физикой, равна

$$< \varepsilon(\omega) >= \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

где k - постоянная Больцмана.

Тогда удельная теплоемкость кристалла при постоянном объеме получается равной

$$c_V = \frac{dU}{dT} = \frac{9n\hbar}{\omega_{\max}^3} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\hbar\omega^4 \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{kT^{\,2}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]^2} d\omega .$$

Введем характеристическую температуру Дебая θ:

$$\theta = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}. \tag{4.2}$$

Кроме того, введем переменную $x = \frac{\hbar\omega}{k}$.

Тогда формула для удельной теплоемкости примет вид

$$c_V = 9nk\left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\theta/T} \frac{e^x x^4 dx}{\left(e^x - 1\right)^2}.$$

При $T << \theta$ (область низких температур) верхний предел в последнем интеграле можно заменить на ∞. Если, кроме того, учесть, что между удельной и молярной теплоемкостью существует связь $c_{уд} = \frac{c_{мол}}{\mu}$, где μ - молярная масса, то для молярной теплоемкости кристалла при постоянном объеме можно получить

$$c_{мол} = \frac{12\pi^4 R}{5\theta^3} T^{\,3}.$$

Для высоких температур $(T >> \theta)$, раскладывая экспоненту в ряд по малому параметру $\frac{\hbar\omega}{kT}$ и ограничиваясь двумя членами ряда, для молярной теплоемкости получим закон Дюлонга-Пти:

$$c_{мол} = 3R\ .$$

Задача. Определите приближенно скорость звука в алмазе, зная, что дебаевская температура алмаза равна 1860К и расстояние между атомами $d = 1{,}54$ ангстрема.

Дано: $\theta = 1860K$;

$d = 1{,}54\ \mathring{A}$

———————————

$v_{зв} = ?$

Решение. Определить скорость звука в алмазе можно с помощью выражения (4.2)

$$\theta = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}.$$

Используя формулу (4.1) и учитывая, что $\lambda_{\min} = 2d$, получим

$$\theta = \frac{\hbar \cdot 2\pi v_{зв}}{2d \cdot k}.$$

Выражаем $v_{зв}$ и проводим вычисления:

$$v_{зв} = \frac{d \cdot k \cdot \theta}{\hbar\pi} = \frac{1{,}54 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1860}{1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}14} = 11{,}4 \cdot 10^{3}\ {}^{м}\!/\!_{с}\ .$$

Проверим единицу измерения:

$$[v_{зв}] = \frac{[d][k][\theta]}{[\hbar]} = \frac{м \cdot (^{Дж}\!/\!_{К}) \cdot К}{Дж \cdot с} = \frac{м}{с}$$

Ответ. $v_{зв}$=11,4·10^3 м/с.

Темы 5,6. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ФЕРМИ-ДИРАКА, ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1. В изолированных атомах электроны находятся в дискретных энергетических состояниях. У одиночных атомов одного элемента, расположенных на таких больших расстояниях r, что взаимодействием между ними можно пренебречь ($r >> a$, где a - постоянная кристаллической решетки), энергия соответствующих энергетических уровней абсолютно одинакова. Так как потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром атома U обратно пропорциональна расстоянию между ними $U \sim \frac{1}{r}$,то атом является для электрона потенциальной ямой, внутри которой электроны находятся на определенных энергетических уровнях (рис 5.1).

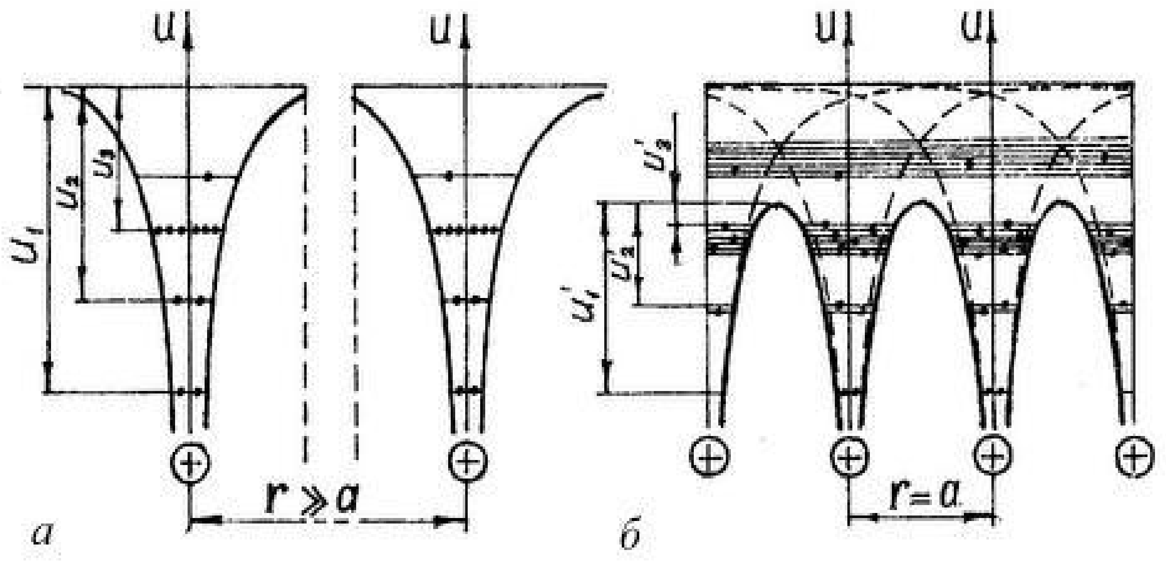

Рис 5.1.
Зависимость потенциальной энергии электрона от его расстояния до ядра: а – для двух изолированных атомов; б – для одномерной кристаллической решетки

При сближении атомов взаимодействие между ними растет. Из рис. 5.1,б видно, что потенциальные кривые соседних атомов частично перекрываются и дают результирующие кривые (сплошные линии), проходящие ниже нулевого уровня потенциальной энергии ОО. При этом для всех электронов в атомах уменьшается как ширина ($r \sim a$), так и высота потенциального барьера (сравним $U_{1,2,3}$ и $U'_{1,2,3}$), причем для валентных электронов высота потенциального барьера может стать ниже их энергетического уровня в изолированном атоме. В этом случае валентные электроны получают возможность легко переходить от одного атома к другому. Такие обобществленные кристаллом электроны называют свободными, а их совокупность – электронным газом.

