Ч а с т ь I

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОШИБОК

Абсолютная и относительная ошибки

Никакую физическую величину невозможно измерить абсолютно точно: как бы тщательно ни был поставлен опыт, измеренное значение величины x будет отличаться от ее истинного значения X. Разница между этими значениями представляет собой ***абсолютную ошибку*** (или *абсолютную погрешность**) измерения Δx:

$$\Delta x = x - X. \qquad (1)$$

Абсолютная погрешность является размерной величиной: она выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина (например, абсолютная погрешность измерения длины выражается в метрах, силы тока – в амперах и т.д.). Как следует из выражения (1), Δx может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Хотя величина Δx показывает, насколько измеренное значение отличается от истинного, одной лишь абсолютной ошибкой нельзя полностью характеризовать точность проделанного измерения. Пусть, например, известно, что абсолютная погрешность измерения расстояния равна 1 *м*. Если измерялось расстояние между географическими пунктами (порядка нескольких километров), то точность такого измерения следует признать весьма высокой; если же измерялись размеры помещения (не превышающие десятка метров), то измерение является грубым. Для характеристики точности существует понятие ***относительной ошибки*** (или *относительной погрешности*) E, представляющей собой отношение модуля абсолютной ошибки к измеряемой величине:

$$E = \frac{|\Delta x|}{X}. \qquad (2)$$

Очевидно, что относительная погрешность – величина безразмерная, чаще всего ее выражают в процентах.

При определении ошибок измерений важно иметь в виду следующее. Выражения (1) и (2) содержат истинное значение измеряемой величины X, которое точно знать невозможно: поэтому значения Δx и E в принципе не могут быть рассчитаны точно. Можно лишь *оценить* эти значения, т.е. найти их приближенно с той или иной степенью достоверности. Поэтому все расчеты, связанные с определением погрешностей, должны носить приближенный (оценочный) характер.

---

* Термины «ошибка» и «погрешность» применительно к измерениям имеют один и тот же смысл.

Случайная и приборная погрешности

Разнообразные ошибки, возникающие при измерениях, можно классифицировать как по их происхождению, так и по характеру их проявления.

По происхождению ошибки делятся на инструментальные и методические.

Инструментальные погрешности обусловлены несовершенством применяемых измерительных приборов и приспособлений. Эти погрешности могут быть уменьшены за счет применения более точных приборов. Так, размер детали можно измерить линейкой или штанген-циркулем. Очевидно, что во втором случае ошибка измерения меньше, чем в первом.

Методические погрешности возникают из-за того, что реальные физические процессы всегда в той или иной степени отличаются от их теоретических моделей. Например, формула для периода колебаний математического маятника в точности верна лишь при бесконечно малой амплитуде колебаний; формула Стокса, определяющая силу трения при движении шарика в вязкой жидкости, справедлива только в случае идеально сферической формы и т.д. Обнаружить и учесть методическую погрешность можно путем измерения той же величины совершенно иным независимым методом.

По характеру проявления ошибки бывают систематические и случайные.

Систематическая погрешность может быть обусловлена как приборами, так и методикой измерения. Она имеет две характерные особенности. Во-первых, систематическая погрешность всегда либо положительна, либо отрицательна и не меняет своего знака от опыта к опыту. Во-вторых, систематическую погрешность нельзя уменьшить за счет увеличения числа измерений. Например, если при отсутствии внешних воздействий стрелка измерительного прибора показывает величину x_0, отличную от нуля, то во всех дальнейших измерениях будет присутствовать систематическая ошибка, равная x_0.

Случайная ошибка также может быть как инструментальной, так и методической. Причину ее появления установить трудно, а чаще всего – невозможно (это могут быть различные помехи, случайные толчки, вибрации, неверно взятый отсчет по прибору и т.д.). Случайная погрешность бывает и положительной и отрицательной, причем непредсказуемо изменяет свой знак от опыта к опыту. Значение ее можно уменьшить путем увеличения числа измерений.

Детальный анализ погрешностей измерения представляет собой сложную задачу, для решения которой не существует единого рецепта. Поэтому в каждом конкретном случае этот анализ проводят по-разному.

