Лабораторная работа № 23

(компьютерная симуляция)

Вынужденные колебания в колебательном контуре

Цель работы: экспериментально исследовать зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе в электромагнитном колебательном контуре от частоты последовательно включённой в контур гармонической ЭДС. Определить резонансную частоту, сравнить её с расчётной. Определить добротность контура по амплитудным и частотным параметрам резонансной кривой, сравнить эти значения.

Теория

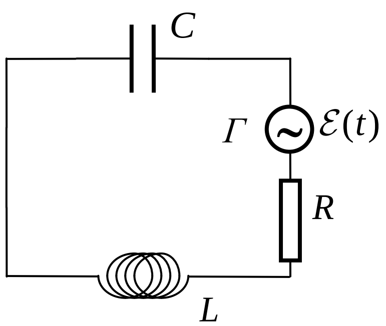

Рис. 1

Рассмотрим электрическую цепь последовательно соединённых конденсатора C, индуктивности L, сопротивления R и генератора Г переменной ЭДС.

Закон Ома для полной цепи: сумма напряжений на конденсаторе $U_C = q/C$ и сопротивлении $U_R = IR$ равна сумме ЭДС, включённых в цепь, т.е. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$ и ЭДС генератора $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$U_C + U_R = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_\Gamma \qquad (1)$$

где q – заряд обкладки конденсатора, а ток в контуре $I = q' \equiv \dot{q}$ – это скорость изменения заряда. Все величины в (1) зависят от времени, т.е. (1) представляет собой равенство мгновенных значений сумм напряжений и ЭДС.

Выразим все слагаемые в (1) через U_C и преобразуем (1) так, чтобы в правой части осталась только внешняя ЭДС, :

$$I = \dot{q} = C\dot{U}_C;\ U_R = RC\dot{U}_C;\ \mathcal{E}_L = -LC\ddot{U}_C$$

$$LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L}\dot{U}_C + \frac{1}{LC}U_C = \frac{1}{LC}\mathcal{E}_m\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{U}_C + 2\beta\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2\mathcal{E}_m\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Если правая часть (2) равна нулю, то получается однородное уравнение, решением которого, как было показано в лаб. раб. № 22, являются свободные затухающие колебания. Общим решением уравнения (2) с ненулевой правой частью является сумма решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т.е. свободные колебания на собственной частоте системы и вынужденные колебания на частоте вынуждающей силы. Как известно, у свободных колебаний характерное время релаксации, затухания колебаний $\tau = 1/\beta$. Поэтому при t $\gg \tau$ будем искать установившееся решение в виде вынужденных колебаний

$$U_C = U_{Cm}cos\omega t \qquad (3)$$

Используя (3), выразим каждое слагаемое в (2)

$$\omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U_{Cm}cos\omega t \qquad (4а)$$

$$\ddot{U}_C = -\omega^2 U_{Cm}cos\omega t = \omega^2 U_{Cm}\cos(\omega t + \pi) \qquad (4б)$$

$$2\beta\dot{U}_C = -2\beta\omega U_{Cm}sin\omega t = 2\beta\omega U_{Cm}\cos(\omega t + \pi/2) \qquad (4в)$$

$$\omega_0^2\mathcal{E}_m\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4г)$$

Поскольку, к сожалению, студенты в школе не усвоили формулы приведения, преобразования (4б) и (4в) показаны на рис. 2.

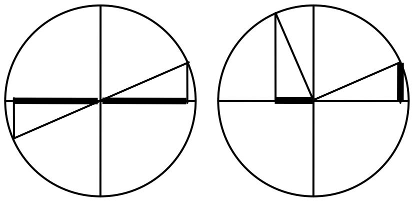

Рис. 2

Каждое выражение в (4) преобразовано к виду

$$A_m\cos(\omega t + \psi) \qquad (5)$$

где A_m - амплитуда, а ψ - начальная фаза.

Используем для сложения гармонических колебаний метод векторных диаграмм (Рис.3). Представим гармоническое колебание (5) в виде вектора длиной A_m, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг начала координат.

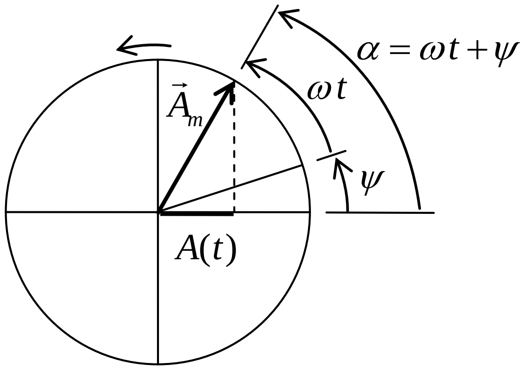

Рис. 3

В системе отсчёта, вращающейся с частотой ω вместе с векторами, все векторы *неподвижны*. За начало отсчёта можно выбран любой из векторов в (1).

