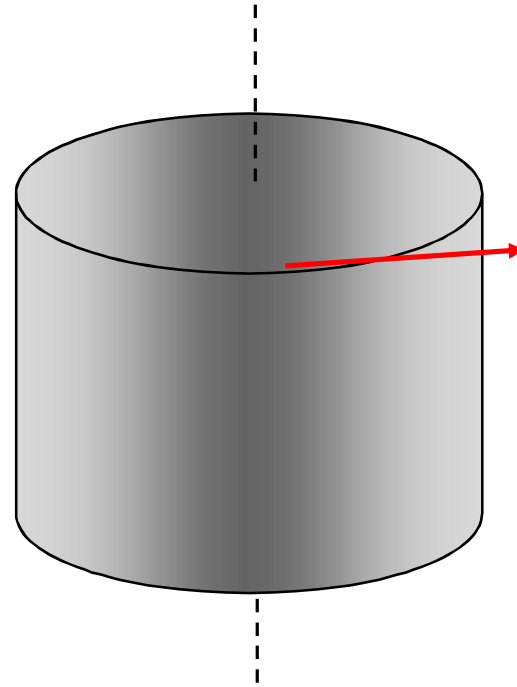
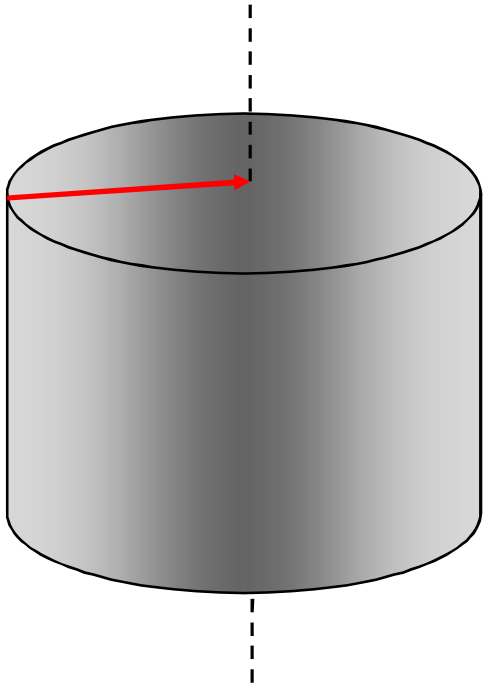


# Лекция 4

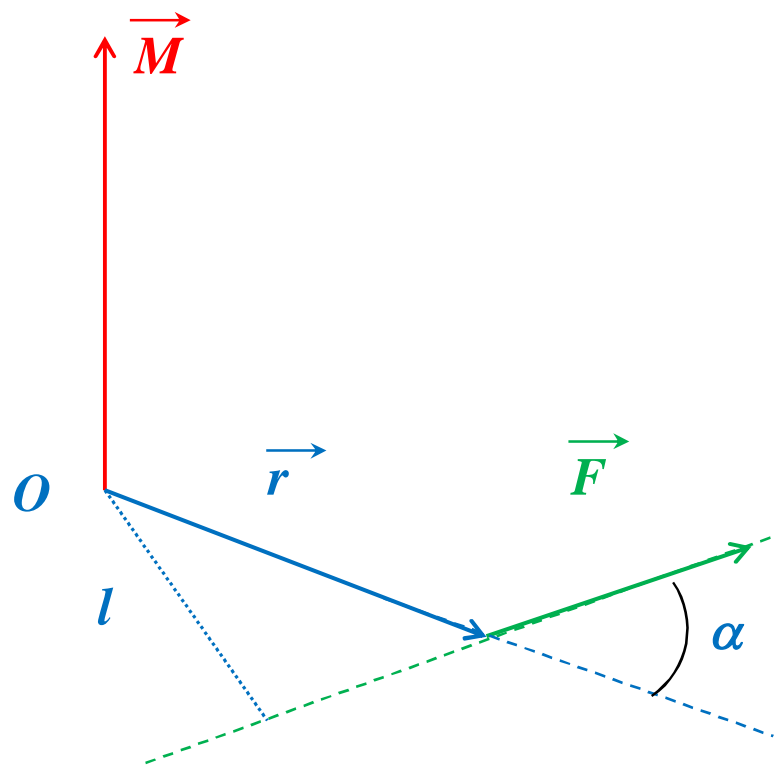
***Момент сил. Уравнение динамики вращательного движения. Момент импульса частицы и системы частиц. Закон сохранения момента импульса.***

# Что является причиной вращения?



# Момент силы относительно точки

**Момент силы относительно точки  $O$**  - это векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведенного из точки  $O$  к точке приложения силы, на вектор силы.



