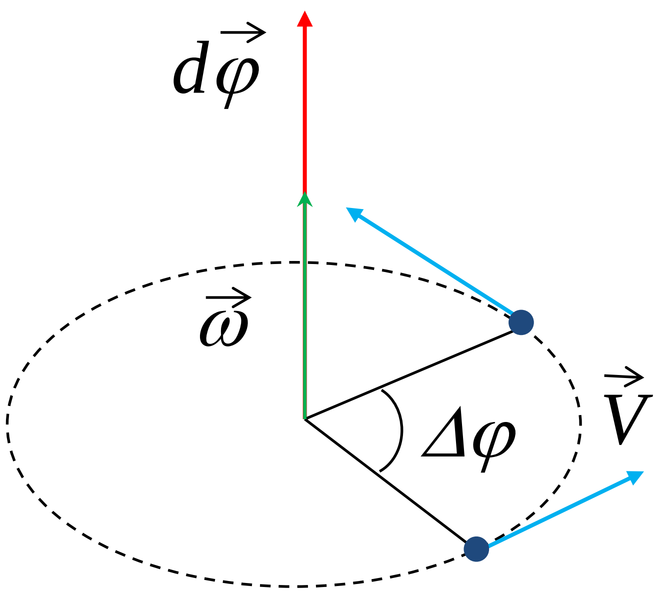
Лекция 3

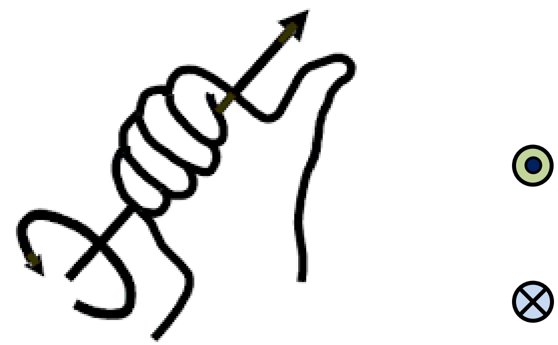
Кинематика и динамика вращательного движения

Вращательное движение – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой.

Кинематика вращательного движения

Элементарное угловое перемещение – псевдовектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и численно равный бесконечно малому углу поворота.





$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Угловая скорость – первая производная от углового перемещения по времени.

Равномерное движение по окружности

$$\omega = const$$

Период – промежуток времени, за который совершается один оборот.

$$\omega = 2\pi/T$$

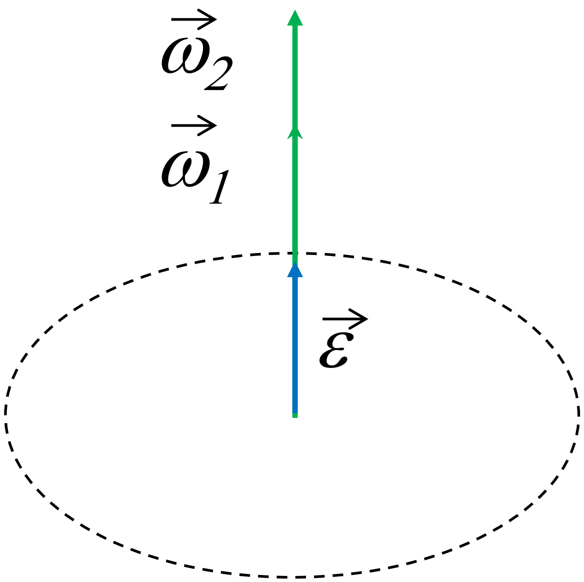
Частота вращения – число оборотов в единицу времени.

$$\nu = 1/T$$

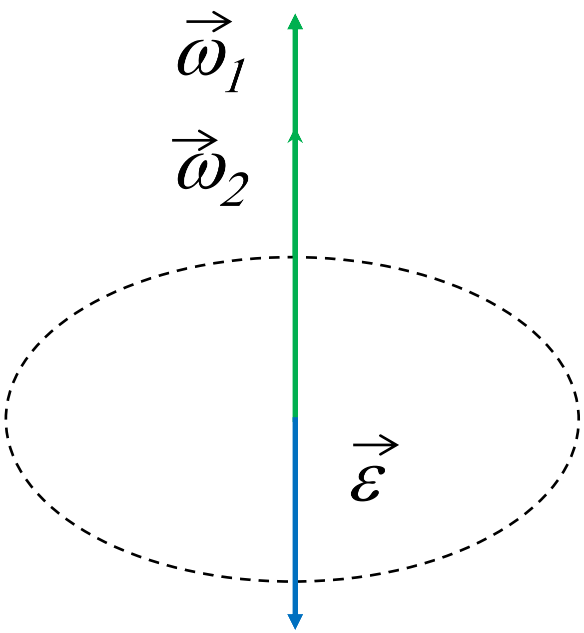
$$\omega = 2\pi\nu$$

Угловое ускорение

Угловое ускорение – первая производная от угловой скорости по времени.