Однако, в первом приближении, если исключена систематическая ошибка, то остальные можно условно свести к следующим двум видам: приборная и случайная.

Приборной погрешностью в дальнейшем будем называть случайную ошибку, обусловленную измерительными приборами и приспособлениями, а ***случайной*** – ошибку, причина появления которой неизвестна. Приборную погрешность измерения величины x будем обозначать как δx, случайную – как $\Delta_s x$.

Оценка случайной погрешности. Доверительный интервал

Методика оценки случайной погрешности основана на положениях теории вероятностей и математической статистики. Оценить случайную ошибку можно только в том случае, когда проведено неоднократное измерение одной и той же величины.

Пусть в результате проделанных измерений получено n значений величины x: x_1, x_2, …, x_n. Обозначим через $\bar{x}$ среднеарифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{3}$$

В теории вероятностей доказано, что при увеличении числа измерений n среднеарифметическое значение измеряемой величины приближается к истинному:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{x} = X.$$

При небольшом числе измерений ($n \le 10$) среднее значение может существенно отличаться от истинного. Для того, чтобы знать, насколько точно значение $\bar{x}$ характеризует измеряемую величину, необходимо определить так называемый доверительный интервал полученного результата.

Поскольку абсолютно точное измерение невозможно, то вероятность правильности утверждения «*величина x имеет значение, в точности равное* $\bar{x}$» равна нулю. Вероятность же утверждения «*величина x имеет какое-либо значение*» равна единице (100%). Таким образом, вероятность правильности любого промежуточного утверждения лежит в пределах от 0 до 1. Цель измерения – найти такой интервал, в котором с наперед заданной вероятностью α ($0 < \alpha < 1$) находится истинное значение измеряемой величины. Этот интервал называется ***доверительным интервалом***, а неразрывно связанная с ним величина α – ***доверительной вероятностью*** (или *коэффициентом надежности*). За середину интервала принимается среднее значение, рассчитанное по формуле (3). Половина ширины доверительного интервала представляет собой случайную погрешность $\Delta_s x$ (рис. 1).

