Лекция 3

Кинематика вращательного движения.

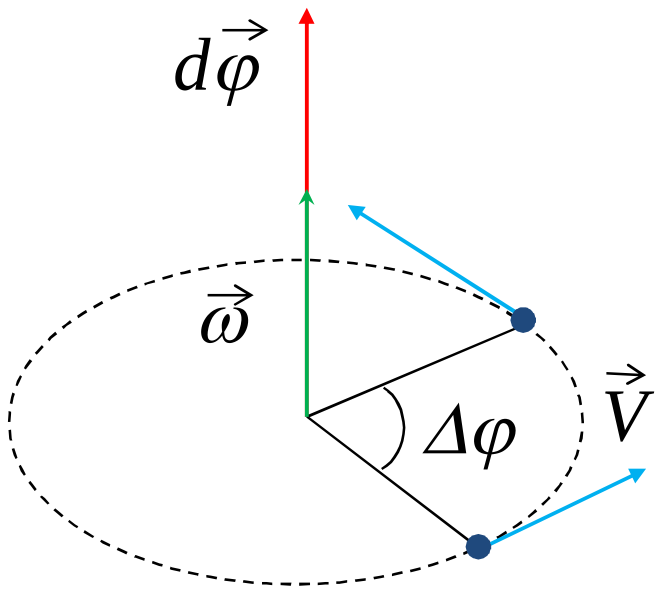
Векторы угловой скорости и ускорения.

Энергия вращательного движения. Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера.

Вращательное движение – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой.

Кинематика вращательного движения

Элементарное угловое перемещение – псевдовектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и численно равный бесконечно малому углу поворота.



$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Угловая скорость – первая производная от углового перемещения по времени.

Равномерное движение по окружности

$$\omega = const$$

Период – промежуток времени, за который совершается один оборот.

$$\omega = 2\pi / T$$

Частота вращения – число оборотов в единицу времени.

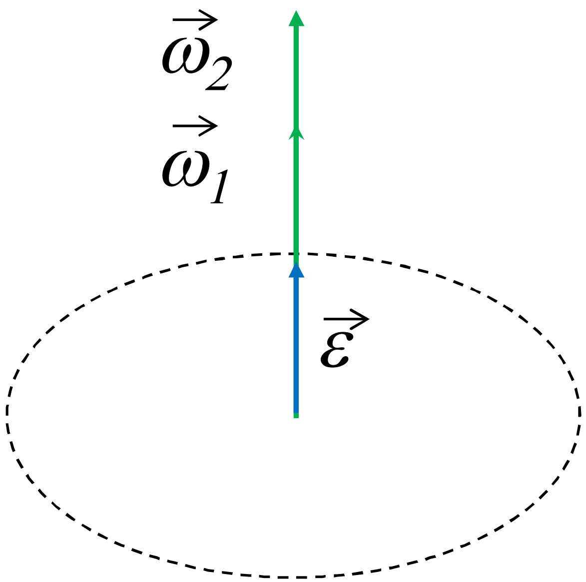
$$\nu = 1/T$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

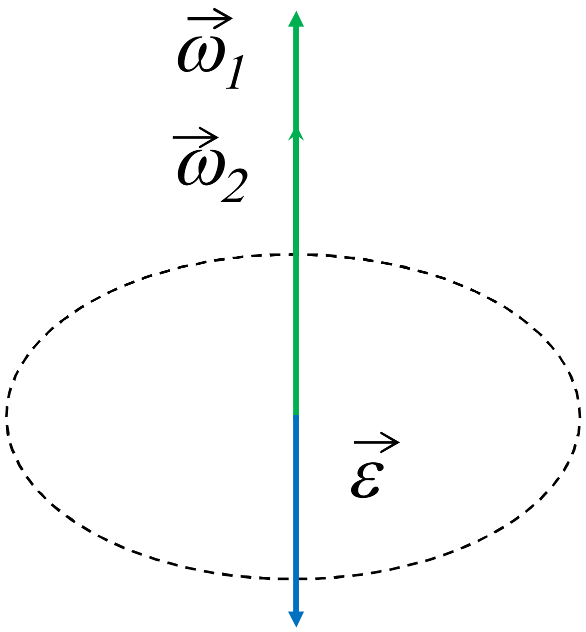
Угловое ускорение

Угловое ускорение – первая производная от угловой скорости по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