$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



$\omega_2 > \omega_1 \quad \varepsilon > 0$

$\omega_1 > \omega_2 \quad \varepsilon < 0$

Равнопеременное движение по окружности

$$\varepsilon = const$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\omega = \int \varepsilon(t)\,dt$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\varphi = \int \omega(t)\,dt$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Связь угловых и линейных величин

$$dS = R d\varphi$$

$$V = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(R\omega\right)^2}{R} = \omega^2 R$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$V_i = \omega r_i$$

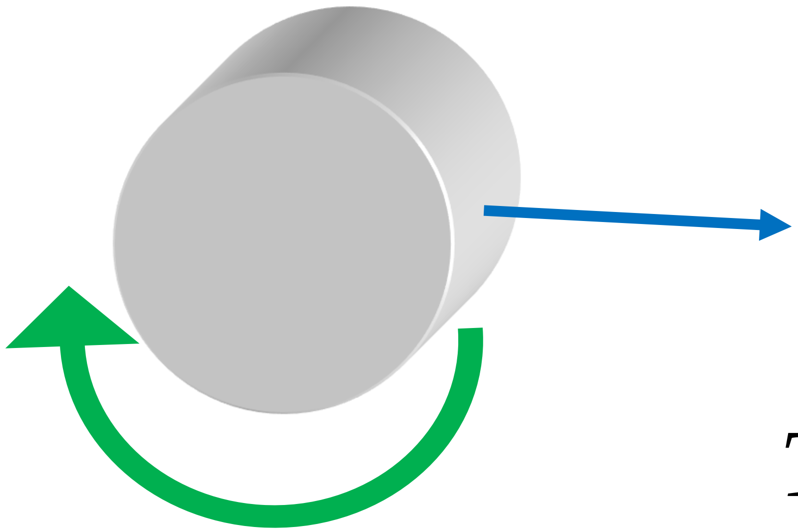
$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i^2 / 2 = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i r_i^2 \right) \omega^2 / 2$$

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

$$T = J\omega^2 / 2$$

Момент инерции – мера инертности тела во вращательном движении

Кинетическая энергия катящегося тела



$$T = mV^2/2 + J\omega^2/2$$

Кинетическая энергия катящегося тела состоит из кинетической энергии поступательного перемещения центра масс и кинетической энергии вращения.

Момент инерции

$$J = mr^2$$

материальная точка

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

система материальных точек

Момент инерции обладает свойством аддитивности, момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции тел, входящих в систему.

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_N$$

Твердое тело

Если распределение массы твердого тела определяется функцией

$$r = r(m),$$

то, момент инерции есть интеграл

$$J = \int r^2(m)\,dm.$$

Выразим элементарную массу как

$$dm = \rho(r)\,dV.$$

Тогда, момент инерции твердого тела есть интеграл по объему

$$J = \int_V \rho(r)\,r^2\,dV$$

Момент инерции

$$J = \int_V \rho(r) r^2 dV$$

Момент инерции зависит от:
- ✓ *Массы*
- ✓ *Формы тела*
- ✓ *Размеров тела*
- ✓ *Положения оси*

Момент инерции в динамике вращательного движения играет ту же роль, что и масса тела в динамике поступательного движения. Однако, если масса – внутреннее свойство данного тела, не зависящее от его движения, то момент инерции тела зависит от того, вокруг какой оси оно вращается.