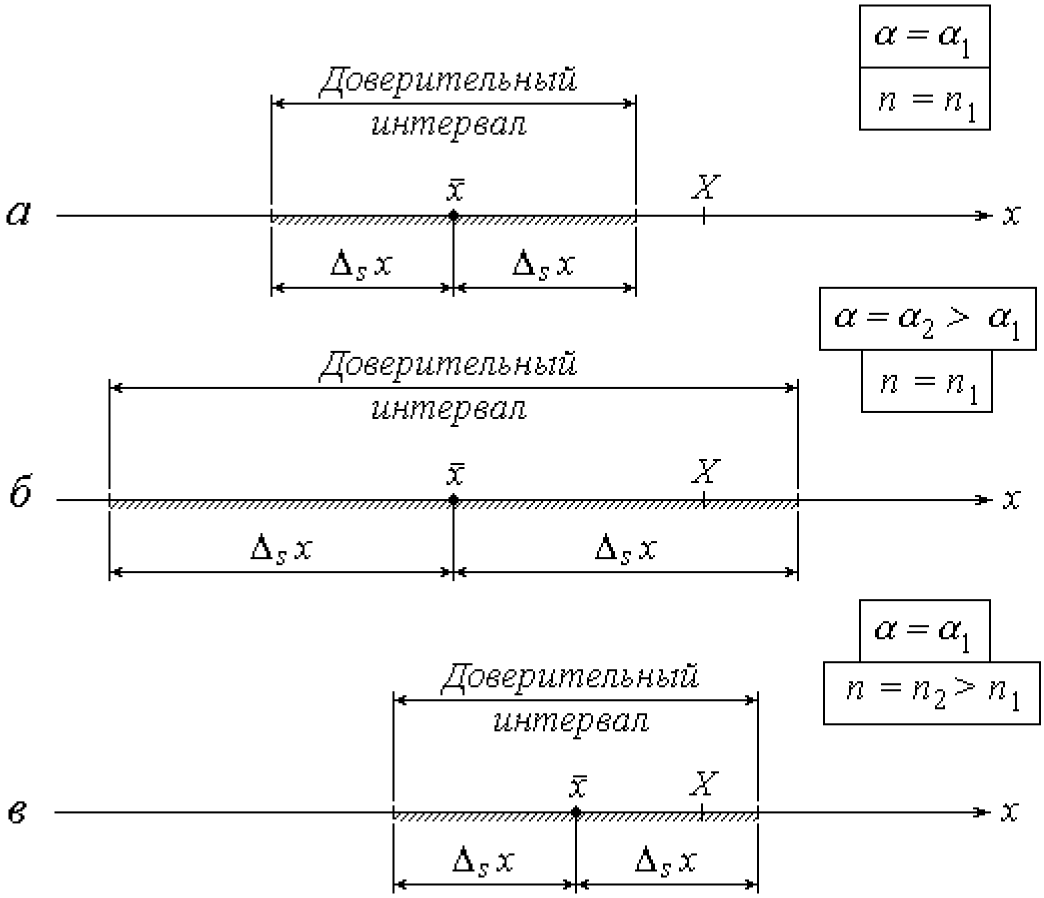

Рис.1

Очевидно, что ширина доверительного интервала (а следовательно, и ошибка $\Delta_s x$) зависит от того, насколько сильно отличаются отдельные измерения величины x_i от среднего значения $\bar{x}$. «Разброс» результатов измерений относительно среднего характеризуется *среднеквадратичной ошибкой* σ, которую находят по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}\,, \tag{4}$$

где $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$.

Ширина искомого доверительного интервала прямо пропорциональна среднеквадратичной ошибке:

$$\Delta_s x = t_{n,\alpha} \cdot \sigma\,. \tag{5}$$

Коэффициент пропорциональности $t_{n,\alpha}$ называется *коэффициентом Стьюдента*; он зависит от числа опытов n и доверительной вероятности α.

На рис. 1, *а, б* наглядно показано, что при прочих равных условиях для увеличения вероятности попадания истинного значения в доверительный интервал необходимо увеличить ширину последнего (вероятность «накрывания» значения X более широким интервалом выше).

Следовательно, величина $t_{n,\alpha}$ должна быть тем больше, чем выше доверительная вероятность α.

С увеличением количества опытов среднее значение приближается к истинному; поэтому при той же вероятности α доверительный интервал можно взять более узким (см. рис. 1, *а,в*). Таким образом, с ростом n коэффициент Сьюдента должен уменьшаться. Таблица значений коэффициента Стьюдента в зависимости от n и α дана в приложениях к настоящему пособию.

Следует отметить, что доверительная вероятность никак не связана с точностью результата измерений. Величиной α задаются заранее, исходя из требований к их надежности. В большинстве технических экспериментов и в лабораторном практикуме значение α принимается равным 0,95.

Расчет случайной погрешности измерения величины x проводится в следующем порядке:

1) вычисляется сумма измеренных значений, а затем – среднее значение величины $\bar{x}$ по формуле (3);

2) для каждого i-го опыта рассчитываются разность между измеренным и средним значениями $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, а также квадрат этой разности (отклонения) $(\Delta x_i)^2$;

3) находится сумма квадратов отклонений, а затем – средне-квадратичная ошибка σ по формуле (4);

4) по заданной доверительной вероятности α и числу проведенных опытов n из таблицы на с. 149 приложений выбирается соответствующее значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha}$ и определяется случайная погрешность $\Delta_s x$ по формуле (5).

Для удобства расчетов и проверки промежуточных результатов данные заносятся в таблицу, три последних столбца которой заполняются по образцу табл.1.

Таблица 1

Номер опыта	…	x	Δx	$(\Delta x)^2$
1	…			
2	…			
…	…			
n	…			
	$\Sigma =$		$\Sigma =$	

В каждом конкретном случае величина x имеет определенный физический смысл и соответствующие единицы измерения. Это может быть, например, ускорение свободного падения g (*м/с*^{2}), коэффициент вязкости жидкости η (*Па·с*) и т.д. Пропущенные столбцы табл. 1 могут содержать промежуточные измеряемые величины, необходимые для расчета соответствующих значений x.

