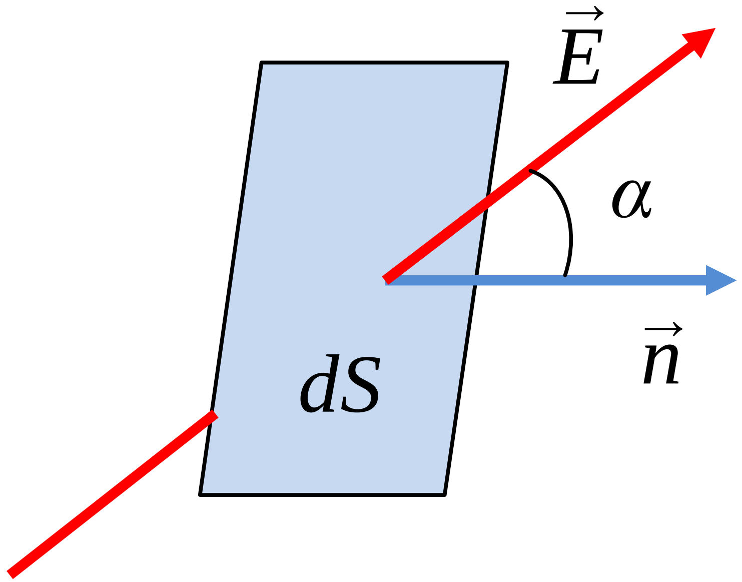
Лекция 22

Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса. Вычисления напряженности поля с помощью теоремы Гаусса (плоскость, нить, сфера, шар).

Поток вектора напряженности



$$d\vec{S} = \vec{n}dS$$

$$d\Phi = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right)$$

$$d\Phi = E\cos\alpha dS$$

Элементарный поток dФ сквозь площадку dS есть скалярное произведение вектора напряженности электрического поля на вектор нормали к площадке и ее площади.

Размерность потока [В·м].

Полный поток вектора напряженности

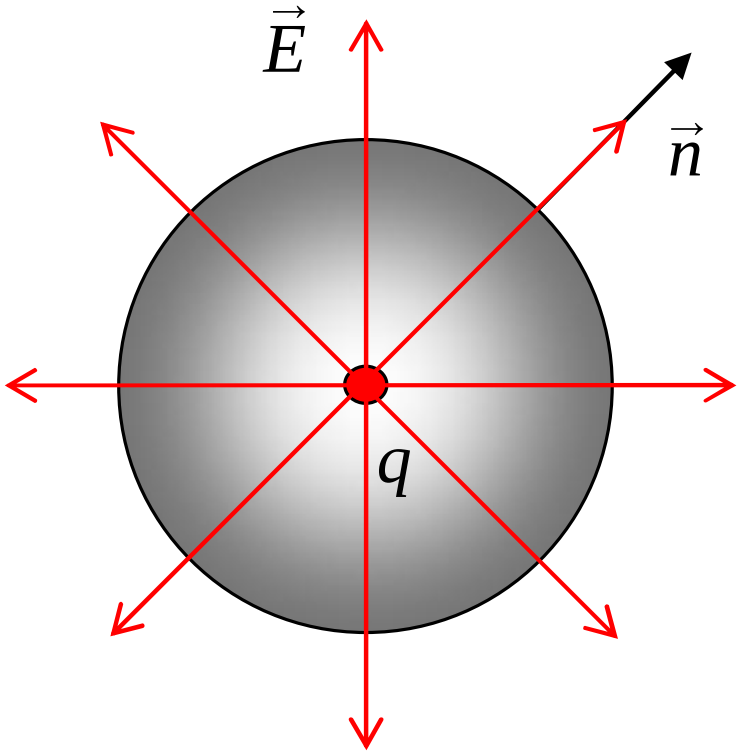
Полный поток сквозь замкнутую поверхность равен интегралу по этой поверхности

$$\Phi = \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S} \right)$$

Для замкнутых поверхностей положительной нормалью считается внешняя нормаль.