$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

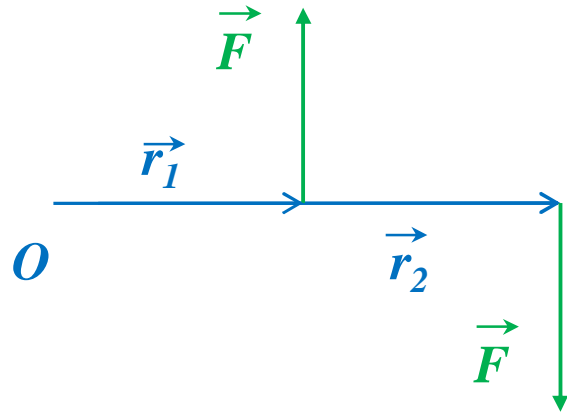
$$M = Fr \sin \alpha$$

$$l = r \sin \alpha$$

Плечо силы – кратчайшее расстояние между точкой  $O$  и линией действия силы.

Момент силы не изменится, если силу переместить вдоль линии действия силы.

## Момент пары сил



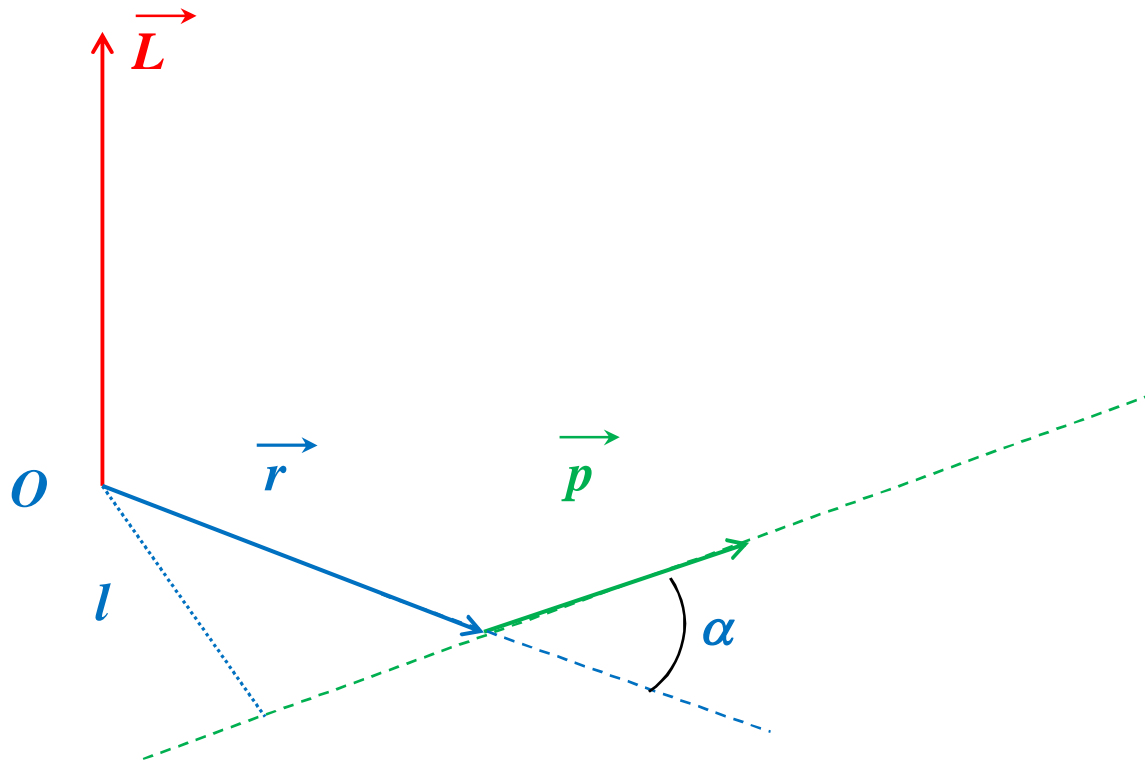
$$\vec{M} = [\vec{r}_2 \times \vec{F}] - [\vec{r}_1 \times \vec{F}] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}]$$

Момент пары сил не зависит от положения точки  $O$ .

Если силы лежат на одной прямой, то их момент равен нулю.

# Момент импульса относительно точки

**Момент импульса материальной точки относительно точки  $O$**  - это векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведенного из точки  $O$  к материальной точке, на вектор импульса.



$$\vec{L} = \left[ \vec{r} \times \vec{p} \right]$$

# Уравнение моментов

Пусть точка  $O$  неподвижна, тогда

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$$



$$[\vec{V} \times \vec{p}] = 0$$

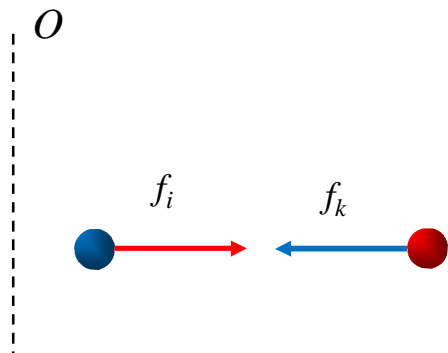
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$



$$\left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

# Уравнение моментов для системы материальных точек



$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \right]$$

$$\sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \vec{f}_i \right] = 0$$

$\vec{F}_i$  - внешние силы

$\vec{f}_i$  - внутренние силы

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right]$$

## Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

Если система замкнута, то

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$$

$$\vec{L} = \text{const}$$

Векторная сумма всех моментов импульса относительно любой неподвижной точки для замкнутой системы остается постоянной со временем.