$\omega_2 > \omega_1 \qquad \varepsilon > 0$



$\omega_1 > \omega_2 \qquad \varepsilon < 0$

Равнопеременное движение по окружности

$$\varepsilon = const$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \omega = \int \varepsilon(t)\,dt$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad \varphi = \int \omega(t)\,dt$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Связь угловых и линейных величин

$$dS = R d\varphi$$

$$V = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$$

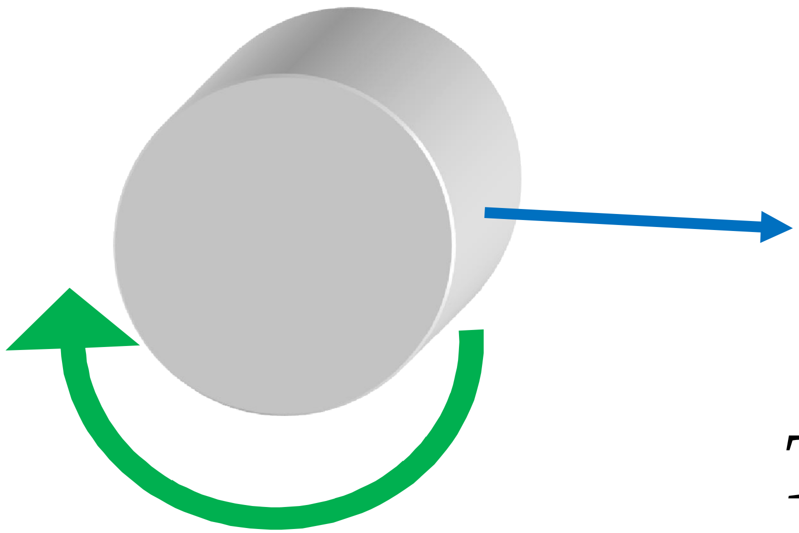
Кинетическая энергия вращающегося тела

$$V_i = \omega r_i \qquad T = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^2 / 2 = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i r_i^2 \right) \omega^2 / 2$$

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad T = J \omega^2 / 2$$

Момент инерции – мера инертности тела во вращательном движении

Кинетическая энергия катящегося тела



$$T = mV^2/2 + J\omega^2/2$$

Кинетическая энергия катящегося тела состоит из кинетической энергии поступательного перемещения центра масс и кинетической энергии вращения.

Момент инерции

$$J = mr^2$$

материальная точка

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

система материальных точек

Момент инерции обладает свойством аддитивности, момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции тел, входящих в систему.