Моменты инерции некоторых правильных тел

$$J = ml^2/12$$

стержень

$$J = mR^2/2$$

диск (цилиндр)

$$J = 2mR^2/5$$

шар

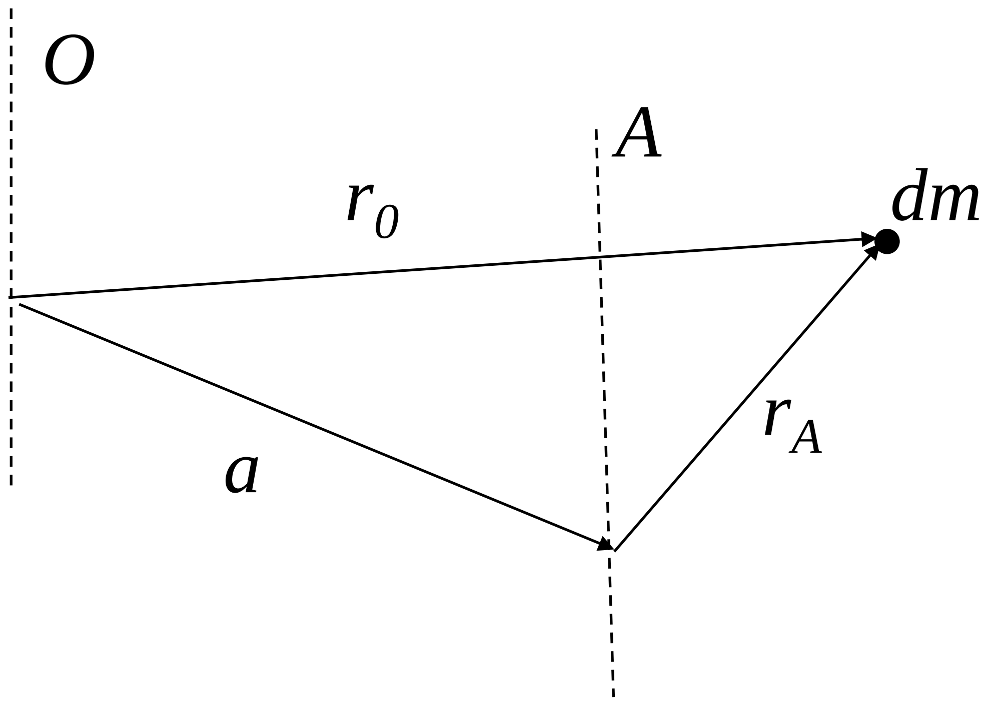
$$J = mR^2$$

тонкий обруч

$$J = m\left(R_{out}^2 + R_{in}^2\right)/2$$

кольцо

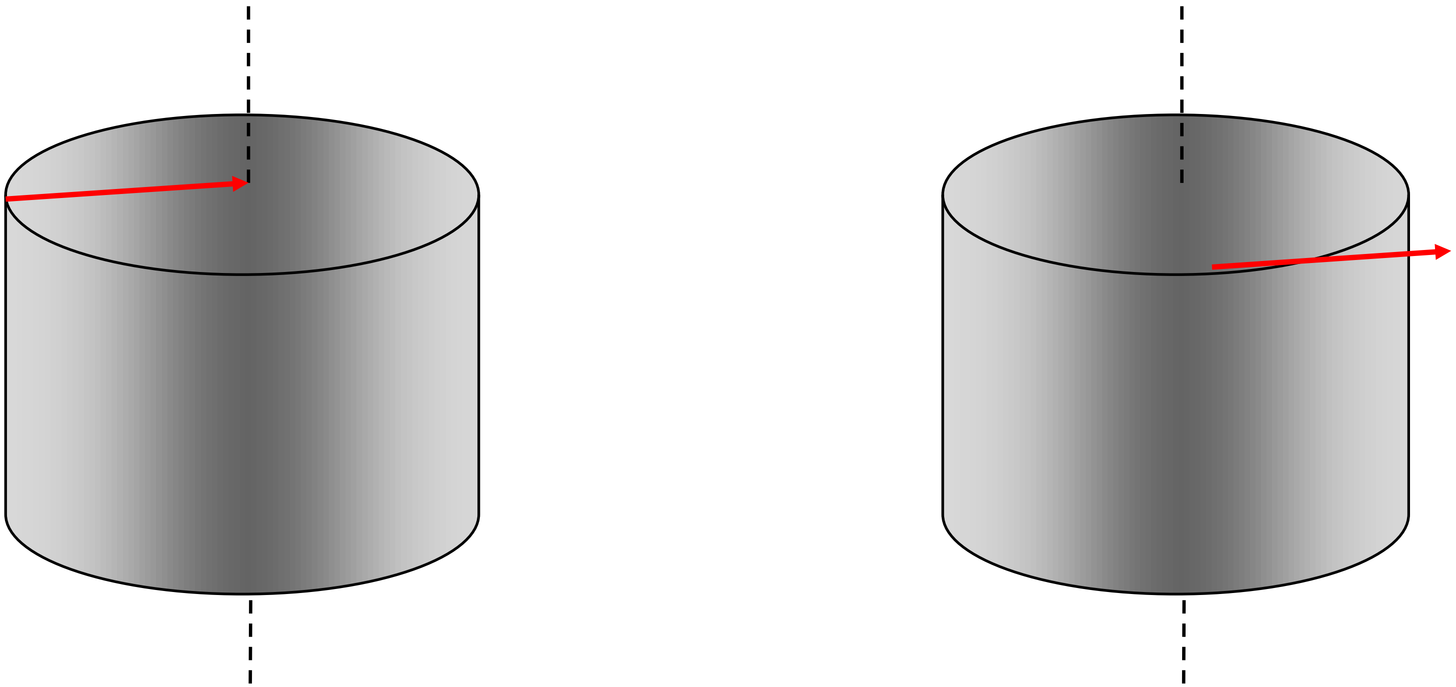