Закон сохранения момента импульса следует из изотропности пространства.

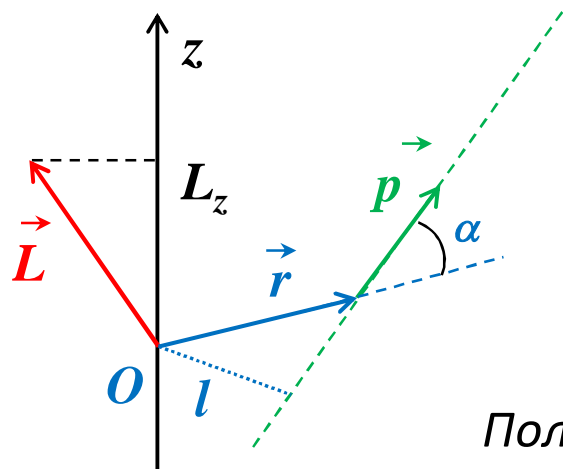
Изотропность – свойство пространства, заключающееся в том, что в пространстве все направления равноправны, отсутствует выделенное направление, относительно которого существует симметрия.



# Момент импульса и момент силы материальной точки относительно оси

Момент импульса  $L_z$  относительно неподвижной оси  $z$  равен проекции на эту ось вектора момента импульса относительно произвольной точки  $O$ , лежащей на этой оси.

Момент силы  $M_z$  относительно неподвижной оси  $z$  равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно произвольной точки  $O$ , лежащей на этой оси.



*Положение точки  $O$  не влияет на величину момента.*

## Уравнение моментов относительно неподвижных осей

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси

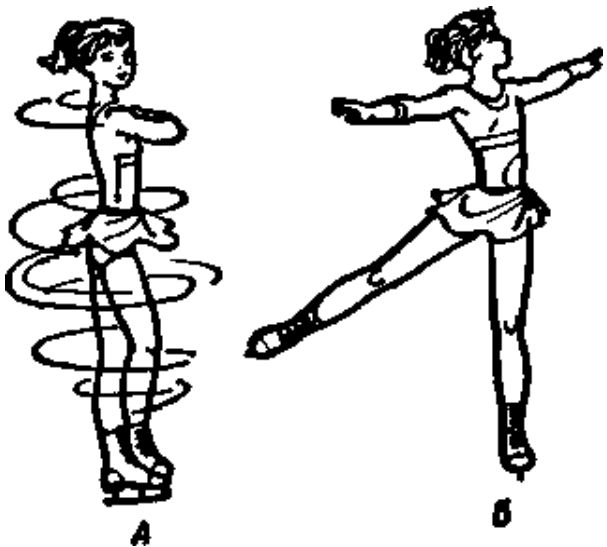
$$M_z = 0 \quad \longrightarrow \quad L_z = \text{const}$$

# Момент импульса твердого тела

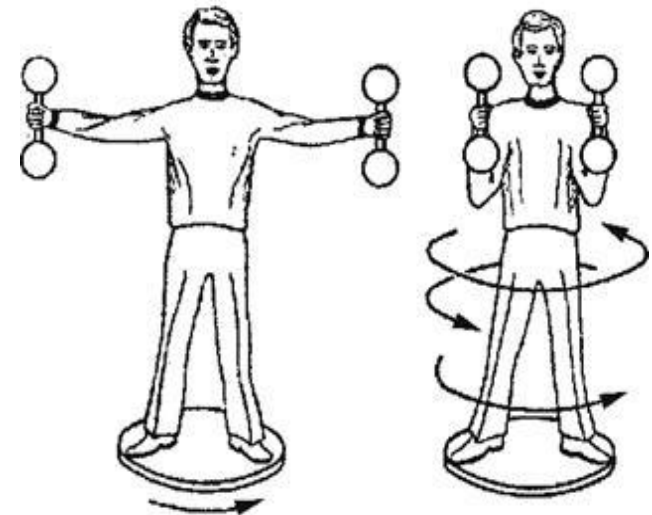
Материальная точка  $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad L_z = mVr \sin(\pi/2) = mr^2\omega = J_z\omega$

Твердое тело 
$$L_z = \sum_{i=1}^N \Delta J_{zi} \omega = \omega \sum_{i=1}^N \Delta J_{zi} = J_z \omega$$

## Закон сохранения момента импульса относительно оси



$$L_z = J_z \omega = \text{const}$$



**Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad L_z = J_z \omega$$

$$\frac{d}{dt} (J_z \omega) = M_z$$

$$J_z \varepsilon = M_z$$

# Работа при вращении тела

Материальная точка

$$dA = (\vec{F}, d\vec{s}) = Frd\varphi = M_z d\varphi$$

Твердое тело - система материальных точек, вращающихся с одинаковой угловой скоростью.

Момент внутренних сил равен нулю.

$$dA = M_z d\varphi$$