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_N$$

Твердое тело

Если распределение массы твердого тела определяется функцией

$$r = r(m),$$

то, момент инерции есть интеграл

$$J = \int r^2(m)\,dm.$$

Выразим элементарную массу как

$$dm = \rho(r)\,dV.$$

Тогда, момент инерции твердого тела есть интеграл по объему

$$J = \int\limits_V \rho(r)\,r^2 dV$$

Момент инерции

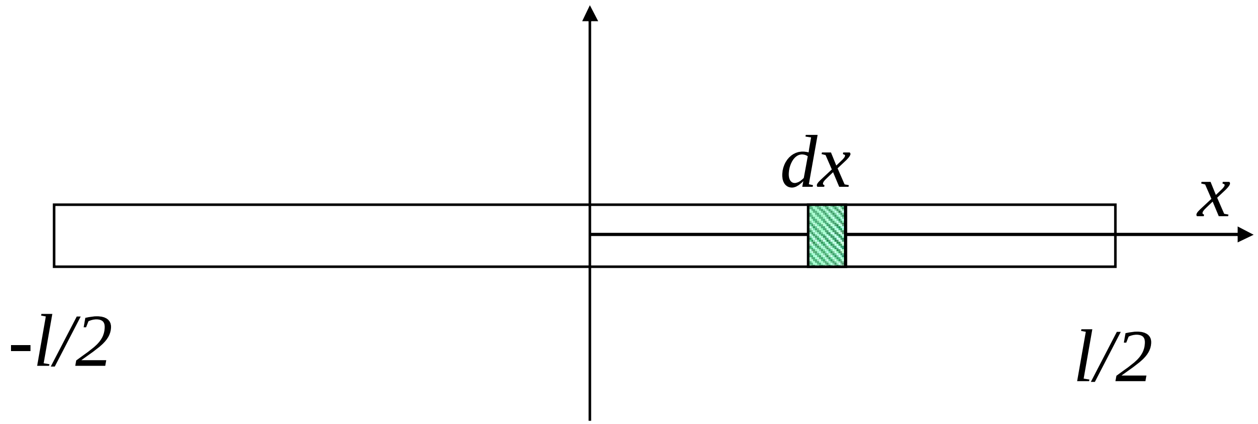
$$J = \int_V \rho(r) r^2 dV$$

Момент инерции зависит от:

- ✓ *Массы*
- ✓ *Формы тела*
- ✓ *Размеров тела*
- ✓ *Положения оси*

Момент инерции в динамике вращательного движения играет ту же роль, что и масса тела в динамике поступательного движения. Однако, если масса – внутреннее свойство данного тела, не зависящее от его движения, то момент инерции тела зависит от того, вокруг какой оси оно вращается.

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину



$$\rho = const$$

$$S = const$$

$$dm = \rho S dx$$

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 S dx = \rho S \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S}{3}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right) = \rho S l \frac{l^2}{12}$$

$$\boxed{J = \frac{ml^2}{12}}$$

Моменты инерции некоторых правильных тел

$$J = mR^2 / 2$$

диск (цилиндр)

$$J = 2mR^2 / 5$$

шар

$$J = mR^2$$

тонкий обруч

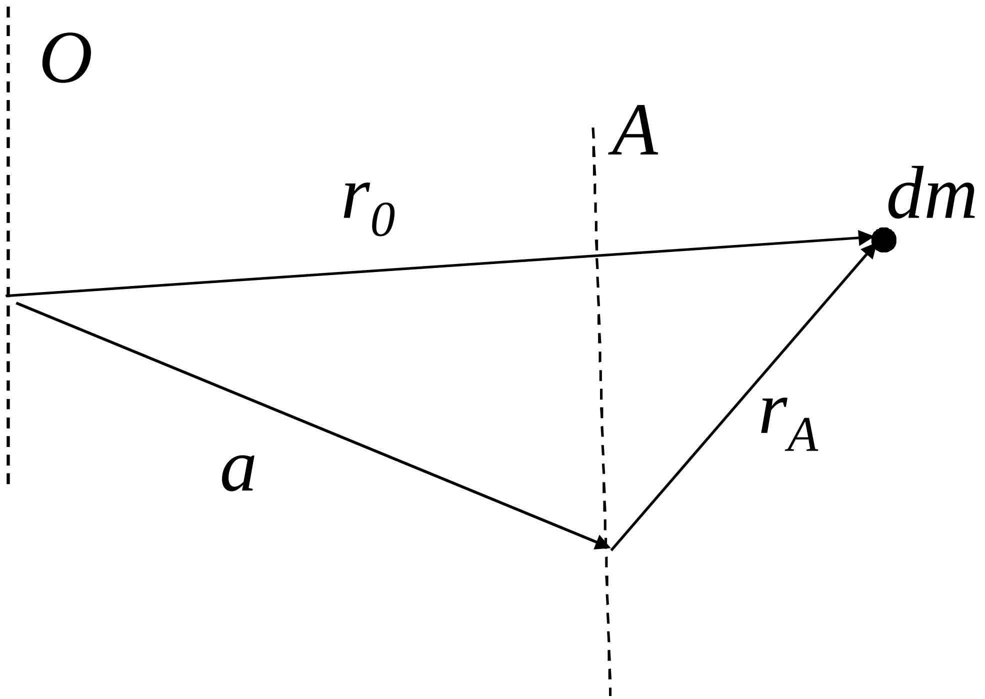
$$J = m\left(R_{out}^2 + R_{in}^2\right) / 2$$

