

## Моделирование движения в гравитационном поле Земли

### Опыты Галилея

Основоположник экспериментальной физики Галилео Галилей, в своих научных построениях опирался на результаты тщательно спланированных экспериментов. Согласно записям одного из его учеников, сбросив два шара различной массы с падающей башни в Пизе, Рис. 1, Галилей установил, что время падения не зависит от массы шара. Несмотря на то, что достоверность сведений об этих опытах подвергается сомнению историками науки, данное утверждение легло в основу новой механики.



Рис. 1 Пизанская башня

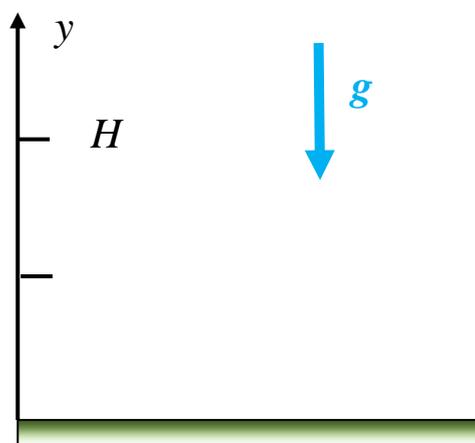


Рис. 2 Система координат

В терминах современной физики движения материальной точки массой  $m$  в поле силы тяжести определяется вторым законом Ньютона

$$ma = -mg ,$$

где  $a$  – ускорение материальной точки, а  $g$  – ускорение свободного падения.

Определим систему координат, как показано на Рис. 2, тогда движение шаров, сброшенных Галилеем, описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$y'' = -g , \quad y(0) = H , \quad y'(0) = 0 .$$

Начальные условия выбраны в соответствие с экспериментом.

Заменой переменной сведем дифференциальное уравнение второго порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) первого порядка, разрешённое относительно производной. Пусть

$$z = \begin{pmatrix} y \\ V_y \end{pmatrix} , \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} z_1' = z_2 & , z_1(0) = H \\ z_2' = -g & , z_2(0) = 0 \end{cases} .$$

Численное решение данной системы построим, используя солвер (решатель) ode45, использующий одношаговый явный метод Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка. Для этих целей создадим файл m – сценария, текст которого приводится ниже

```
g0=9.81;           % ускорение свободного падения
T0=0;              % время начала движения
TN=10;             % время окончания движения
dT=0.05;           % шаг по времени
Y0=300;            % начальная координата
YPO=0;             % начальная скорость
Shot1=@(t,y) [y(2); -g0]; % правая часть задачи Коши
[T,Y]=ode45(Shot1,[T0:dT:TN],[Y0, YPO]); % решение системы ОДУ
figure('Color',[1 1 1]);
hL1=plot(T,Y(:,1)); grid; % зависимость координаты от времени
ylabel('\ity, м','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
figure('Color',[1 1 1]);
hL2=plot(T,Y(:,2)); grid; % зависимость скорости от времени
ylabel('\itV, м/с','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL2(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
```

В результате работы программы получаем два приведенных ниже графика.

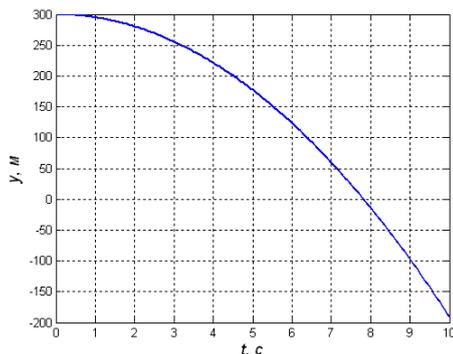


Рис. 3 Зависимость высоты от времени

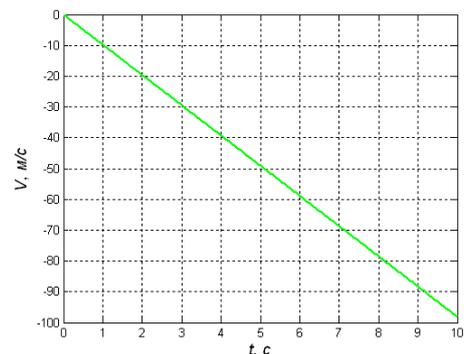


Рис. 4 Зависимость скорости от времени

Как и следовало ожидать, высота изменяется по параболическому закону, а скорость линейно нарастает со временем.

Итерационный метод решения ОДУ не предполагает прекращения расчетов при падении материальной точки на поверхность земли, что соответствует координате  $y=0$ . Решение ищется на всем заданном интервале времен. Поэтому все, что находится ниже поверхности, при  $y<0$ , не имеет физического смысла.

### ***Баллистическая задача***

Движение метательных снарядов, как то: стрел, пуль, снарядов и т.п., всегда представляло практический интерес. Как движется тело, брошенное в воздух под углом к

горизонту? На этот вопрос искали ответ со времен Аристотеля. Сегодня наука о движении метательного снаряда называется баллистикой, а траектория, по которой движется снаряд, баллистической. Галилей установил, что эта траектория параболическая.