Поток - алгебраическая величина.
Поток может быть Ф>0, Ф<0 и Ф=0.

Поток сквозь сферическую поверхность, охватывающую точечный заряд



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

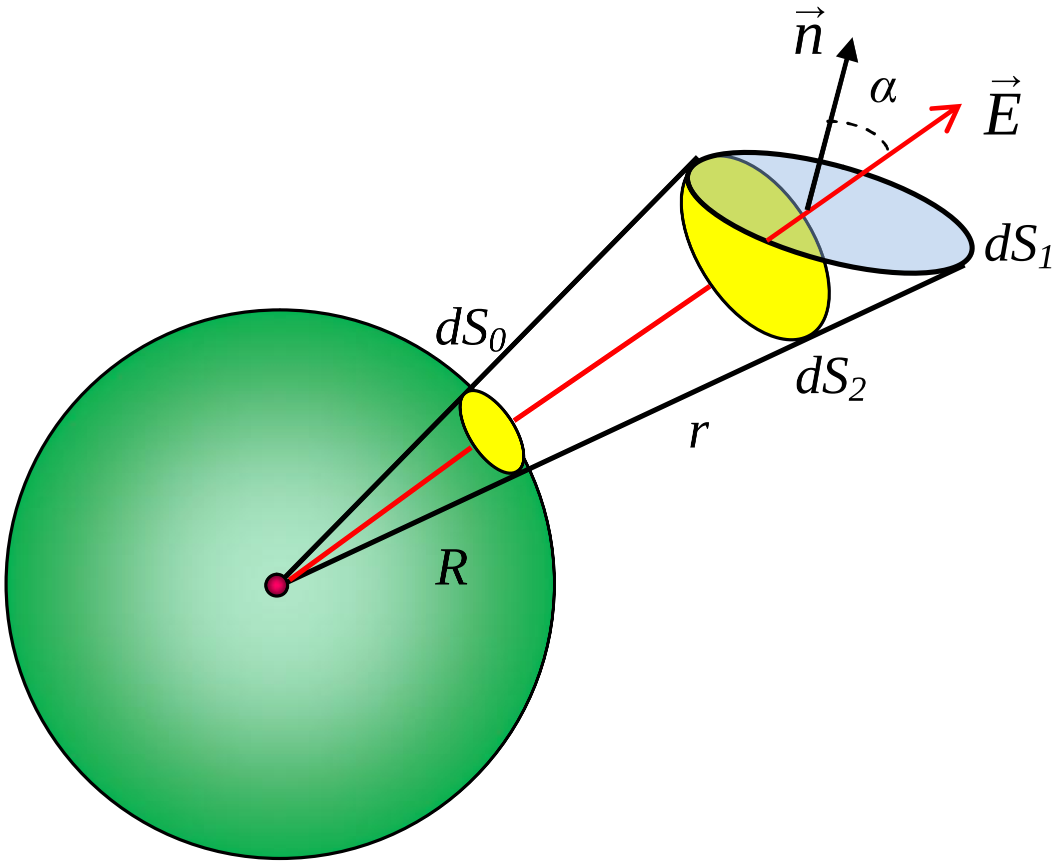
$$d\vec{S} = \vec{n}dS \qquad \vec{r} = r\vec{n}$$

$$\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\vec{n}, \vec{n}\right)dS$$

$$\left(\vec{n}, \vec{n}\right) = 1$$

$$\Phi = \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint\limits_S dS \qquad \oint\limits_S dS = 4\pi r^2 \qquad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Поток сквозь произвольную поверхность, охватывающую точечный заряд



$$d\Phi_0 = E(R)dS_0$$

$$d\Phi_1 = E(r)\cos(\alpha)dS_1$$

$$dS_2 = \cos(\alpha)dS_1$$

$$\frac{d\Phi_0}{d\Phi_1} = \frac{E(R)dS_0}{E(r)dS_2}$$

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{dS_0}{dS_2}$$

$$d\Phi_0 = d\Phi_1$$

Принцип суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \left(\vec{E}_i, d\vec{S}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

Если вектора напряженности складываются геометрически, то потоки - алгебраически.