Теорема Штейнера



$$J_A = J_O + ma^2$$

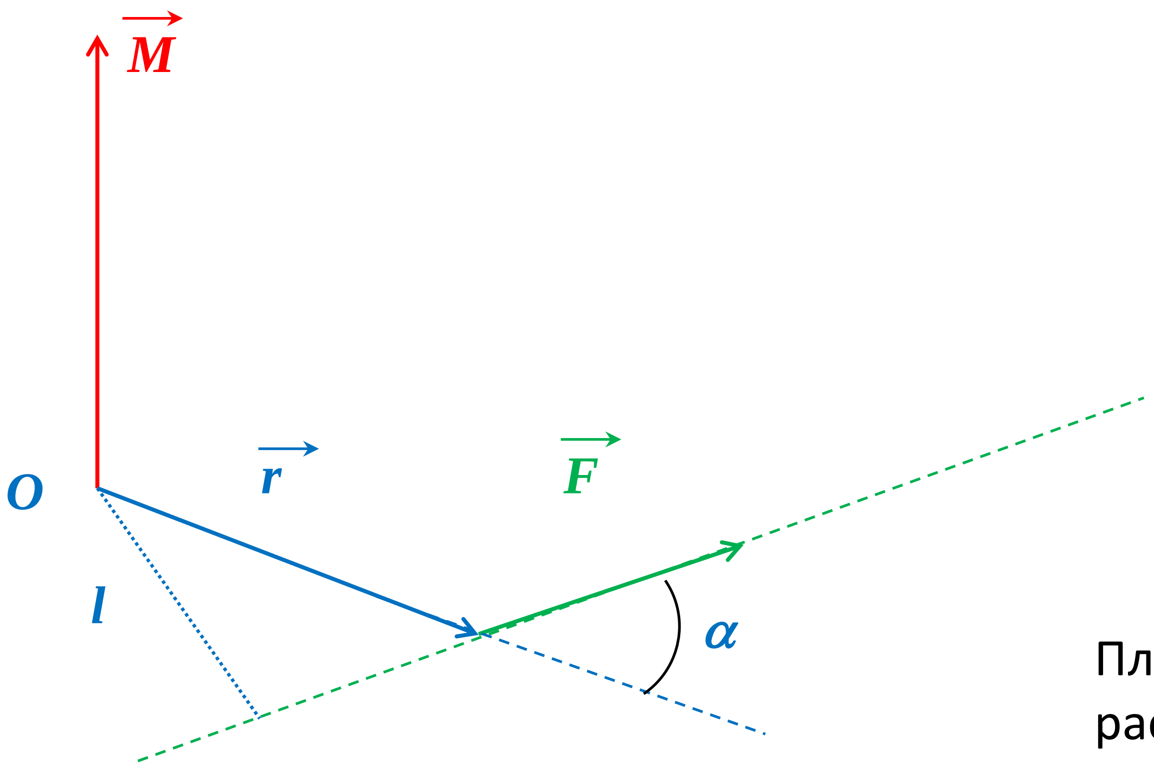
Для того, чтобы определить момент инерции тела относительно произвольной оси, необходимо сложить момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, с произведением массы на квадрат расстояний между осями.