Пусть материальной точке сообщили скорость, направленную под углом к горизонту. Поместим начало декартовой системы координат в точке, откуда движение начинается, Рис. 5. Оси направим вертикально и горизонтально.

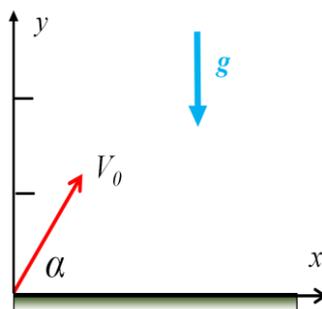


Рис. 5

Сложное криволинейное движение точки есть совокупность двух независимых движений: равномерного движения по горизонтали и равнопеременного движения по вертикали под воздействием силы тяжести. Равномерность горизонтального движения есть следствие первого закона Ньютона и предположения об отсутствии сил, действующих вдоль горизонтальной оси.

Тогда, силы запишем в виде

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg,$$

начальные скорости горизонтального и вертикального движения определим как проекции начальной скорости на оси, Рис. 5,

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_{0y} = V_0 \sin \alpha,$$

а начальные координаты  $x(0) = y(0) = 0$ .

Движение материальной точки описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = -g \end{cases}.$$

Сделав замену переменных, понизим порядок дифференциальных уравнений, сведя их к задаче Коши. Запишем уравнения и начальные условия

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} z'_1 = z_3 \\ z'_2 = z_4 \\ z'_3 = 0 \\ z'_4 = -g \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = V_0 \cos \alpha \\ z_4(0) = V_0 \sin \alpha \end{cases}.$$

Расчеты проведем, используя характеристики реального орудия. В качестве такового используем штурмовое орудие М1910, образца 1910 г., дальность стрельбы которого при использовании выстрела 76.2×191R составляла 8.6 км. Тактико-технические характеристики орудия: калибр – 76.2 мм, масса – 6.2 кг, начальная скорость снаряда – 387 м/с. Ствол орудия направим по углом  $45^0$ , что соответствует максимальной дальности полета.

Соответствующий задаче файл m – сценария, приводится ниже

```
g0=9.81;           % ускорение свободного падения
X0=0;              % начальная координата
Y0=0;              % начальная координата
V00=387;           % дульная скорость
A00=pi/4;          % угол прицеливания
XP0=V00*cos(A00); % горизонтальная начальная скорость
YP0=V00*sin(A00); % вертикальная начальная скорость
T0=0;              % время начала движения
TN=56;             % время окончания движения
dT=0.01;           % шаг по времени
Shot2=@(t,z) [z(3); z(4); 0; -g0]; % правая часть задачи Коши
[T,Z]=ode45(Shot2,[T0:dT:TN],[X0 Y0 XP0 YP0]); % решение системы ОДУ
figure('Color',[1 1 1]);
hL1=plot(T,Z(:,1),T,Z(:,2)); grid; % зависимость координаты от времени
ylabel('\ity, м','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
set(hL1(2), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
figure('Color',[1 1 1]);
hL2=plot(T,Z(:,3),T,Z(:,4)); grid; % зависимость скорости от времени
ylabel('\itV, м/с','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL2(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
set(hL2(2), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
```

На Рис. 6 приведены зависимости от времени положения тела и его скорости относительно вертикальной (линии зеленого цвета) и горизонтальной (линии синего цвета) оси.

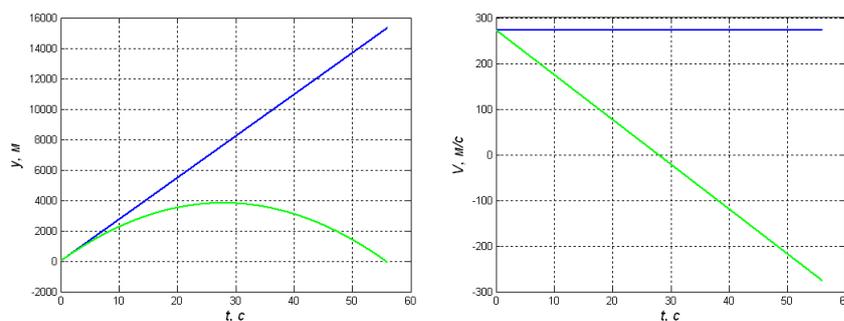


Рис. 6 Движение снаряда вдоль осей координат

Из графиков следует, что время полета снаряда составляет ~55 с. Максимальная высота, на которую поднимается снаряд в середине полета, составляет ~4000 м. Расчетная дальность полета ~15000 м, что существенно превышает заявленную в ТТХ дальность 8600 м.

Причина такого рассогласования очевидна, снаряд движется не в безвоздушном пространстве. Воздух атмосферы оказывает тормозящее действие на снаряд.