Теорема Гаусса

Полный поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Справедливость теоремы Гаусса вытекает из закона Кулона, являясь следствием того, что напряженность электрического поля точечного заряда убывает как r^{-2} . В свою очередь из теоремы Гаусса можно вывести закон Кулона. Фактически это один и тот же физический закон, выраженный различными математическими терминами.

Теорема Гаусса служит удобным инструментом при расчете напряженности полей в задачах, обладающих симметрией.

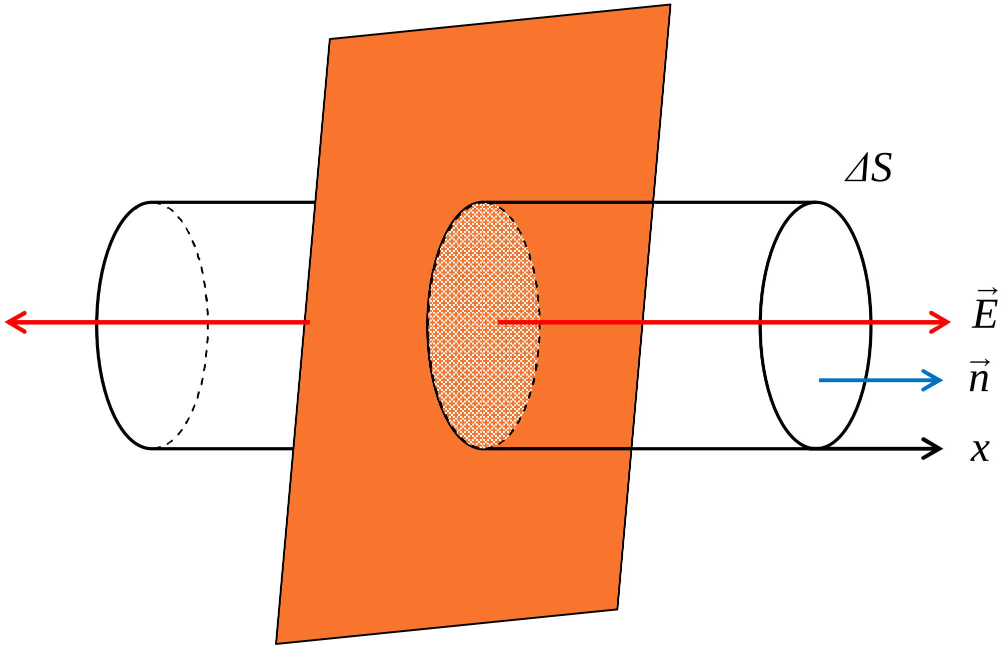
Теорема Ирншоу

Если между зарядами действуют только кулоновские силы, то любая система покоящихся точечных зарядов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, не может быть устойчивой.

Бесконечная равномерно заряженная плоскость

Φ_D - полный поток сквозь поверхность цилиндра согласно определению.
Φ_{B1} и Φ_{B2} - поток сквозь правое и левое основание.
Φ_S - поток сквозь боковую поверхность цилиндра.
Φ_G - поток согласно теореме Гаусса.

$$\sigma = const$$



$$\Phi_D = \Phi_S + \Phi_{B1} + \Phi_{B2}$$

$$\Phi_{B1} = \Phi_{B2} = E(x)\cos(0)\Delta S$$

$$\Phi_S = 0$$

$$\Phi_D = 2E(x)\Delta S$$

$$q = \sigma \Delta S$$

$$\Phi_G = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_D = \Phi_G$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Потенциал