кольцо

Теорема Штейнера

O – ось, проходящая через центр масс

A – произвольная ось, параллельная оси *O*



$$\vec{r}_0 = \vec{r}_A + \vec{a}$$

$$r_A^2 = r_0^2 + a^2 - 2\left(\vec{a}, \vec{r}_0\right)$$

$$J_A = \int r_A^2 dm$$

$$\int r_A^2 dm = \int r_0^2 dm + a^2 \int dm - 2\left(\vec{a}, \int \vec{r}_0 dm\right)$$

$$\int r_A^2 dm = \int r_0^2 dm + a^2 \int dm - 2\left(\vec{a}, \int \vec{r_0} dm\right)$$

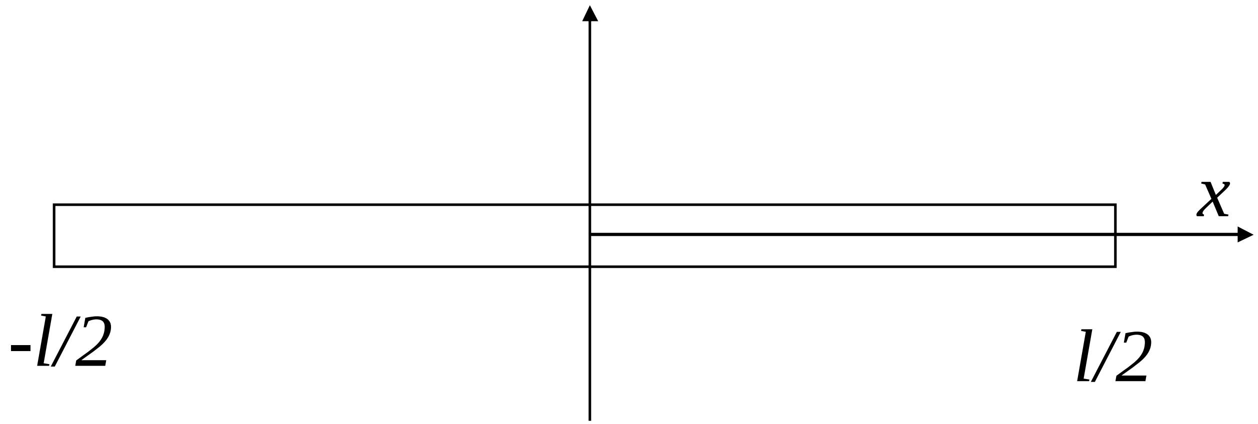
$$\int r_0^2 dm = J_O \qquad \int dm = m \qquad \vec{R}_C = \frac{1}{m}\int \vec{r_0} dm = 0$$

$\vec{R}_C$ - радиус-вектор центра масс

$$J_A = J_O + ma^2$$

Для того, чтобы определить момент инерции тела относительно произвольной оси, необходимо сложить момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, с произведением массы на квадрат расстояний между осями.

Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его край



$$\boxed{J_O = \frac{ml^2}{12}}$$

$$J_A = J_O + ma^2$$

$$a = l/2$$

$$J_A = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$