### **Баллистическая задача с учетом силы трения**

Реальные тела, движущиеся в жидких и газовых средах, испытывают со стороны среды сопротивление. Если скорость движения мала, то сила вязкого трения пропорциональна скорости и направлена против нее. Стокс установил, что для сферы радиуса  $R$ , движущейся в жидкости с коэффициентом динамической вязкости  $\mu$ , справедливо

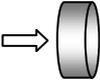
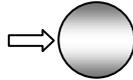
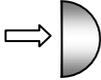
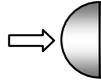
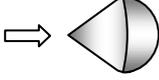
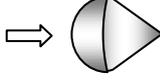
$$\vec{F}_D = -\beta\vec{V} , \quad \beta = 6\pi\mu R .$$

При больших скоростях сила лобового сопротивления направлена против скорости движения, её величина пропорциональна квадрату скорости, характерной площади тела  $S$  и плотности среды  $\rho$

$$\vec{F}_D = -\beta|\vec{V}|\vec{V} , \quad \beta = CS\rho/2 ,$$

где  $C$  – коэффициент лобового сопротивления, определяемый формой тела.

Величина коэффициента лобового сопротивления для ряда тел правильной формы приведена в таблице.

Диск	Сфера	Полусфера	Полусфера	Каплевидное	Каплевидное
					
1.11	0.4	1.33	0.55	0.1	0.045

Запишем второй закон Ньютона с учетом силы трения

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_D .$$

Движение артиллерийского снаряда никак нельзя считать медленным, поэтому используем квадратичную зависимости силы сопротивления от скорости. Тогда, представляя движение снаряда как совокупность двух простых, запишем дифференциальные уравнения этих движений

$$x'' = -\gamma x' \sqrt{(x')^2 + (y')^2} , \quad y'' = -g - \gamma y' \sqrt{(x')^2 + (y')^2} , \quad \gamma = \beta/m = CS\rho/2m .$$

Замена переменных дает

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} z'_1 = z_3 \\ z'_2 = z_4 \\ z'_3 = -\gamma z_3 \sqrt{z_3^2 + z_4^2} \\ z'_4 = -g - \gamma z_4 \sqrt{z_3^2 + z_4^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = V_0 \cos \alpha \\ z_4(0) = V_0 \sin \alpha \end{cases}.$$

Для расчетов будем использовать следующие значения: плотность воздуха на уровне моря – 1.225 кг/м<sup>3</sup>, масса снаряда – 6.2 кг, характерная площадь снаряда – площадь окружности диаметром 76.2 мм.

Каплевидное тело, движущееся острием вперед, наиболее близко по форме к артиллерийскому снаряду. Наличие у снаряда продолговатой задней части в форме цилиндра приведет к некоторому увеличению коэффициента лобового сопротивления, будем полагать его равным 0.15.

Листинг файла m – сценария, приводится ниже.

```
g0=9.81; % ускорение свободного падения, м/с2
ro_air_0=1.225; % плотность воздуха в точке старта, кг/м3
Ms=6.2; % масса снаряда, кг
Ds=76.2 % калибр, мм
V00=387; % дульная скорость, м/с
Cx=0.15; % коэффициент лобового сопротивления
Ss=pi*(Ds/1000)^2/4; % характерная площадь снаряда
gamma=(Cx*Ss*ro_air_0)/(2*Ms); % коэффициент
X0=0; % начальная координата
Y0=0; % начальная координата
A00=pi/4; % угол прицеливания
XP0=V00*cos(A00); % горизонтальная начальная скорость
YP0=V00*sin(A00); % вертикальная начальная скорость
T0=0; % время начала движения
TN=56; % время окончания движения
dT=0.01; % шаг по времени
Shot3=@(t,z) [z(3); z(4); -gamma.*z(3).*sqrt(z(3).^2+z(4).^2); -g0-
gamma.*z(4).*sqrt(z(3).^2+z(4).^2)];
[T,Z]=ode45(Shot3,[T0:dT:TN],[X0 Y0 XP0 YP0]); % решение системы ОДУ
figure('Color',[1 1 1]);
hL1=plot(T,Z(:,1),T,Z(:,2)); grid; % зависимость координаты от времени
ylabel('\ity, м','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
set(hL1(2), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
figure('Color',[1 1 1]);
hL2=plot(T,Z(:,3),T,Z(:,4)); grid; % зависимость скорости от времени
ylabel('\itV, м/с','fontsize',14);
xlabel('\itt, с','fontsize',14);
set(hL2(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
set(hL2(2), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
```

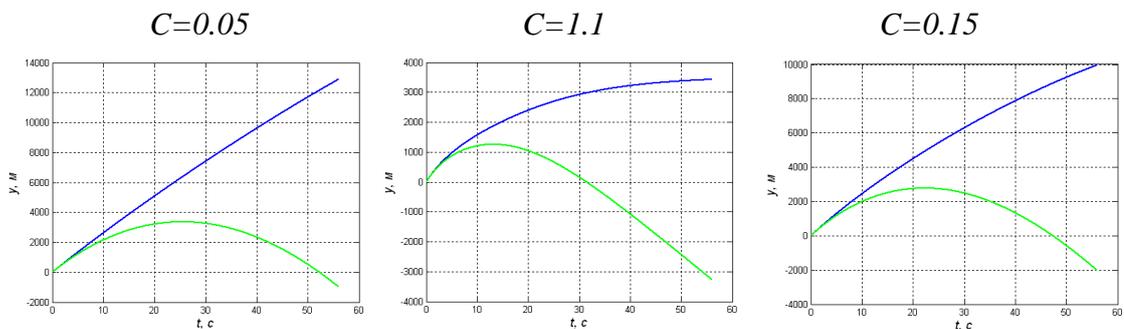


Рис. 7 Дальность полета снаряда

Изменение формы снаряда существенно меняет дальность полета. Первый график на Дальность полета снаряда Рис. 7 построен для снаряда с коэффициентом лобового сопротивления 0.05, второй – 1.1. Дальность полета изменяется от 12 до 3 км. Третий график построен для снаряда с коэффициентом лобового сопротивления 0.15. Расчетная дальность полета ~ 8.5 км соответствует заявленной в ТТХ.