Взаимодействие атомов в кристалле существенно меняет структуру энергетических уровней электронов. При сближении N атомов каждый энергетический уровень изолированного атома расщепляется на N очень близко расположенных уровней, образующих зону разрешенных энергий. Разрешенные зоны отделены друг от друга запрещенными зонами.

Расщепление разных уровней не одинаково. Наибольшее расщепление испытывают высоко расположенные уровни как занятые, так и не занятые электронами. Поэтому зона, соответствующая валентным электронам, оказывается широкой. Для электронов, расположенных на нижних энергетических уровнях атома, потенциальный барьер, после сближения, остается очень трудно проходимым, поэтому соответствующие энергетические уровни практически не расщепляются (рис. 5.2). Следует отметить, что ширина зон не зависит от размеров кристалла. Поэтому, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются уровни внутри разрешенной зоны. Для кристалла, состоящего, например, из 10^{23} атомов, расстояние между соседними уровнями зоны составляет примерно 10^{-23} эВ.

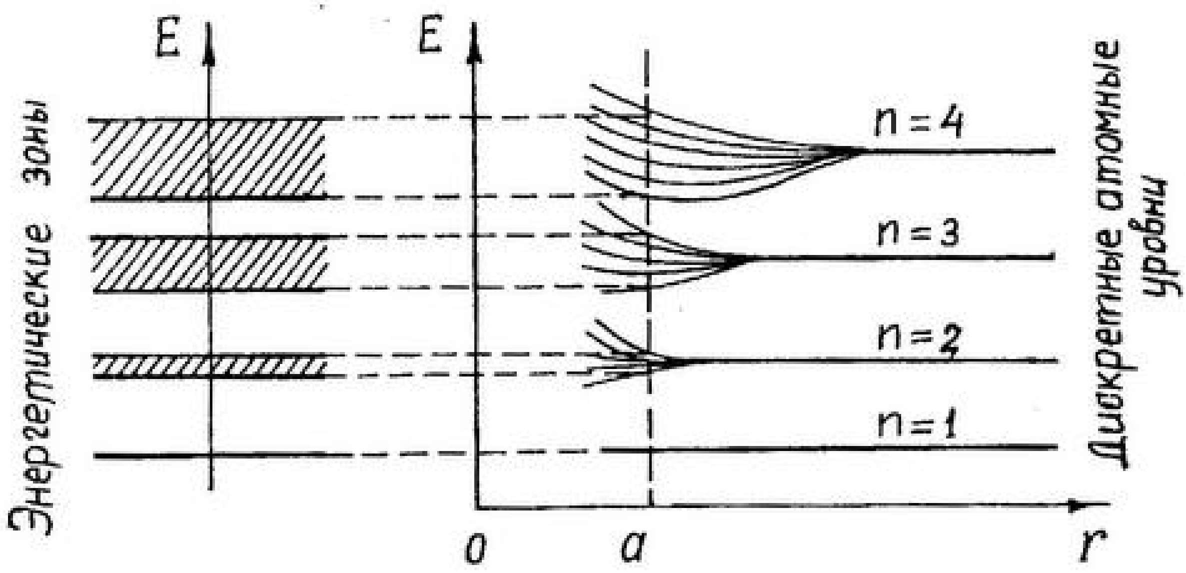

Рис. 5.2.
Схема образования энергетических зон при сближении атомов
(а – постоянная решетки кристалла)

2. Существование энергетических зон позволяет объяснить с единой точки зрения существование металлов, полупроводников и диэлектриков.

Электрические свойства твердых тел зависят от характера заполнения электронами разрешенных и от ширины запрещенных энергетических зон. Заполнение электронами энергетических уровней в разрешенной зоне осуществляется в соответствии с принципом Паули, согласно которому в системе не может быть даже двух электронов с одинаковым набором всех квантовых чисел. В атоме этими числами являются: n - главное квантовое число, l - орбитальное, m - магнитное, s - спиновое.

Возможны три случая, изображенные на рис 5.3. В случае «а» электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23}$ эВ) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Достаточная энергия появляется при нагревании кристалла уже на 1К. Даже небольшие электрические поля могут сообщать этим электронам дополнительную энергию, переводя их еще на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться полем в таких веществах при любых температурах. В кристалле появляется упорядоченное движение электронов под действием поля, т. е. электрический ток. Кристалл с подобной схемой заполнения энергетических уровней представляет собой металл.