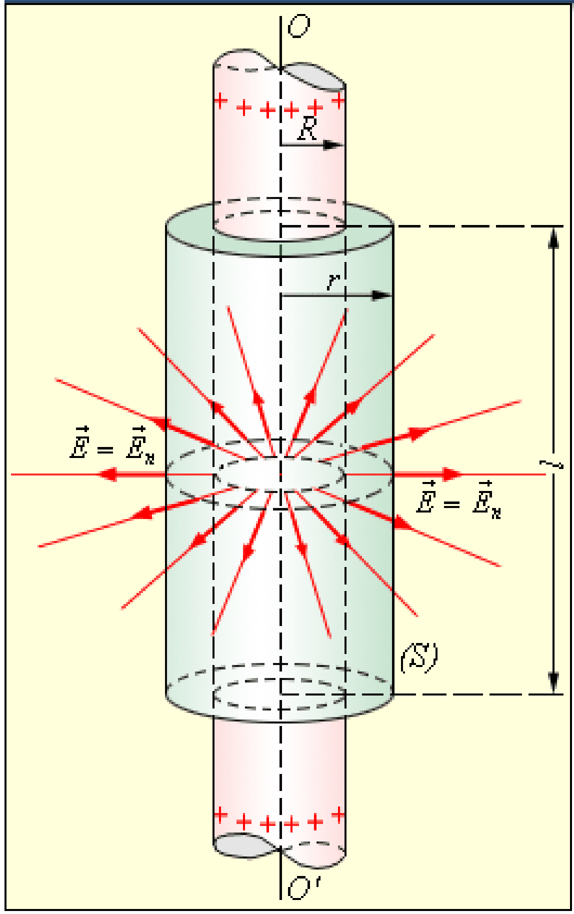
$$E = -\frac{d\varphi}{dx} \qquad \varphi(x) = -\int E(x)\,dx$$

$$x > 0 \qquad \varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + C \qquad \varphi(0) = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$x < 0 \qquad \varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + C \qquad \varphi(0) = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x < 0 \end{cases}$$

Бесконечно длинный равномерно заряженный цилиндр (нить)



$$\Phi_D = \Phi_S + \Phi_{B1} + \Phi_{B2}$$

$$\Phi_{B1} = \Phi_{B2} = 0$$

$$\Phi_S = E(r)\cos(0)S$$

$$\Phi_D = E(r)S$$

$$q = \gamma L$$

$$\Phi_G = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \frac{\gamma L}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_D = \Phi_G$$