Пример 1. Для определения ускорения a движения тела измерялось время t прохождения им пути S без начальной скорости. Используя известное соотношение $S = \frac{at^2}{2}$, получим расчетную формулу

$$a = \frac{2S}{t^2}. \qquad (6)$$

Результаты измерений пути S и времени t приведены во втором и третьем столбцах табл. 2. Проведя вычисления по формуле (6), заполним четвертый столбец значениями ускорения a_i и найдем их сумму, которую запишем под этим столбцом в ячейку « Σ = ». Затем рассчитаем среднее значение $\overline{a}$ по формуле (3)

$$\overline{a} = \frac{8{,}11}{4} \approx 2{,}03 (м/с^2).$$

Таблица 2

Номер опыта	S, *м*	t, *с*	a, $м/с^2$	Δa, $м/с^2$	$(\Delta a)^2$, $(м/с^2)^2$
1	5	2,20	2,07	0,04	0,0016
2	7	2,68	1,95	-0,08	0,0064
3	9	2,91	2,13	0,10	0,0100
4	11	3,35	1,96	-0,07	0,0049
		Σ =	8,11	Σ =	0,0229

Вычитая из каждого значения a_i среднее, найдем разности Δa_i и занесем их в пятый столбец таблицы. Возводя эти разности в квадрат, заполним последний столбец. Затем рассчитаем сумму квадратов отклонений и запишем ее во вторую ячейку « Σ = ». По формуле (4) определим среднеквадратичную погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0229}{4(4-1)}} \approx 0{,}0437 (м/с^2).$$

Задавшись величиной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$, для числа опытов $n = 4$ из таблицы в приложениях (с. 149) выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{n,\alpha} = 3{,}18$; с помощью формулы (5) оценим случайную погрешность измерения ускорения

$$\Delta_s a = 3{,}18 \cdot 0{,}0437 \approx 0{,}139 \ (м/с^2).$$

Способы определения приборных ошибок

Основными характеристиками измерительных приборов являются предел измерения и цена деления, а также – главным образом для электроизмерительных приборов – класс точности.

Предел измерения П – это максимальное значение величины, которое может быть измерено с помощью данной шкалы прибора. Если предел измерения не указан отдельно, то его определяют по оцифровке шкалы. Так, если рис. 2 изображает шкалу миллиамперметра, то его предел измерения равен 100 *мА*.

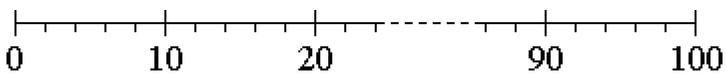

Рис.2

Цена деления Ц – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы. Если шкала начинается с нуля, то

$$Ц = \frac{П}{N},$$

где N – общее количество делений (например, на рис. 2 $N = 50$). Если эта шкала принадлежит амперметру с пределом измерения 5 A, то цена деления равна $5/50 = 0{,}1$ (A). Если шкала принадлежит термометру и проградуирована в $°C$, то цена деления $Ц = 100/50 = 2$ ($°C$). Многие электроизмерительные приборы имеют несколько пределов измерения. При переключении их с одного предела на другой изменяется и цена деления шкалы.

Класс точности К представляет собой отношение абсолютной приборной погрешности к пределу измерения шкалы, выраженное в процентах:

$$K = \frac{\delta x}{П} \cdot 100. \qquad (7)$$

Значение класса точности (без символа «%») указывается, как правило, на электроизмерительных приборах.

В зависимости от вида измерительного устройства абсолютная приборная погрешность определяется одним из нижеперечисленных способов.

1. Погрешность указана непосредственно на приборе. Так, на микрометре есть надпись «0,01 мм». Если с помощью этого прибора измеряется, например, диаметр шарика D (лабораторная работа 1.2), то погрешность его измерения $\delta D = 0{,}01$ *мм*. Абсолютная ошибка указывается обычно на жидкостных (ртутных, спиртовых) термометрах, штангенциркулях и др.