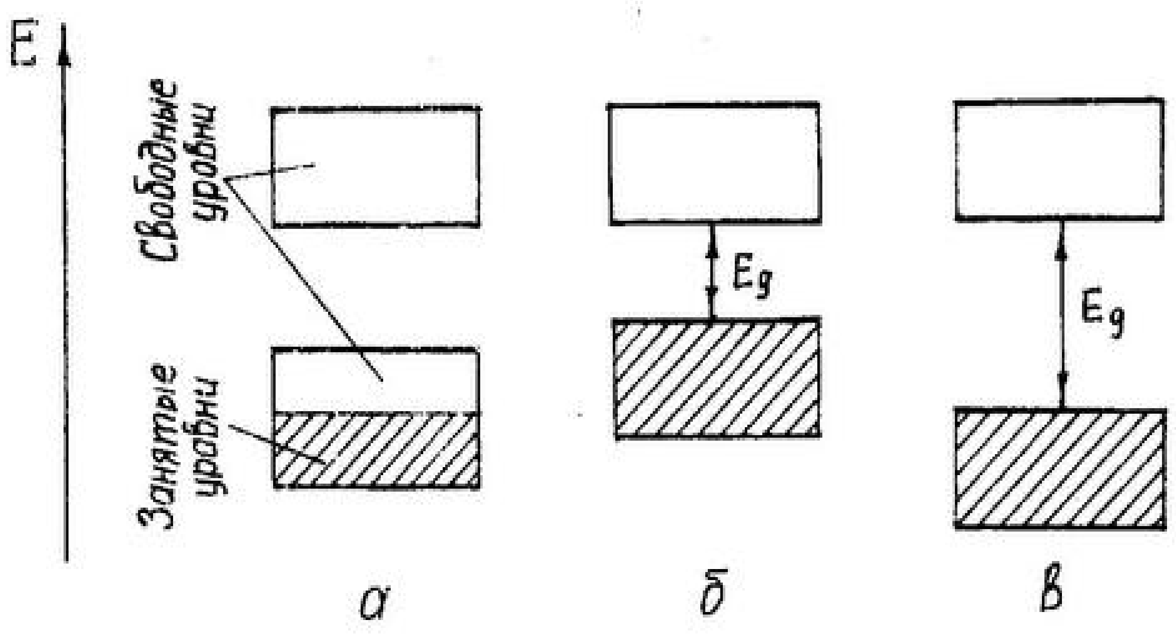

Рис 5.3.
Заполнение энергетических зон при температуре T=0K:
а – в металлах; б – в полупроводниках; в - диэлектриках

Если при температуре равной абсолютному нулю верхняя зона, на уровнях которой есть электроны (валентная зона), полностью укомплектована ими, а выше лежащая разрешенная зона (зона проводимости) не содержит электронов, то вещество не может проводить электрический ток. Однако, если ширина запрещенной зоны невелика и составляет несколько десятых электронвольта (случай «б»), энергия теплового движения атомов кристалла, или энергия поглощенных им фотонов оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов из валентной зоны через запрещенную зону в зону проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на ее освободившиеся верхние уровни. Такое вещество называется собственным полупроводником.

Если ширина запрещенной зоны велика (несколько электронвольт), тепловое движение не может сообщить заметному числу электронов валентной зоны энергию, необходимую для перехода в свободную зону. В этом случае «в» кристалл является диэлектриком.

3. Электроны проводимости в металле можно рассматривать как газ свободных частиц при условии, что их взаимодействие с кристаллической решеткой учитывается путем введения для электронов вместо реальной массы, так называемой, эффективной массы.

Количество различных квантовых состояний, приходящееся на единичный интервал энергий, для кристалла единичного объема равно [1,4]:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}. \tag{5.1}$$

Величина $g(E)$ называется плотностью состояний.

Распределение свободных электронов по квантовым состояниям описывается функцией Ферми-Дирака $f(E)$. Эта функция определяет вероятность того, что состояние с данной энергией E занято электроном:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}. \qquad (5.2)$$

В этой формуле E_F - энергия Ферми. В металле, при $T = 0K$, в валентной зоне все состояния вплоть до E_F заняты электронами, а выше E_F - свободны. Таким образом, при $T = 0K$, вероятность заполнения электронами состояний с энергией $E < E_F$ равна единице, а вероятность заполнения состояний с энергией $E > E_F$ - равна нулю (рис.5.4,а):

$$f(E)=1, \text{ если } E < E_F,\ T = 0K \qquad (5.3)$$
$$f(E)=0, \text{ если } E > E_F,\ T = 0K.$$

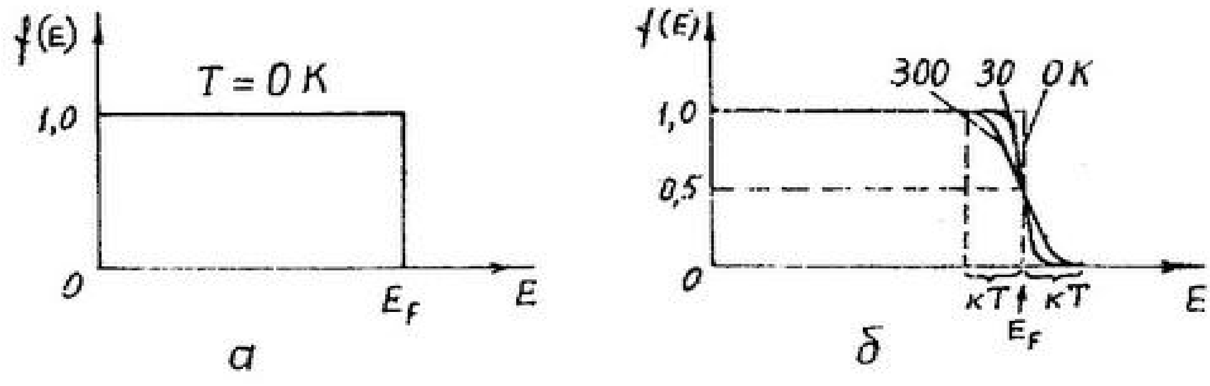

Рис. 5.4.
Функция распределения Ферми-Дирака:
а – при температуре Т=0К; б – при Т>0К