В лабораторной работе № 23 «Вынужденные колебания» угол отсчитывается от вектора U_C. Именно поэтому в (3) начальная фаза U_C равна нулю. Тогда угол φ в (4г) – это сдвиг фазы внешней ЭДС относительно напряжения на конденсаторе. В [1] фазовый угол отсчитывается от U_R («линия токов»), а в [2;3] – от вектора внешней ЭДС.

На рис. 4 показана сумма векторов (4а), (4б) и (4в), равная вектору (4г).

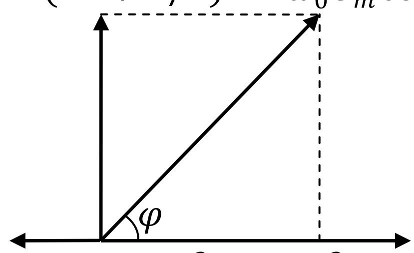

Рис. 2

Тогда длина вектора (4г) равна

$$\omega_0^2 \mathcal{E}_m = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} U_{Cm}^2$$

а амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2}} \tag{5}$$

Используя $\omega = 2\pi\nu$, запишем связь U_{Cm} с непосредственно измеряемой частотой колебаний ν

$$U_{Cm} = \frac{\nu_0^2 \mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2 + \beta^2\nu^2/\pi^2}} \tag{6}$$

Исследуем частотную зависимость $U_{Cm}(\nu)$, называемую также амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) напряжения на конденсаторе. При $\nu \to 0$ $U_{Cm} \to \mathcal{E}_m$. При $\nu \to \infty$ $U_{Cm} \to 0$. Функция (6) имеет экстремум. Частота, на которой достигается экстремальное (максимальное) значение, называется экстремальной. Найдём резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$ из условия минимума знаменателя (6)

$$\left[(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \beta^2\nu^2/\pi^2\right]' = 0$$

$$\nu_{\text{рез}} = \sqrt{\nu_0^2 - \frac{\beta^2}{2\pi^2}} \tag{7}$$

Видно, что при слабом затухании, т.е. при $\beta \ll \nu_0$, резонансная частота близка к собственной частоте идеального колебательного контура

$$\nu_{\text{рез}} \approx \nu_0$$

В этом приближении из (6) амплитуда в резонансе равна

$$U_{Cm}\left(\nu_{\text{рез}} = \nu_0\right) = \frac{\pi\nu_0}{\beta}\mathcal{E}_m \gg \mathcal{E}_m \tag{8}$$

График амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) напряжения на конденсаторе в колебательном контуре со слабым затуханием и внешней гармонической ЭДС показан на рис. 3

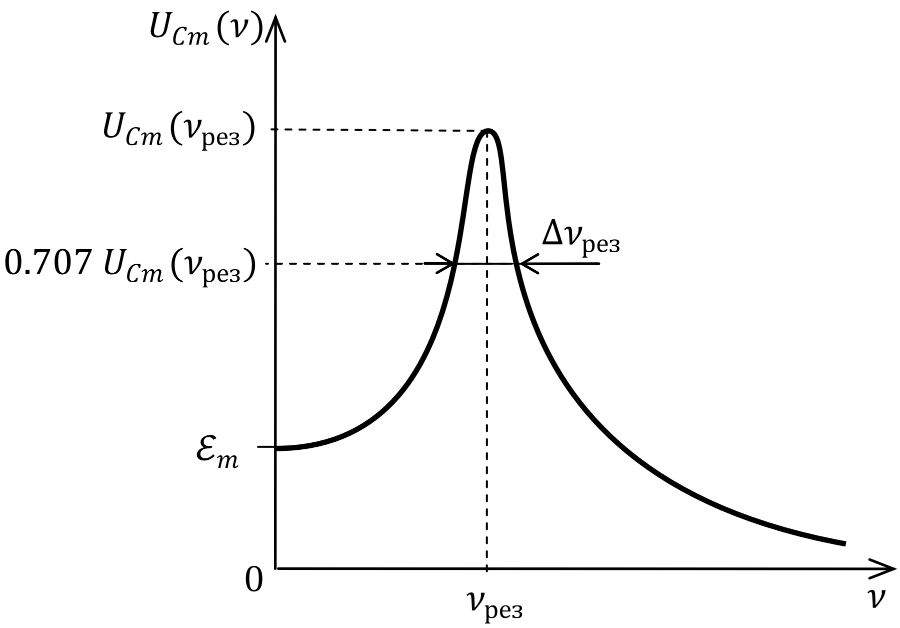

Рис. 3

Добротность колебательного контура. Одно из определений добротности – это отношение амплитуды колебаний в резонансе к амплитуде вынуждающей силы. Согласно (8), в приближении слабого затухания добротность равна

$$Q = \frac{U_{Cm}(\nu_{\text{рез}})}{\mathcal{E}_m} = \frac{\pi\nu_0}{\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1 \qquad (9)$$