### ***Пушка кайзера Вильгельма***

В 1918 г., в ходе первой мировой войны германские войска обстреливали Париж с расстояния 120 км. Создание уникального орудия, способного послать снаряд на такое расстояние, сложная научная и инженерная задача. Так называемая парижская пушка кайзера Вильгельма, Рис. 8, имела следующие характеристики: калибр – 210 мм, масса снаряда – 120 кг, начальная скорость снаряда – 1600 м/с. Ствол имел длину 28 м и оснащался дополнительным 6-метровым гладкоствольным удлинением, устанавливаемым на его выходном конце.

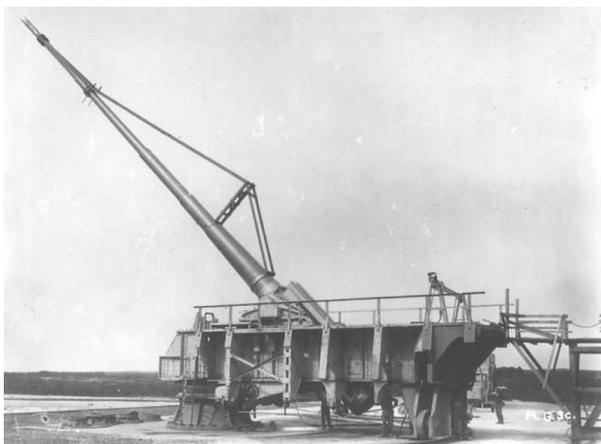


Рис. 8 Парижская пушка

Рассчитаем дальность полета снаряда артиллерийской системы с такими характеристиками. Для этого достаточно изменить в предыдущей программе параметры штурмового орудия М1910 на параметры парижской пушки. Их всего три:

$M_s=120$ ;                   % масса снаряда, кг  
 $D_s=210$                     % калибр, мм  
 $V_{00}=1600$ ;                % дульная скорость, м/с

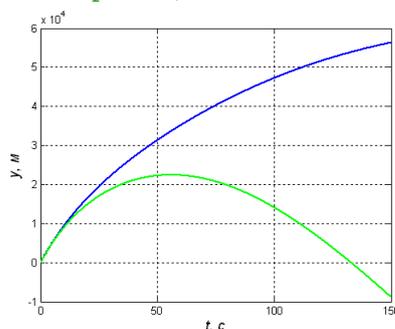


Рис. 9 Полет снаряда парижской пушки

На Рис. 9 приведены зависимость от времени горизонтальной и вертикальной координаты снаряда парижской пушки. Как видно из графика время полета ~130 с, дальность ~53 км, а максимальная высота, на которую поднимается снаряд, ~20 км. Результат, конечно, значительный, но совершенно не соответствующий реальным характеристикам пушки.

Дальность выстрела пушки кайзера Вильгельма составляла 130 км, а максимальная высота траектории – до 45 км. Такая разница свидетельствует о том, что используемая в расчетах модель не адекватна реальному полету снаряда. Попробуем разобраться, в чем тут дело.

Обладая высокой дульной скоростью, снаряд поднимается на значительную высоту, составляющую десятки километров. Фактически он оказывался в стратосфере, где давление и плотность воздуха существенно меньше, чем на уровне моря. Движение снаряда в стратосфере было одним из основных факторов уникальной дальнобойности орудия, благодаря значительному уменьшению сопротивления воздуха.

### *Атмосфера Земли*

Изменения параметров атмосферы Земли с ростом высоты описывается в нескольких документах. Рассмотрим некоторые из них, содержащие подробные таблицы параметров, позволяющие построить модель атмосферы.

#### [ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры \(с Изменением N 1\).](#)

Настоящий стандарт устанавливает числовые значения основных параметров атмосферы для высот от минус 2000 до 1200000 м. Данные устанавливают средние значения параметров атмосферы для широты 45°32'33", соответствующие среднему уровню солнечной активности.

#### [ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли.](#)

Настоящий стандарт устанавливает модель плотности, методику расчета и значения параметров плотности атмосферы Земли в диапазоне высот 120-1500 км для различных уровней солнечной активности при известных дате, времени и координатах точки пространства. Стандарт предназначен для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли и приведения результатов расчетов к одинаковым условиям.

[Международная стандартная атмосфера](#) – (сокр. МСА, англ. ISA) условное вертикальное распределение температуры, давления и плотности воздуха в атмосфере Земли принятое Международной организацией по стандартизации, ИСО (International Organization for Standardization, ISO).