Величины $g(E)$ и $f(E)$ для очень узкого диапазона энергий dE можно считать постоянными. Тогда число электронов, имеющих энергию в интервале от E до $E + dE$, в единице объема кристалла равно

$$N(E) = f(E)g(E)dE. \qquad (5.4)$$

Тогда в интервале энергий от E_1 до E_2 количество частиц определяется как

$$N = \int_{E_1}^{E_2} f(E)g(E)dE.$$

Используя это выражение, получим формулу для концентрации электронов в металле при температуре $T = 0K$:

$$n = \int_0^{E_F} \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2} . \qquad (5.5)$$

Получим зависимость энергии Ферми от концентрации электронов в валентной зоне при $T = 0K$:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} . \qquad (5.6)$$

При повышении температуры электроны получают возможность переходить на более высокие энергетические уровни. Но повышать свою энергию могут только электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми E_F , так как ниже E_F все состояния заняты. Тепловая энергия, получаемая электронами при $T = T_{комн.} \approx 300K$, имеет порядок $kT \approx 0{,}025 эВ$, а E_F = (3÷10) эВ, поэтому тепловому возбуждению подвергается лишь незначительная доля (менее ~1%) общего числа электронов в валентной зоне металла, энергия которых отличается от E_F не более чем на величину kT (рис. 5.4,б). Функция распределения при этом размывается, но незначительно. Следовательно, концентрация свободных электронов в металле практически не зависит от температуры и с хорошей точностью определяется выражением (5.3).

Заметим, что вероятность заполнения уровня E_F при $T > 0K$ равна $1/2$.

<u>Задача</u>. Концентрация свободных электронов в металле равна $n = 5 \cdot 10^{22}\, см^{-3}$. Найдите среднее значение энергии свободных электронов при абсолютном нуле.

Дано: $n = 5 \cdot 10^{22}\, см^{-3} = 5 \cdot 10^{28}\, м^{-3}$

$T = 0K$

$\langle E \rangle = ?$

<u>Решение</u>. Среднюю энергию найдем как отношение полной энергии свободных электронов в единице объема $E_{полн.}$ к концентрации свободных электронов n :

$$\langle E \rangle = \frac{E_{полн.}}{n} . \qquad (5.7)$$

При $T = 0K$ все энергетические уровни вплоть до E_F заняты электронами. С учетом выражений (5.1), (5.2), (5.4) найдем $E_{полн.}$:

$$E_{полн.} = \int_0^{E_F} E \cdot N(E) = \int_0^{E_F} E\, \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE = \frac{1}{5\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{5/2} . \qquad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в (5.7) и учитывая формулы (5.5), (5.6), находим:

$$\langle E \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}.$$

Проверяем единицу измерения:

$$\left[\langle E \rangle\right] = \frac{Дж^2 \cdot c^2}{кг \cdot \left(м^3\right)^{2/3}} = \frac{Дж^2}{Н \cdot м} = Дж.$$

Вычислим $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{3 \cdot 1{,}05^2 \cdot 10^{-68}}{10 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}\left(3 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5 \cdot 10^{28}\right)^{2/3} = 4{,}68 \cdot 10^{-19}\, Дж = 2{,}9 эВ.$$

Результат показывает, что с точки зрения квантовой теории при абсолютном нуле электронный газ в металле имеет энергию, которая соответствует температуре, в ее классическом понимании, равной

$$T_{эл.газа} = \frac{2{,}9}{0{,}025} \cdot 300K \approx 30000K.$$

4. Рассмотрим элементы теории электропроводности собственных и примесных полупроводников.

Выше говорилось, что полупроводники при $T = 0K$ являются диэлектриками. Они имеют небольшую ширину запрещенной зоны, поэтому уже при температурах близких к комнатной, вследствие теплового возбуждения происходит переход части электронов с «потолка» валентной зоны на «дно» зоны проводимости. При этом проводимость полупроводника обусловливается как этими электронами (электронная составляющая проводимости), так и появившимися в валентной зоне вакансиями – «дырками» (дырочная составляющая проводимости). Электроны, перешедшие в валентную зону и дырки, расположенные в валентной зоне могут перемещаться под действием приложенного к полупроводнику внешнего электрического поля, то есть являются носителями тока. Процесс образования (генерации) электронно-дырочных пар при постоянной температуре полупроводника уравновешен обратным процессом рекомбинации свободных электронов и дырок. Описанный процесс, при котором концентрации электронов проводимости и дырок одинаковы $(n = p)$, характерен для собственных полупроводников. Удельная электропроводность σ (величина, обратная удельному сопротивлению вещества $\sigma = 1/\rho$) для этих полупроводников определяется выражением

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p = en(\mu_n + \mu_p) \qquad (5.9)$$

где $\mu_{n,p}$ - подвижность электронов и дырок, которая характеризует среднюю дрейфовую скорость носителей тока под действием электрического поля единичной напряженности ($\mu = \frac{v_{др}}{E}$).

Уровень энергии Ферми в собственных полупроводниках расположен вблизи середины запрещенной зоны (рис. 5.5,а).