Можно добротность выразить через другие характеристики затухания, например, через логарифмический декремент

$$\nu_0 = \frac{1}{T} \Rightarrow Q = \frac{\pi\nu_0}{\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} \qquad (9a)$$

При отстройке частоты в обе стороны от резонанса амплитуда колебаний уменьшается. Рассмотрим случай, когда энергия вынужденных колебаний вдвое меньше, чем в резонансе. Поскольку энергия пропорциональна квадрату амплитуды, в этих точках амплитуда будет в $1/\sqrt{2}$ раз меньше, чем в резонансе. Найдём из (6) частоты, соответствующие такому уменьшению амплитуды в приближении

$$\beta \ll \nu_0,\ \ \nu_{\text{рез}} \approx \nu_0,\ (\nu_0^2 - \nu^2) = (\nu_0 + \nu)(\nu_0 - \nu) \approx 2\nu_0(\nu_0 - \nu):$$

$$\frac{\nu_0^2\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2 + \beta^2\nu^2/\pi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\frac{\nu_0}{\beta}\mathcal{E}_m \qquad (10)$$

Тогда из (10) получаем

$$\Delta\nu = (\nu - \nu_0) = \pm\frac{\beta}{2\pi} \tag{11}$$

Таким образом, в приближении слабых потерь точки, в которых энергия вынужденных колебаний уменьшается вдвое, расположены симметрично по обе стороны от резонанса.

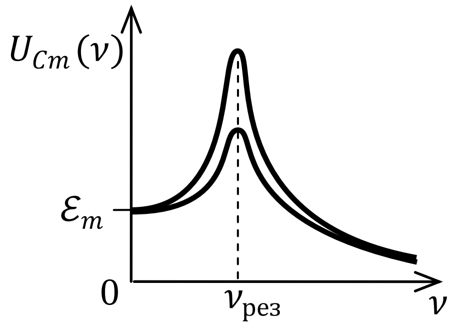

Рис. 5

Назовём шириной резонанса $\Delta\nu_{рез} = 2\Delta\nu = \beta/\pi$ интервал частот вокруг $\nu_{рез} \approx \nu_0$, на границах которого амплитуда равна $1/\sqrt{2}$ от амплитуды в резонансе. Видно, что отношение

$$\frac{\nu_{рез}}{\Delta\nu_{рез}} = \pi\frac{\nu_0}{\beta} = Q \tag{12}$$

равно добротности контура:

$$\boxed{Q = \frac{U_{Cm}(\nu_{рез})}{\mathcal{E}_m} = \frac{\nu_{рез}}{\Delta\nu_{рез}}} \tag{13}$$

Таким образом, амплитудные и частотные свойства резонансной кривой колебательного контура связаны однозначно: рост резонанса ведёт к его сужению и наоборот (Рис. 5).

Описание установки

Электрическая схема реальной лабораторной установки показана на рис. 6. Набор конденсаторов, катушка и набор постоянных и переменных резисторов смонтированы на общей панели (Рис. 7а). В колебательный контур последовательно включён генератор *Г* синусоидальной ЭДС (Рис. 7б). Частоту генератора ν можно плавно изменять.

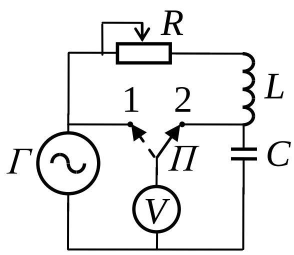

Рис. 6

С помощью цифрового вольтметра *V* (Рис. 7в), измеряют амплитуду ЭДС генератора $\mathcal{E}_m$ или амплитуду напряжения

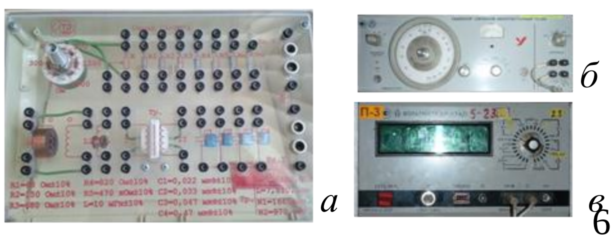

Рис. 7

на конденсаторе U_{Cm}. Вариант измерения задаётся переключателем *П*: в положении 1 измеряется ЭДС, в положении 2 – напряжение на конденсаторе. Можно также использовать и аналоговые измерители амплитуды напряжения, например, осциллограф, например, осциллограф, знакомый нам по работе № 22.