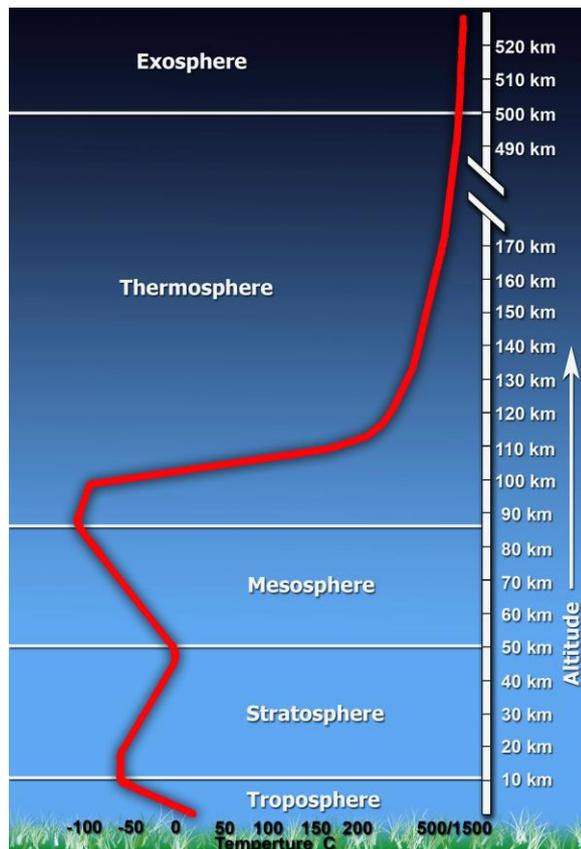


Рис. 10 Температура атмосферы Земли

Земная атмосфера характеризуется четко выраженной слоистостью. На Рис. 10 показано изменение температуры с высотой. Слои атмосферы, определяемые вертикальным распределением температуры, подразделяются на тропосферу, стратосферу, мезосферу, термосферу и экзосферу.

Изменение давления земной атмосферы обусловлено тем, что находящиеся в поле силы тяжести вышележащие слои давят на нижележащие. В предположении о том, что атмосфера изотермична, построена барометрическая формула, определяющая экспоненциальное уменьшение давления и плотности с высотой

$$\rho = \rho_0 e^{-\alpha y}, \quad \alpha = \frac{\mu g}{RT}, \quad T = const,$$

где  $\mu=0.02896$  кг/моль – молярная масса воздуха,  $R=8.3144598$  Дж/(моль·К) – газовая постоянная. В полулогарифмических осях барометрическая формула сводится к линейной функции

$$\ln \rho / \rho_0 = -\alpha y.$$

До высоты 94 км давление, плотность и температура земной атмосферы удовлетворяют уравнению состояния идеального газа

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T.$$

Рассмотрим параметры атмосферы на высотах, не превышающих 50 км. Выберем из документа ГОСТ 4401-81 массив из 19 отсчетов, содержащий высоту, температуру, давлений и плотность. Построим график температуры, Рис. 11, и аппроксимируем набор этих значений кубическим полиномом. График плотности от высоты построим в полулогарифмических осях, Рис. 12. Соответствующий листинг m – сценария приведен ниже.

```
% ГОСТ 4401-81. Атмосфера Земли.
% Высота, м
H4401=[0 50 100 200 300 500 1000 2000 3000 4000 5000 8000 10000 12000 15000
20000 30000 40000 50000];
% Температура, К
T4401=[288.15 287.88 287.50 286.85 286.20 284.90 281.65 275.15 268.66 262.17
255.77 236.22 223.25 216.65 216.65 216.65 226.51 250.35 270.65];
% Давление, Па
P4401=[101325.00 100726.00 100129.00 98945.40 97772.70 95461.30 89876.30
79501.40 70121.20 61660.40 54048.30 35651.60 26499.90 19399.40 12111.80
5529.29 1197.03 287.14 79.78];
% Плотность, кг/м3
D4401=[1.225000 1.219130 1.213280 1.201650 1.190110 1.167270 1.111660
1.006550 0.909254 0.819347 0.736429 0.525786 0.413510 0.311937 0.194755
0.088910 0.018410 0.003996 0.001027];

% аппроксимация полиномом зависимости температуры от высоты
p3 = polyfit(H4401, T4401, 3)
hh = linspace(0, 50000, 100);
Tt3 = polyval(p3, hh);
figure('Color',[1 1 1]);
hL1=plot(H4401,T4401,'ro',hh,Tt3,'g'); grid on;
xlabel('\itH, м','fontsize',14);
ylabel('\itT, К','fontsize',14);

% аппроксимация полиномом зависимости плотности от высоты
p3 = polyfit(H4401, log(D4401),2);
hh = linspace(0, 50000, 100);
Dd3 = polyval(p3, hh);
figure('Color',[1 1 1]);
semilogy(H4401,D4401,'s',hh,exp(Dd3),'r'); grid on;
xlabel('\itH, м','fontsize',14);
ylabel('\rho, кг/м^3','fontsize',14);
```