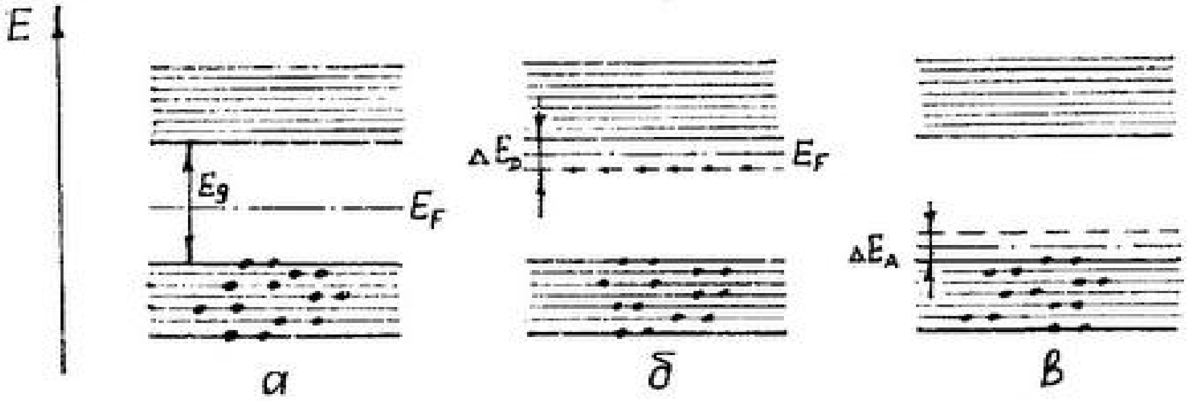

Рис. 5.5.
Расположение уровня энергии Ферми и примесных уровней в полупроводниках при температуре Т=0К:
а – собственный; б – донорный; в - акцепторный

Электропроводность собственных полупроводников увеличивается с ростом температуры T и зависит от ширины запрещенной зоны E_g:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right), \tag{5.10}$$

где k - постоянная Больцмана.

Электропроводность примесных полупроводников обусловлена наличием в них примесных атомов, валентность которых больше (донорная примесь), или меньше (акцепторная примесь) чем у собственных атомов. Введение в собственный полупроводник примеси приводит к появлению в запрещенной зоне собственного полупроводника примесных уровней энергии, которые для донорных полупроводников расположены вблизи дна зоны проводимости, а для акцепторных – вблизи потолка валентной зоны (рис. 5.5, б, в). Поскольку энергия активации примесей ΔE_D и ΔE_A много меньше ширины запрещенной зоны, то уже при низких температурах (десятки кельвинов) в примесных полупроводника появляются носители тока: электроны – в донорных, дырки – в акцепторных. При этом удельная электропроводность для полупроводников n – типа (донорного) и p – типа (акцепторного) определяется соответственно:

$$\sigma = en\mu_n \text{ и } \sigma = ep\mu_p$$

Тип носителей тока и их концентрацию можно определить экспериментально с помощью эффекта Холла по знаку и величине постоянной Холла R_H.

Для полупроводника n – типа, у которого основными носителями тока являются электроны

$$R_H = -\frac{A}{en};$$

для полупроводника p – типа, у которого основными носителями тока являются дырки

$$R_H = \frac{A}{ep};$$

для собственного (n=p)

$$R_H = \frac{A}{en} \cdot \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n},$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл$; n, p – концентрация электронов и дырок соответственно; A - коэффициент, зависящий от механизма рассеяния носителей тока. В случае рассеяния носителей тока на тепловых колебаниях кристаллической решетки полупроводника, что обычно наблюдается при температурах близких и выше комнатной, $A = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}17$. Для металлов и вырожденных полупроводников $A = 1$.

Дополнительные носители тока в полупроводниках могут возникать за счет поглощения света (фотонов). При этом, кроме удельной электропроводности обусловленной тепловым возбуждением, появляется проводимость обусловленная внутренним фотоэффектом:

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_Ф.$$

В случае собственного полупроводника фотопроводимость равна

$$\sigma_Ф = e \cdot \Delta n(\mu_n + \mu_p),$$

где Δn - число пар электрон – дырка, возникших при поглощении квантов света.

Задача. Во сколько раз возрастет электропроводность образца кремния при нагревании его от температуры $T_1 = 283K$ до температуры $T_2 = 293K$? Ширина запрещенной зоны для кремния $E_g = 1{,}107 эВ$.

Дано: $T_1 = 283K$,

$T_2 = 293K$,

$E_g = 1{,}107 эВ$

$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ - ?

Решение. Зависимость электропроводности σ собственных полупроводников от температуры T определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right).$$

Вычисляя с помощью этой формулы отношение электропроводностей при заданных температурах, получаем

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp \frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \exp \frac{1{,}107 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{283} - \frac{1}{293}\right) \cong 2{,}2\,.$$

Ответ. Электропроводность увеличится в 2,2 раза.

Тема 7. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Радиоактивностью называют самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц.

Отдельные радиоактивные ядра претерпевают превращение независимо друг от друга. Поэтому можно считать, что количество ядер $dN_{расп}$, распадающихся за очень короткий промежуток времени dt, пропорционально как числу имеющихся нераспавшихся ядер N, так и этому промежутку времени dt:

$$dN_{расп} = \lambda N \cdot dt\,, \tag{7.1}$$

где λ - характерная для каждого радиоактивного вещества константа, называемая постоянной распада. Из формулы (7.1), переходя к одной переменной $N(t)$ - количеству ядер, оставшихся нераспавшимися к моменту времени t и интегрируя, получаем закон радиоактивного распада верный для любых, а не только малых, промежутков времени:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)\,, \tag{7.2}$$

где N_0 - количество ядер в первоначальный момент времени.

Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер, называется периодом полураспада $T_{1/2}$. Между этим временем и постоянной распада существует следующая связь:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \tag{7.3}$$

Активностью радиоактивного вещества называется величина, равная отношению числа распадов $dN_{расп}$ за малое время dt к этому промежутку времени. Из (7.1) для активности получим формулу

$$\frac{dN_{расп}}{dt} = \lambda N \tag{7.4}$$

Задача. Сколько атомов радона распадается за одни сутки из 10^6 атомов?

Дано: $N_0 = 10^6$ шт.,

$t = 1$ сут.,

$T_{1/2} = 3{,}82$ сут. для ${}^{222}_{86}Rn$

$N_{расп.}$ - ?