На рис. 8 показана панель виртуальной лабораторной работы. Элементы управления: «Генератор» с плавно изменяемой частотой внешней гармонической ЭДС и «Реостат» - переменное сопротивление. Частоту и сопротивление можно изменять грубо, перемещая мышью курсор соответствующей шкалы, либо плавно с помощью клавиатурных стрелок перемещения по горизонтали. Виртуальные измерительные приборы: частотомер, показывающий частоту генератора («Частота» Гц); омметр сопротивления реостата («Сопротивление» Ом); вольтметр показывает амплитуду синусоидального напряжения на конденсаторе («Вольтметр», В). Амплитуда ЭДС генератора (обозначена буквой E) постоянна и равна 1 В. Также показаны значения ёмкости конденсатора и индуктивности катушки.

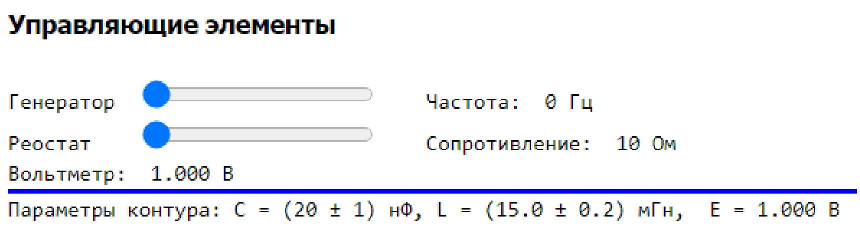

Рис. 8

Задание к работе

1. Получив допуск и исходные данные у преподавателя.
2. Войти в программу виртуальной лабораторной работы, определить и записать в таблицу приборов их цены деления.
3. Рассчитать собственную частоту контура $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ и доверительный интервал для неё с доверительной вероятностью 0,95.

4. Измерить амплитудно-частотные характеристики $U_{Cm}(\nu)$ напряжения на конденсаторе для трёх заданных преподавателем значений сопротивления. Минимальный набор точек: амплитуду напряжения в резонансе $U_{Cm} = \max \equiv U_p$ и соответствующую резонансную частоту ν_p, далее точки по обе стороны от резонанса на следующих уровнях амплитуды: $0,95U_p$; $0,9U_p$; $0,707U_p$; $0,5U_p$ - 8 точек, $\nu = 10$ Гц – минимальная ненулевая частота на шкале генератора, $\nu = 2\nu_{\text{рез}}$ или $\nu = 3\nu_{\text{рез}}$. Итого минимум 11 точек на каждой кривой. Обратить особое внимание на измерение частот, соответствующих $0,707U_p$. Если из-за дискретного изменения частоты невозможно установить это напряжение, измерьте два значения частоты, между которыми находится эта точка, затем в расчётах среднюю из двух частот примите за частоту, соответствующую $0,707U_p$.
5. В общих осях построить все три графика АЧХ.
6. На оси частот (или немного выше оси) обозначить точки: ν_0, доверительный интервал для ν_0, три экспериментально определённые резонансные частоты. С учётом доверительного интервала для ν_0 сделать вывод, совпадают ли экспериментально определённые резонансные частоты с собственной частотой.
7. Для минимального из трёх значений сопротивления R:
    a. графически определить ширину резонанса $\Delta\nu_{рез}$ на уровне 0,707 от максимальной амплитуды;
    b. вычислить добротность по формуле (9) через заданные параметры контура;
    c. вычислить добротность по обоим отношениям формулы (13).
8. Сделать вывод, подтверждается ли равенство значений добротности по формулам (9) и (13).
9. На основании пп. 5 и 7 данного Задания сделать вывод, подтверждается ли предположение о малости затухания.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Генератор внешней ЭДС передаёт электрическую энергию в колебательный контур, в результате чего возбуждаются свободные колебания. Почему в решении учитываются только вынужденные колебания? При каком условии справедливо это приближение?
3. Что такое резонанс напряжений на конденсаторе в последовательном колебательном контуре?
4. Что такое метод векторных диаграмм? Как его можно использовать для сложения колебаний?
5. **Выведите** дифференциальное уравнение колебаний и зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты.
6. Нарисуйте амплитудно-частотную характеристику напряжения на конденсаторе, опишите характерные точки и области этой кривой.
7. **Выведите** резонансную частоту для напряжения на конденсаторе.
8. Дайте определение добротности колебательного контура. **Выведите** связь добротности с частотными параметрами АЧХ.
9. В каком приближении выполняется равенство значений добротности (13) по амплитудным и частотным параметрам контура?
10. Как меняется вид АЧХ при увеличении (уменьшении) сопротивления контура R?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики, т. 2
2. Трофимова Т.И. Курс физики
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 3.