Что является причиной вращения?



Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки *О* - это векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведенного из точки *О* к точке приложения силы, на вектор силы.



$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

$$M = Fr\sin\alpha$$

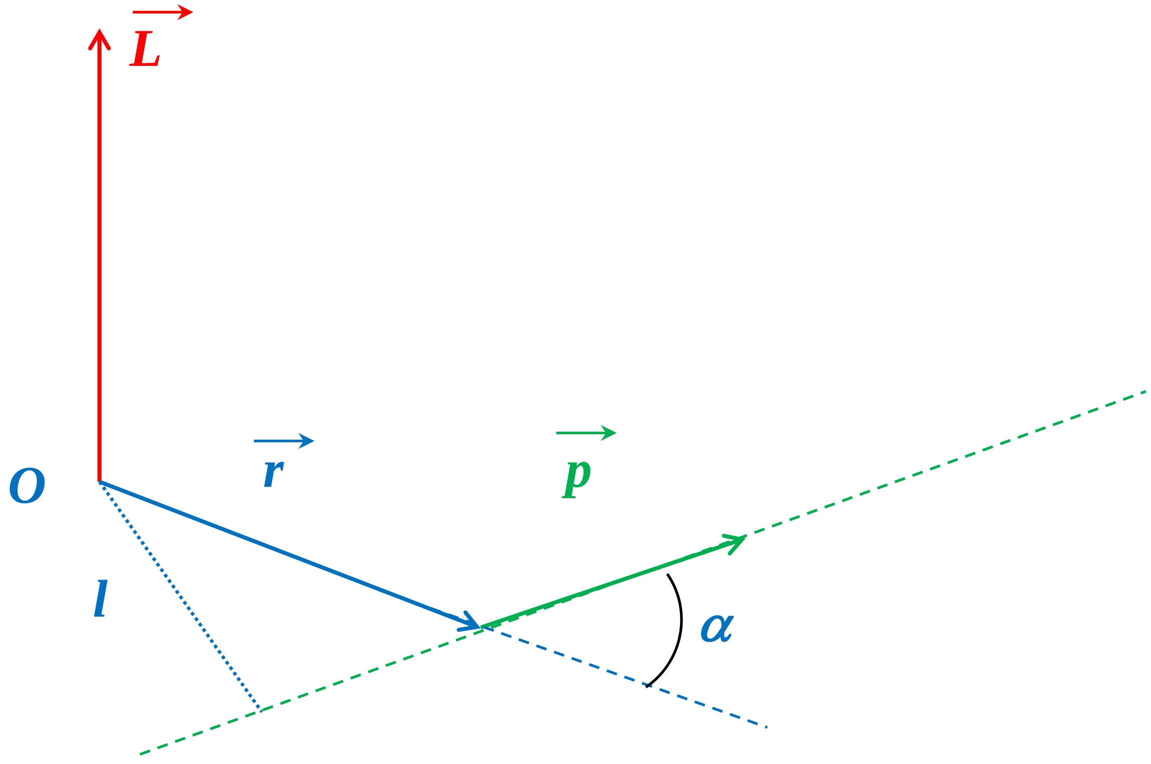
$$l = r\sin\alpha$$

Плечо силы – кратчайшее расстояние между точкой *О* и линией действия силы.

Момент силы не изменится, если силу переместить вдоль линии действия силы.

Момент импульса относительно точки

Момент импульса материальной точки относительно точки *O* - это векторная величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора, проведенного из точки *O* к материальной точке, на вектор импульса.

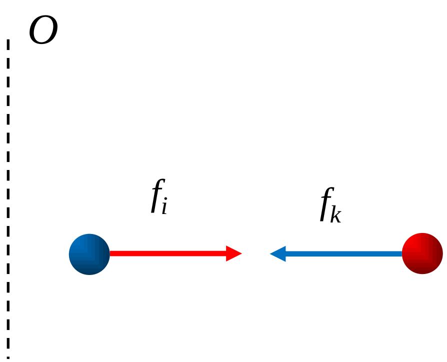


$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Уравнение моментов для системы материальных точек



$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i \right) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{f}_i \right] = 0$$

$\vec{F}_i$ - внешние силы

$\vec{f}_i$ - внутренние силы

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right]$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}$$