Решение. Время, в течение которого распадаются атомы радона, имеет тот же порядок величины, что и период полураспада этих ядер. Следовательно, время t нельзя считать малым. Используя формулу (7.2), для количества распавшихся ядер получаем

$$N_{расп.} = N_0 - N(t) = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Используя (7.3) и подставляя численные значения, получим

$$N_{расп.} = 10^6(1 - 0{,}8330) = 167000 \text{ шт.}$$

Ответ. Число распавшихся за сутки ядер равно 167000 шт.

Таблица вариантов задач
к контрольной работе № 6

Номер варианта	Номера задач						
0	601	611	621	631	641	651	661
1	602	612	622	632	642	652	662
2	603	613	623	633	643	653	663
3	604	614	624	634	644	654	664
4	605	615	625	635	645	655	665
5	606	616	626	636	646	656	666
6	607	617	627	637	647	65	667
7	608	618	628	638	648	658	668
8	609	619	629	639	649	659	669
9	610	620	630	640	650	660	670

ЗАДАЧИ

601. Найдите длину волны де Бройля электрона, летящего со скоростью 10^8 см/с, и шарика массой 1г, движущегося со скоростью 1 см/с. Нужно ли учитывать волновые свойства электрона и шарика при анализе их взаимодействия с кристаллом? Расстояние между атомами в кристалле принять равным 0,7 нм. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

602. Вычислите длину волны де Бройля для тепловых ($T = 300K$) нейтронов. Следует ли учитывать волновые свойства нейтронов при анализе их взаимодействия с кристаллом? Расстояние между атомами в кристалле принять равным 0,5 нм. Масса покоя нейтрона $m_n = 1{,}675\cdot10^{-27}$ кг.

603. Какую энергию нужно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от $\lambda_1 = 100нм$ до $\lambda_2 = 50нм$?

604. Вычислите длину волны де Бройля протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов, равную: 1) 1МВ; 2) 1ГВ. Масса покоя протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

605. Определите энергию и импульс электрона, имеющего длину волны де Бройля $\lambda = 0{,}1$ *нм*. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

606. Протон обладает кинетической энергией $T = 1$ *кэВ*. Определите дополнительную энергию ΔT, которую необходимо ему сообщить для того, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в 3 раза.

607. Чему равно волновое число электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 240B$? Начальную скорость электрона принять равной нулю.

608. Определите длины волн де Бройля α - частицы и протона, прошедших одинаковую ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ *кВ*. Масса покоя α - частицы $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг, протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг. Начальные скорости частиц принять равными нулю.

609 Электрон, движущийся со скоростью $v = 5000$ *км/с*, попадает в однородное ускоряющее электрическое поле, напряженностью $E = 10$ *В/см*. Какое расстояние l должен пройти электрон в поле, чтобы длина волны де Бройля электрона стала равной $1\mathring{A}$?

610. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов 200В, имеет длину волны де Бройля, равную 0,002нм. Найдите массу этой частицы, если известно, что заряд ее численно равен заряду электрона.

611. Исходя из соотношения неопределенностей между импульсом частицы и соответствующей координатой, оцените энергию основного состояния атома водорода.

612. Электрон локализован в области с линейным размером $l = 1$ *мкм*. Среднее значение его кинетической энергии $E = 4$ *эВ*. Оцените с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность скорости электрона.

613. Атом испустил фотон с длиной волны $\lambda = 800$ *нм*. Продолжительность излучения $\tau = 10$ *нс*. Определите наибольшую точность ($\Delta\lambda/\lambda$), с которой может быть измерена длина волы излучения.

614. Свободный электрон в момент времени $t = 0$ локализован в области пространства с линейным размером $\Delta x_0 = 0{,}1$ *нм* (порядок размера атома). Оцените область локализации Δx этого электрона спустя время $\Delta t = 1c$.

615. Используя соотношение неопределенностей, оцените ширину l одномерной потенциальной ямы, в которой минимальная энергия электрона $E_{\min} = 10$ *эВ*.

616. Импульсный рубиновый лазер с выходной мощностью $W = 2$ *ГВт* создает импульс длительностью $\tau = 10$ *нс*. Оцените наибольшую точность $\Delta E/E$, с которой может быть определена энергия излучения.

617. Время жизни τ возбужденного ядра порядка 1нс, длина волны λ излучения равна 0,1нм. С какой наибольшей точностью $\Delta E/E$ может быть определена энергия излучения?

618. Время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10 нс$. Вычислите ширину спектральной линии излучения $\Delta\lambda$, если наибольшая интенсивность света приходится на длину волны $\lambda = 4200\,\mathring{A}$.

619. Оцените наименьшие ошибки, с которыми можно определить скорость электрона, протона и шарика массы $m = 1 мг$, если координаты частицы и центра шарика определены с точностью $\Delta x = 1 мкм$. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Масса покоя протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27} кг$.

620. Радиолокатор посылает импульс длительностью τ. Расстояние до удаленного объекта должно быть измерено с точность $\Delta x = 800 м$. Чему должна быть равна длительность импульса и какова должна быть ширина полосы частот $\Delta\omega$, которую должен пропустить усилитель приемника?

621. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками: $U(x) = 0$ при $0 < x < l$ и $U = \infty$ вне этого интервала. Найдите собственные значения энергии и нормированные собственные функции частицы.

622. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками: $U(x) = 0$ при $0 < x < l$ и $U = \infty$ вне этого интервала. Найдите отношение разности $\Delta E_{n,n+1}$ энергий соседних уровней к энергии E_n частицы в трех случаях: $n = 2$; $n = 5$; $n \to \infty$.