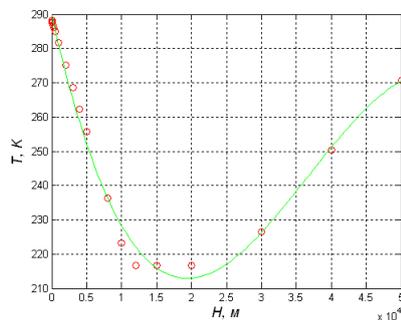


Рис. 11

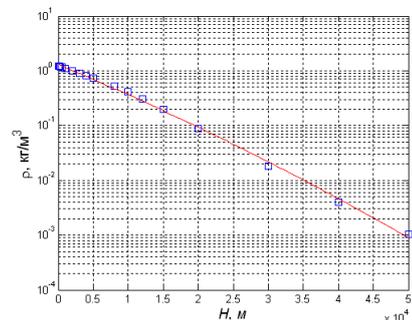


Рис. 12

Если высоту измерять в метрах, а температуру в градусах Кельвина, то

$$T = c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 ,$$

коэффициенты кубического полинома представлены в следующей таблице

$c_3$	$-2.868791904657885e-012$
$c_2$	$3.160005910282888e-007$
$c_1$	$-9.013956410531734e-003$
$c_0$	$2.897296920091793e+002$

Аппроксимацию плотности от высоты представим в виде

$$\ln \rho / \rho_0 = c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 ,$$

и сравним с барометрической формулой, полагая с соответствии с ГОСТ 4401-81, что на уровне моря температура и плотность равны  $288.15K$  и  $1.225 \text{ кг/м}^3$ .

`% аппроксимация полиномом и барометрическая формула`

```
g0=9.80665; % ускорение свободного падения
Mm=0.02896; % молярная масса воздуха
Rg=8.3144598; % газовая постоянная
T=288.15; % температура на уровне моря
D4401_log=log(D4401/D4401(1));
p3 = polyfit(H4401, D4401_log,3)
Dd4 = polyval(p3, hh);
figure('Color',[1 1 1]);
plot (H4401,D4401_log,'or',hh,Dd4,'b',hh,-hh.*(Mm*g0/(Rg*T)),'g'); grid on;
xlabel('\itH, м','fontsize',14);
ylabel('\itln(\rho/\rho_0)','fontsize',14);
```

Результат выполнения приведенного выше сценария представлен на Рис. 13.

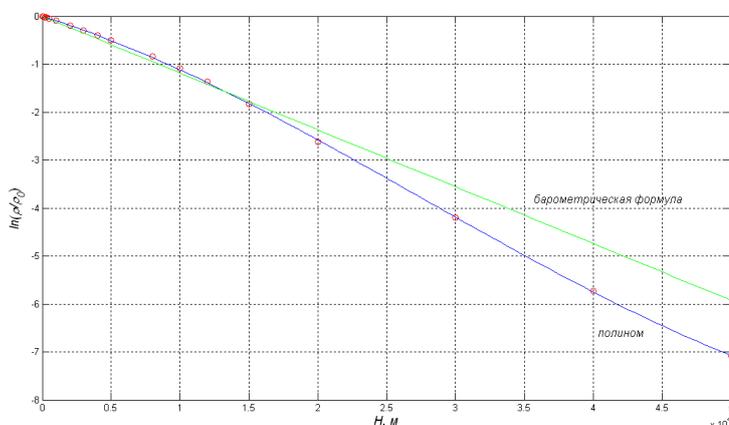


Рис. 13

Как видим, до высот 15 км барометрическая формула вполне удовлетворительно описывает состояние атмосферы. В системе СИ коэффициенты кубического полинома имеют следующие значения

$c_3$	$3.244009619859655e-014$
$c_2$	$-2.684468432638904e-009$
$c_1$	$-8.831754661425263e-005$
$c_0$	$-1.590482745071122e-003$

Для расчета параметров стандартной атмосферы вплоть до высоты 50 км построена первичная функция *EarthAtmosphere50*. Входной параметр *flag* определяет метод расчета – либо барометрическая функция, либо полиномиальная интерполяция. Выходные параметры – массив плотности или температуры на заданных высотах.

```
function z=EarthAtmosphere50 (flag,y)
% расчет параметров стандартной атмосферы до высоты 50 км
g0=9.80665;           % ускорение свободного падения
Mm=0.02896;          % молярная масса воздуха
Rg=8.3144598;        % газовая постоянная
T0=288.15;           % температура на уровне моря
ro_air_0=1.225;       % плотность воздуха на уровне моря, кг/м3

switch flag
case 0 % расчет плотности по барометрической формуле
z= ro_air_0.*exp(-y.*(Mm*g0/(Rg*T0)));
case 1 % аппроксимация плотности воздуха полиномом
z= ro_air_0*exp(3.244009619859655e-014*y.^3-
2.684468432638904e-009*y.^2-8.831754661425263e-005*y-1.590482745071122e-003);
case 2 % аппроксимация температуры воздуха полиномом
z= -2.868791904657885e-012*y.^3+3.160005910282888e-007*y.^2-
9.013956410531734e-003*y+2.897296920091793e+002;
end
end
```

Используем построенную функцию для более точного моделирования движения снаряда в атмосфере.