$$E(r)S = \frac{\gamma L}{\varepsilon_0}$$

$$S = 2\pi r L$$

$$\gamma = const$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Потенциал

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

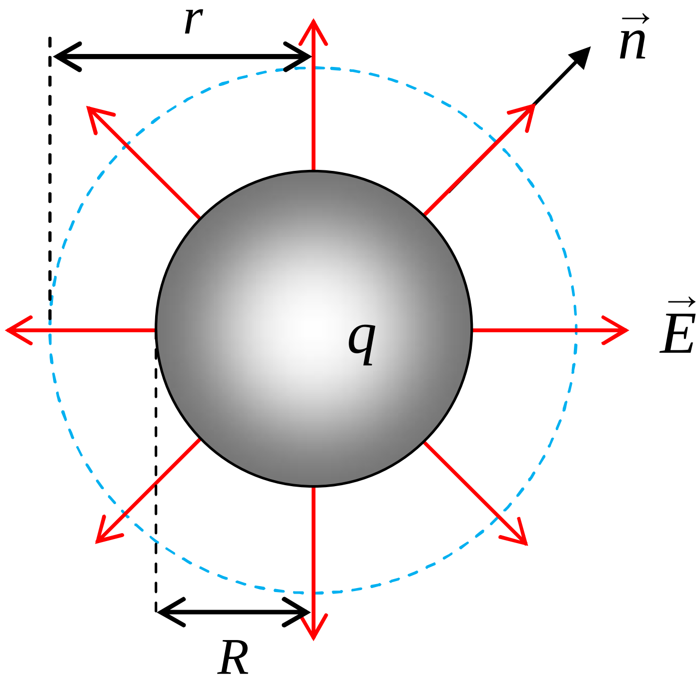
$$\varphi(r) = -\int E(r)\,dr$$

$$\varphi(r) = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C$$

Равномерно заряженная сфера

$\sigma = const$

$r \geq R$



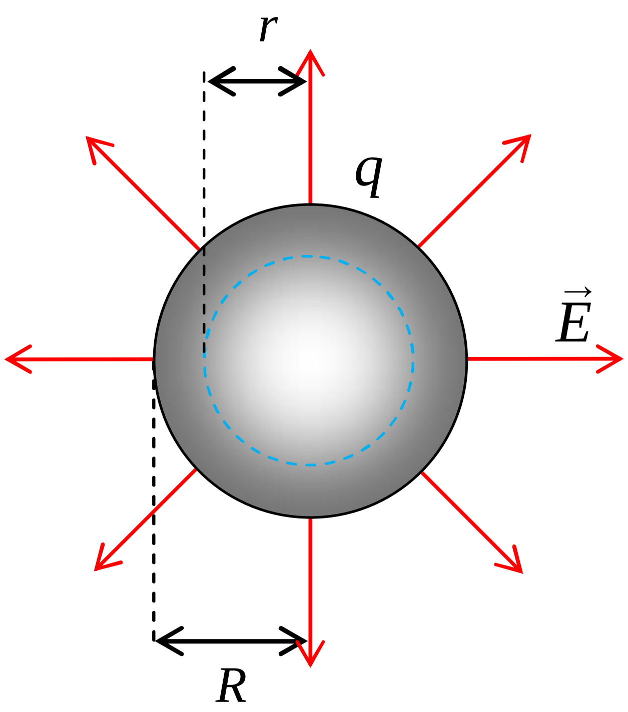
$$\Phi_D = E(r)\cos(0)S \qquad S = 4\pi r^2$$

$$q = \sigma S \qquad \Phi_G = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\Phi_D = \Phi_G$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Равномерно заряженная сфера



$$r < R$$

$$\Phi_D = E(r)\cos(0)S$$

$$q = 0 \qquad \Phi_G = 0$$

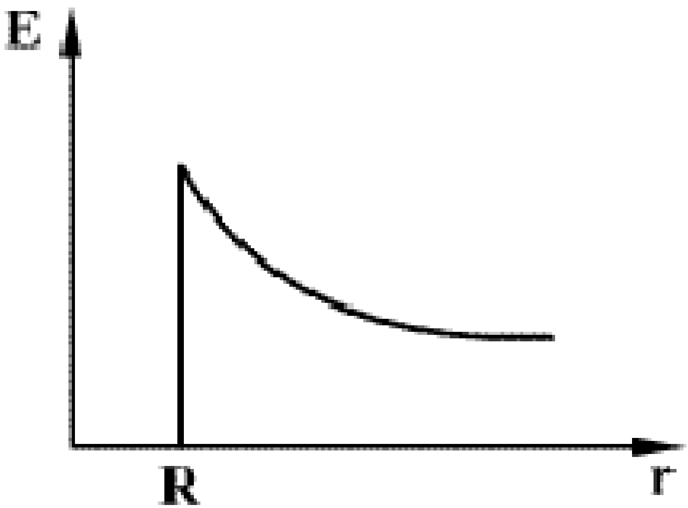
$$\Phi_D = \Phi_G$$

$$E = 0$$

Внутри равномерно заряженной сферы электростатическое поле отсутствует.