623. Вычислите температуру идеального газа, средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул которого равна минимальной энергии электрона, находящегося в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 10^{-8} см$ с абсолютно непроницаемыми стенками.

624. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками в основном энергетическом состоянии. Какова вероятность W обнаружить частицу в крайней четверти ямы?

625. При какой ширине одномерной прямоугольной ямы с абсолютно непроницаемыми стенками дискретность энергетического спектра электрона и протона уже для первых уровней становится сравнимой, например, со средней кинетической энергией данных частиц при обычной температуре (около 300К). Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Масса покоя протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27} кг$.

626. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками. В каких точках внутри ямы ($0 < x < l$) плотности вероятности нахождения частицы на втором и

третьем энергетических уровнях одинаковы? Вычислите плотности вероятности для этих точек. Решение поясните графиком.

627. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками в основном энергетическом состоянии. Какова вероятность W обнаружить частицу в пределах области $\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$?

628. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 0{,}1 нм$ с абсолютно непроницаемыми стенками. Определите в электрон-вольтах наименьшую разность энергетических уровней.

629. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками, ширина которой принимает значения: $l = 0{,}1 нм;\ 1 нм;\ 10 нм;\ 0{,}02 м;\ 0{,}1 м$. Определите разность энергий электрона на первом и втором энергетических уровнях. Оцените полученные результаты с точки зрения проявления квантовых свойств рассматриваемой системы.

630. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками в возбужденном энергетическом состоянии ($n = 3$). Определите, в каких точках интервала $0 < x < l$ плотность вероятности нахождения частицы имеет максимальное и минимальное значение.

631. Для нагревания металлического предмета массой $m = 100 г$ от температуры $T_1 = 20^\circ C$ до $T_2 = 50^\circ C$ подведена теплота $Q = 8300 Дж$. Определите из какого металла этот предмет, если для него указанный интервал температур выше характеристической температуры Дебая.

632. Молярная теплоемкость c_m серебра при $T = 20 K$ равна $1{,}65\ Дж/(моль \cdot K)$. Вычислите температуру Дебая $\theta_Д$, полагая, что $T \ll \theta_Д$.

633. Определите количество теплоты Q, необходимое для нагревания $m = 20 г$ поваренной соли на $\Delta T = 2 K$, если нагревание происходит от температуры $T_1 = 2 K$.
Характеристическую температуру Дебая $\theta_Д$ для $NaCl$ принять равной $320 K$.

634. Найдите максимальную частоту $\omega_{\max}$ собственных колебаний атомов в кристалле железа, если при температуре $T = 20 K$ его удельная теплоемкость $C = 2{,}7 \frac{мДж}{г \cdot K}$.

635. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определите изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при его нагревании от нуля до температуры $T = 0{,}1\theta_Д$. Характеристическую температуру Дебая $\theta_Д$ для данного кристалла принять равной $300 K$.

636. Дебаевская температура свинца $\theta_Д = 95K$. Используя данное значение для $\theta_Д$, найдите при температуре $T = 5K$ отношение теплоемкости свинца к теплоемкости, даваемой законом Дюлонга-Пти.

637. Найдите характеристическую температуру Дебая для железа, если максимальная частота упругих колебаний атомов в кристаллической решетке $\nu_{\max} = 8{,}75 \cdot 10^{12}\,Гц$.

638. Экспериментально установлено, что при температуре $T_1 = 4K$ молярная теплоемкость аргона $c_V = 0{,}174\,Дж/(моль \cdot К)$. Определите молярную теплоемкость аргона при $T_2 = 2K$.

639. Определите теплоту, необходимую для нагревания двух молей никеля от 20 до 30К. Принять характеристическую температуру Дебая $\theta_Д$ для никеля равной 450К и условие $T << \theta_Д$ считать выполненным.

640. Вычислите по теории Дебая удельную теплоемкость германия при температуре 20К. Принять характеристическую температуру Дебая $\theta_Д$ для германия равной 370К и условие $T << \theta_Д$ считать выполненным.

641. Найдите среднее значение кинетической энергии $\langle E_{кин} \rangle$ электрона в металле при абсолютном нуле, если энергия Ферми равна $E_f = 6эВ$. Найдите среднее и максимальное значение скорости электрона.

642. Полагая, что на каждый атом алюминия в кристалле приходится по 3 свободных электрона, определите максимальную энергию электронов при абсолютном нуле (плотность алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

643. Определите концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T = 0K$, если энергия Ферми равна $E_f = 1эВ$.

644. Определите число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при $T = 0K$. Энергия Ферми для натрия равна $E_f = 3{,}12эВ$, плотность натрия $\rho = 970\,кг/м^3$.

645. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0K$ больше в алюминии, чем в меди, если уровни энергии Ферми соответственно равны $E_f = 11{,}7эВ$ и $E_f = 7{,}0эВ$. Плотность этих металлов равна: $\rho_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^3\,кг/м^3$, $\rho_{Cu} = 8{,}9 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

646. Какая доля свободных электронов в металле обладает энергией в интервале от $E_1 = 0{,}5E_f$ до $E_2 = E_f$ при температуре $T = 0K$.

647. Металл находится при температуре $T = 0K$. Определите во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $E_1 = 0{,}5E_f$ до $E_2 = E_f$ больше числа электронов с энергией от $E_0 = 0$ до $E_1 = 0{,}5E_f$.

648. Найдите относительное число свободных электронов в кристалле при температуре $T = 0K$, энергия которых E отличается от энергии Ферми E_f не более, чем на $\eta = 2\%$.

649. Выразите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ через максимальную скорость $v_{\max}$ электронов в металле при $T = 0K$.