Если система замкнута, то $\vec{M}_{внеш} = 0$

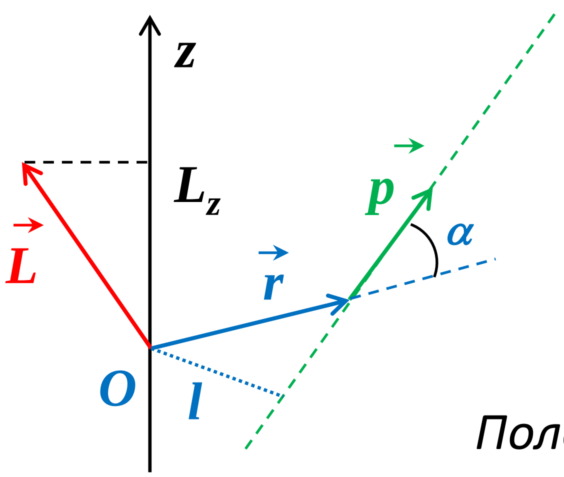
$$\vec{L} = const$$

Векторная сумма всех моментов импульса относительно любой неподвижной точки для замкнутой системы остается постоянной со временем.

Момент импульса и момент силы материальной точки относительно оси

Момент импульса L_z относительно неподвижной оси z равен проекции на эту ось вектора момента импульса относительно произвольной точки O, лежащей на этой оси.

Момент силы M_z относительно неподвижной оси z равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно произвольной точки O, лежащей на этой оси.



Положение точки О не влияет на величину момента.

Уравнение моментов относительно неподвижных осей

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \qquad \frac{dL_y}{dt} = M_y \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси

$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = const$$

Момент импульса твердого тела

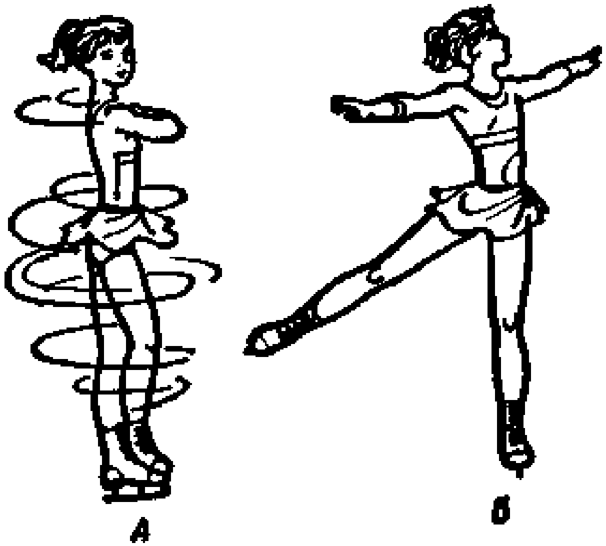
Материальная точка

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] \qquad L_z = mVr\sin(\pi/2) = mr^2\omega = J_z\omega$$

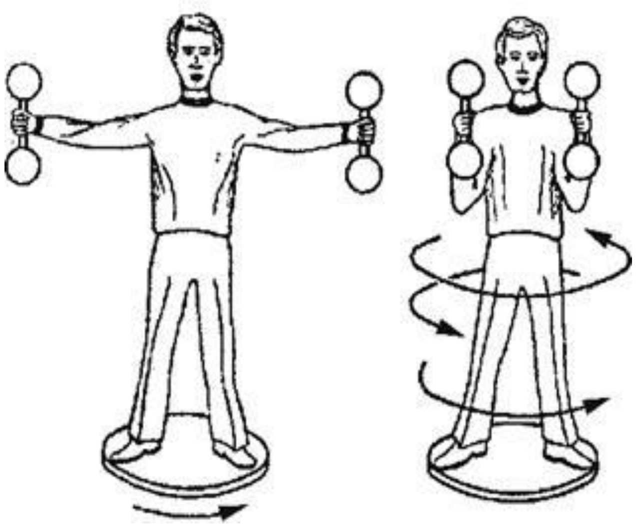
Твердое тело

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta J_{zi}\omega = \omega\sum_{i=1}^{N} \Delta J_{zi} = J_z\omega$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси



$$L_z = J_z\omega = const$$



Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad L_z = J_z\omega$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_z\omega\right) = M_z$$

$$J_z\varepsilon = M_z$$