Равномерно заряженная сфера

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & r\geq R\\ 0, & r<R\end{cases}$$



Потенциал

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \qquad \varphi(r) = -\int E(r)\,dr$$

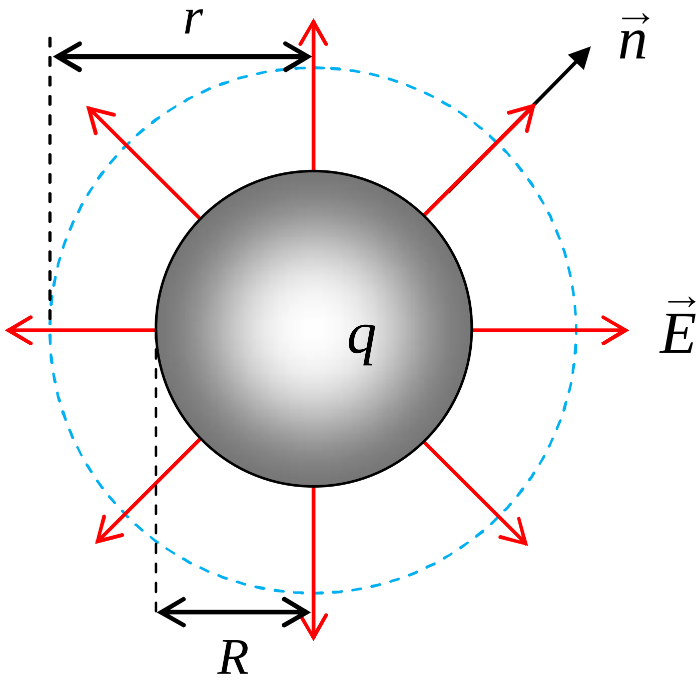
$r \geq R$ $\qquad \varphi(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C_1 \qquad \varphi(\infty) = 0 \qquad C_1 = 0$

$r < R$ $\qquad \varphi(r) = C_2 \qquad \lim\limits_{\delta\to 0}\varphi(R-\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0}\varphi(R+\delta) \qquad C_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}, & r \geq R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R}, & r < R \end{cases}$$

Равномерно заряженный шар

$\rho = const$ $\qquad r \geq R$



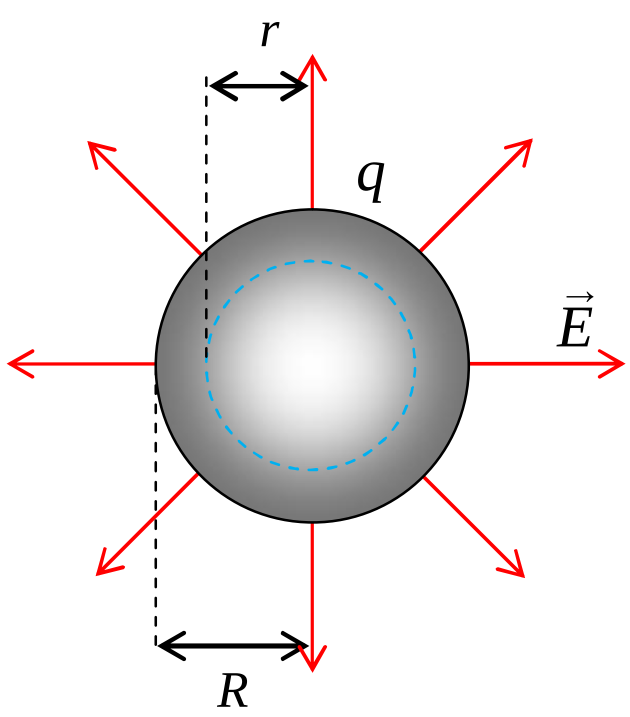
$$\Phi_D = E(r)\cos(0)S \qquad S = 4\pi r^2$$

$$q = \rho V \qquad \Phi_G = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

$$\Phi_D = \Phi_G$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Равномерно заряженный шар



$r < R$

$$\Phi_D = E(r)\cos(0)S$$

$$q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3 \qquad \Phi_G = \frac{1}{\varepsilon_0} q'$$

$$\Phi_D = \Phi_G \qquad E(r)S = \frac{1}{\varepsilon_0} q'$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2} = \frac{\rho}{3\pi\varepsilon_0} r \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3} r$$

Равномерно заряженный шар

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & r\geq R\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}r, & r<R\end{cases}$$