650. Вычислите энергию Ферми E_f свободных электронов в кристалле меди при температуре $T = 0K$. Принять, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону. Плотность меди $\rho_{Cu} = 8{,}9 \cdot 10^3 \, кг/м^3$.

651. Концентрация свободных носителей заряда в кремнии $n = 5 \cdot 10^{10} \, см^{-3}$, подвижность электронов $\mu_n = 0{,}15 \, м^2/(В \cdot с)$, а дырок $\mu_p = 0{,}05 \, м^2/(В \cdot с)$. Определите сопротивление кремниевого стержня длиной 5см и площадью поперечного сечения 2мм^2.

652. Для полупроводника, имеющего форму куба со стороной l, измерено сопротивление без освещения R_0 и при освещении R. Найдите концентрацию электронов Δn и дырок Δp, обусловленную освещением, если их подвижность μ_n и μ_p. Считать $\Delta n = \Delta p$.

653. Сопротивление собственного полупроводника при температуре $T_1 = 612K$ равно $R_1 = 1 \cdot 10^6 \, Ом$, а при $T_2 = 800K$ - $R_1 = 1 \cdot 10^4 \, Ом$. Определите ширину запрещенной зоны полупроводника E_g.

654. Кремниевый образец нагревается от температуры $t_1 = 0^\circ C$ до $t_2 = 10^\circ C$. Как и во сколько раз изменится его электропроводность? Ширина запрещенной зоны кремния $E_g = 1{,}1 эВ$.

655. Тонкая пластина из кремния шириной 2см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля $B = 0{,}5 Тл$. При плотности тока $j = 2 \, мкА/мм^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов оказалась равной $U_H = 2{,}8 В$. Определите концентрацию носителей тока.

656. Германиевый кристалл, ширина запрещенной зоны которого $E_g = 0{,}72 эВ$, нагревают от температуры $t_1 = 0^\circ C$ до $t_2 = 15^\circ C$. Во сколько раз возрастает электропроводность кристалла?

657. Электропроводность кремния с примесями $\sigma = 112 Ом^{-1} \cdot м^{-1}$. Определите подвижность μ_p и концентрацию p дырок, если постоянная Холла равна $R_H = 3{,}66 \cdot 10^{-4} \, м^3/Кл$. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

658. Удельное сопротивление кремния с примесью равно $\rho = 1 \cdot 10^{-2}\, Ом \cdot м$. Определите концентрацию дырок p и их подвижность μ_p. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

659. Найти минимальную энергию образования пары «электрон-дырка» в собственном полупроводнике, электропроводность которого возрастает в $\eta = 5{,}0$ раз при увеличении температуры от $T_1 = 300K$ до $T_2 = 400K$.

660. Удельное сопротивление германиевого фоторезистора $\rho = 45 Ом \cdot см$. Вследствие освещения концентрация электронов и дырок повысилась на $1 \cdot 10^{12}\, см^{-3}$. Вычислите относительное изменение проводимости германия, если подвижность электронов $\mu_n = 3800\, см^2 / (В \cdot с)$, а дырок $\mu_p = 1800\, см^2 / (В \cdot с)$

661. Какая доля радиоактивного изотопа $^{225}_{89}Ac$ распадается в течение 6 суток? (Период полураспада $T_{1/2} = 10 суток$).

662. Найдите период полураспада радиоактивного изотопа, если его активность за 10 суток уменьшилась на 24% по сравнению с первоначальной.

663. Определите энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра натрия $^{23}_{11}Na$. Масса изотопа $^{23}_{11}Na$ равна $m_1 = 22{,}98977 а.е.м.$, а изотопа $^{22}_{11}Na$ - $m_2 = 21{,}99444 а.е.м.$

664. Вычислите энергию ядерной реакции $^7_3Li + ^1_1H \rightarrow ^7_4Be + ^1_0n$.
($m_{Li} = 7{,}01601; m_H = 1{,}00783; m_{Be} = 7{,}01693; m_n = 1{,}00867 а.е.м.$)

665. Ядро урана $^{235}_{92}U$, захватив нейтрон ^1_0n, разделилось на два осколка, причем освободилось два нейтрона, а один из осколков является ядром ксенона $^{131}_{54}Xe$. Определите второй осколок.

666. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии по $T = 0{,}24 Мэв$, при соударении превратились в два одинаковых фотона. Определите энергию и длину волны каждого из фотонов.

667. Найти массу образца урана $^{238}_{92}U$, имеющего такую же активность, как образец стронция $^{90}_{38}Sr$ массой $m = 1 мг$. Период полураспада урана $T_U = 4{,}5 \cdot 10^9\, лет$, стронция $T_{Sr} = 28 лет$.

668. Определите энергию, которая освобождается в водородной бомбе при синтезе $1 кг$ гелия. Массы водорода, дейтерия, гелия и нейтрона соответственно равны:
$m_{вод} = 2{,}01410 а.е.м., m_{дейт} = 3{,}01605 а.е.м.,$
$m_{гел} = 4{,}00260 а.е.м., m_{нейт} = 1{,}00867 а.е.м.$.

669. Счетчик α-частиц, установленный вблизи радиоактивного изотопа, при первом измерении регистрировал $N_1 = 1400$ частиц в минуту, а через $\Delta t = 4$

часа только $N_2 = 400$ частиц в минуту. Определите период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

670. Ядро лития ${}^7_3Li$, захватив протон, распадается на две α -частицы. Напишите реакцию и определите энергию, выделившуюся при этой реакции. Массы лития равна $m_{Li} = 7{,}01601 а.е.м.$, протона - $m_p = 1{,}00783 а.е.м.$, α -частицы - $m_\alpha = 4{,}00260 а.е.м.$.