### ***Сверхдальнобойная пушка кайзера Вильгельма***

Изменения, касающиеся свойств стандартной атмосферы, которые необходимо внести в *m* – сценарий расчета дальности полета снаряда парижской пушки не очень значительны. Плотность воздуха,  $\rho$ , следовательно, и коэффициент  $\gamma$ , входящий в правую часть системы ОДУ, будет теперь не константой, а функцией высоты. Тем не менее, приведем листинг полностью

```
g0=9.81;              % ускорение свободного падения, м/с2
Ms=120;              % масса снаряда, кг
Ds=210;              % калибр, мм
V00=1600;            % дульная скорость, м/с
Cx=0.15;             % коэффициент лобового сопротивления
Ss=pi*(Ds/1000)^2/4; % характерная площадь снаряда
X0=0;                % начальная координата
Y0=0;                % начальная координата
A00=pi/4;            % угол прицеливания
XP0=V00*cos(A00);    % горизонтальная начальная скорость
YP0=V00*sin(A00);    % вертикальная начальная скорость
T0=0;                % время начала движения
TN=180;              % время окончания движения
dT=0.01;             % шаг по времени
Gamma=@(y) (Cx*Ss*EarthAtmosphere50 (1,y)/(2*Ms)); % коэффициент
Shot3=@(t,z) [z(3); z(4); -Gamma(z(2)).*z(3).*sqrt(z(3).^2+z(4).^2); -g0-
Gamma(z(2)).*z(4).*sqrt(z(3).^2+z(4).^2)];
[T,Z]=ode45(Shot3,[T0:dT:TN],[X0 Y0 XP0 YP0]); % решение системы ОДУ
figure('Color',[1 1 1]);
```

```

hL1=plot(T,Z(:,1)./1000,T,Z(:,2)./1000); grid; % зависимость координаты от
времени
ylabel('\itx,y, [км]','fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]','fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
set(hL1(2), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');

```

Результаты расчетов зависимости от времени горизонтальной и вертикальной координаты снаряда парижской пушки приведены на Рис. 14.

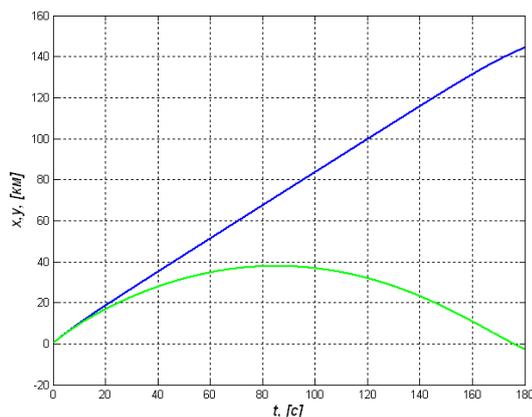


Рис. 14

Как видно из графика время полета снаряда возросло до ~175 с, дальность до ~140 км, а максимальная высота, на которую поднимается снаряд, составила почти 40 км. Результат моделирования соответствует реальным характеристикам пушки. Такие характеристики делают ее уникальным сверхдальнобойным оружием, не превзойденным до настоящего времени.

### ***Прыжок из стратосферы Феликса Баумгартнера***

14 октября 2012 года состоялась успешная реализация проекта Red Bull Stratos. Суть проекта заключалась в том, что скайдайвер Феликс Баумгартнер поднялся на стратостате, воздушном шаре, наполненный гелием, к которому прикреплена специальная капсула, на высоту 39069 метра и совершил свободное падение в скафандре на Землю. Видеозапись свободного полета Феликса Баумгартнера можно посмотреть [здесь](#).

Время свободного падения составило 4 минуты 19 секунд. В ходе снижения, Баумгартнер достиг скорости звука, а затем, тормозящее действие более плотных слоёв воздуха стало снижать его скорость. На высоте 1500 метров, когда скорость упала до 277 км/ч, он раскрыл парашют. Масса Баумгартнера со снаряжением составляла 118 кг.

На момент события зарегистрированы четыре рекорда Баумгартнера – самая большая высота прыжка с парашютом, самая большая дистанция свободного падения, самый высокий пилотируемый полёт на стратостате и самая высокая скорость свободного падения, которая превысила скорость звука и составила 1357.6 километра в час.

Рассчитаем характеристики свободного полета скайдайвера. Скорость его движения большая, поэтому логично использовать для силы лобового сопротивления выражение

$$\vec{F}_D = -\beta |\vec{V}| \vec{V}, \quad \beta = CS\rho/2.$$

Будем полагать, что скайдайвер – это шар. Это, странное на первый взгляд, утверждение хорошо тем, что позволяет, не делая иных предположений, рассчитать все параметры падающего тела. А насколько хорошо такое предположение, выяснится по результатам расчетов.

Коэффициент лобового сопротивления шара – 0.4, однако, в расчетах будем использовать значение  $C=0.5$ . Плотность человека с хорошей точности равна плотности воды –  $\rho_b=1 \text{ г/см}^3$ . При массе скайдайвера  $m=118 \text{ кг}$  и заданной плотности из соотношения

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{m}{\rho_b}$$

можем найти радиус шара, а, следовательно, и характеристическую площадь шара

$$S = \pi R^2 = 4\pi \left( \frac{3m}{4\pi\rho_b} \right)^{2/3}.$$

Замена переменных, понижающая порядок ОДУ, приводит к системе

$$\begin{cases} z_1' = z_2 & , z_1(0) = H \\ z_2' = -g + \gamma z_2^2 & , z_2(0) = 0 \end{cases}, \text{ где } z = \begin{pmatrix} y \\ V_y \end{pmatrix}, \text{ а } \gamma = 2\pi \frac{C\rho}{m} \left( \frac{3m}{4\pi\rho_b} \right)^{2/3}.$$

Сила сопротивления в случае свободного падения направлена против силы тяжести, поэтому знак перед коэффициентом  $\gamma$  меняется на плюс.

Расчет плотности стандартной атмосферы, входящей в коэффициент  $\gamma$ , проведем, используя функцию *EarthAtmosphere50*. Листинг сценария приведен ниже.

```
% время, скорости и высота в полете Феликса Баумгартнера
Te=[10.01;20.02;30.10;40.27;49.92;58.96;66.00;88.32;115.05;141.74;179.11;205.
81;237.84;253.89];
Ve=[98.06;195.56;278.89;347.22;378.61;346.67;272.5;173.89;113.89;99.44;80;61.
11;59.72;56.39];
He=[38474;36980;34563;31338;27849;24551;22097;17504;13759;10972;7685;5768;382
7;2909];

g0=9.80665; % ускорение свободного падения
Hmax=39069; % высота подъема стратостата, м
Mr=118; % масса скайдрайвера, кг
Cx=0.5; % коэффициент лобового сопротивления
rho=1000; % плотность воды, кг/м3
Sp=4*pi*(3*Mr/(4*pi*rho))^(2/3); % характеристическая площадь шара, м2
S1=Cx*Sp/(2*Mr); % коэффициент
Jump=@(t,y) [y(2); -g0+S1.*EarthAtmosphere50(1,y(1))*y(2).^2]; % правая
часть ОДУ
```

```

T0=0;      % время начала движения
TN=250;    % время окончания движения
dT=0.01;  % шаг по времени
Y0=Hmax;   % начальная координата
Yp0=0;     % начальная скорость
[T,Y]=ode45(Jump1,[T0:dT:TN],[Y0, Yp0]); % решение системы ОДУ

figure('Color',[1 1 1]);
hold on;
plot(T,Y(:,1)/1000,'b','LineWidth', 2); % зависимость высоты от времени
      (расчет)
plot(Te,He/1000,'LineStyle','none','Marker','o','MarkerSize', 6, 'Color',
      'k','MarkerFaceColor','k'); % зависимость высоты от времени (опыт)
ylabel('\ity, [км]','fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]','fontsize',14);
grid;
axis ([0 250 0 40]);

figure('Color',[1 1 1]);
hold on;
plot(T,Y(:,2),'m','LineWidth', 2); % зависимость скорости от времени (расчет)
plot(Te,-Ve,'LineStyle','none','Marker','o','MarkerSize', 6, 'Color', 'k',
      'MarkerFaceColor','k'); % зависимость скорости от времени (опыт)
ylabel('\itV, [м/с]','fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]','fontsize',14);
grid;

```

Результаты расчетов приведены на Рис. 15 и Рис. 16, там же, черными маркерами показаны характеристики реального полета.

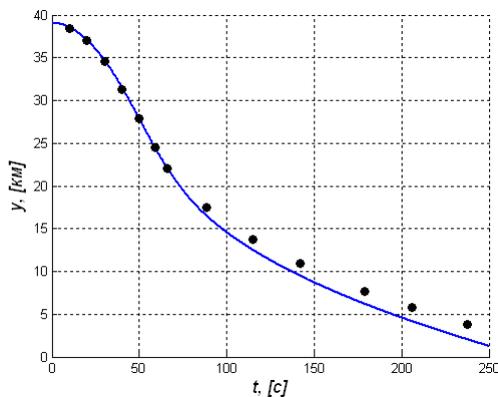


Рис. 15 Высота

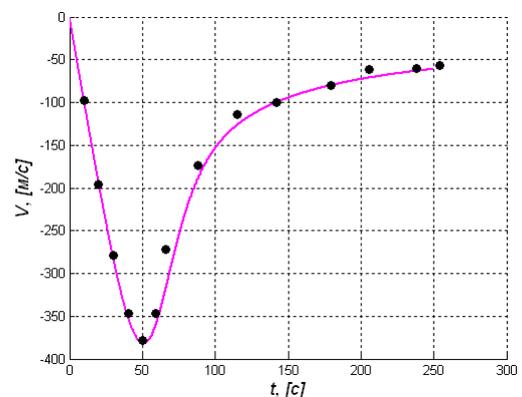


Рис. 16 Скорость

Зависимость высоты и скорости от времени в целом соответствуют реальному полету. Между 40-й и 70-й секундами преодолен звуковой барьер, в районе 50-й секунды скорость достигает максимума, после чего начнет снижаться.