2. На приборе указан класс точности. Согласно определению этой величины, из формулы (7) имеем

$$\delta x = \frac{К \cdot П}{100}. \qquad (8)$$

Например, для вольтметра с классом точности 2,5 и пределом измерения 600 *В* абсолютная приборная ошибка измерения напряжения

$$\delta U = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100} = 15\,(В).$$

3. Если на приборе не указаны ни абсолютная погрешность, ни класс точности, то в зависимости от характера работы прибора возможны два способа определения величины δx:

а) указатель значения измеряемой величины может занимать только определенные (дискретные) положения, соответствующие делениям шкалы (например, электронные часы, секундомеры, счетчики импульсов и т.п.). Такие приборы являются *приборами дискретного действия*, и их абсолютная погрешность равна цене деления шкалы: $\delta x = Ц$. Так, при измерении промежутка времени t секундомером с ценой деления 0,2 *с* погрешность δt = 0,2 *с*;

б) указатель значения измеряемой величины может занимать любое положение на шкале (линейки, рулетки, стрелочные весы, термометры и т.п.). В этом случае абсолютная приборная погрешность равна половине цены деления: $\delta x = Ц/2$. Точность снимаемых показаний прибора не должна превышать его возможностей. Например, при показанном на рис. 3 положении стрелки прибора следует записать либо 62,5 либо 63,0 – в обоих случаях ошибка не превысит половины цены деления. Записи же типа 62,7 или 62,8 не имеют смысла.

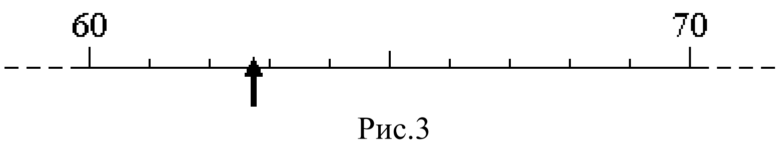

Рис.3

4. Если какая-либо величина не измеряется в данном оыте, а была измерена независимо и известно лишь ее значение, то она является *заданным параметром*. Так, в работе 2.1 по определению коэффициента вязкости воздуха такими параметрами являются размеры капилляра, в опыте Юнга по интерференции света (работа 5.1) – расстояние между щелями и т.д. Погрешность заданного параметра принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этого параметра. Например, если радиус капилляра r задан с точностью до сотых долей миллиметра, то его погрешность δr = 0,005 *мм*.

Погрешности косвенных измерений

В большинстве физических экспериментов искомая величина u не измеряется непосредственно каким-либо одним прибором, а рассчитывается на основе измерения ряда промежуточных величин $x, y, z,\ldots$ Расчет проводится по определенной формуле, которую в общем виде можно записать как

$$u = u\,(x, y, z,\ldots). \tag{9}$$

В этом случае говорят, что величина u представляет собой результат *косвенного измерения* в отличие от $x, y, z,\ldots$, являющихся результатами *прямых измерений*. Например, в работе 1.2 коэффициент вязкости жидкости η рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж})\,g}{18l} D^2\, t\,, \tag{10}$$

где $\rho_{ш}$ – плотность материала шарика; $\rho_{ж}$ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; D – диаметр шарика; t – время его падения в жидкости; l – расстояние между метками на сосуде. В данном случае результатами прямых измерений являются величины l, D и t, а коэффициент вязкости η – результат косвенного измерения. Величины $\rho_{ш}$, $\rho_{ж}$ и g представляют собой заданные параметры.

Абсолютная погрешность косвенного измерения δu зависит от погрешностей прямых измерений δx, δy, $\delta z\ldots$ и от вида функции (9). Как правило, величину δu можно оценить по формуле вида

$$\delta u = \sqrt{(k_x \delta x)^2 + (k_y \delta y)^2 + (k_z \delta z)^2 + \ldots}\,, \tag{11}$$

где коэффициенты k_x, k_y, $k_z,\ldots$ определяются видом зависимостей величины u от x, y, $z,\ldots$ Приведенная ниже табл. 3 позволяет найти эти коэффициенты для наиболее распространенных элементарных функций (a, b, c, n – заданные константы).

Таблица 3

$u(x)$	k_x
$a\,x^n$	$a\,n\,x^{n-1} = n \cdot \dfrac{u}{x}$
$a\sin(bx)$	$ab\cos(bx)$
$a\cos(bx)$	$ab\sin(bx)$
$a\,\mathrm{tg}(bx)$	$\dfrac{ab}{\cos^2(bx)} = \dfrac{2bu}{\sin(2bx)}$
$a\,b^{c\,x}$	$u\,c\ln(b)$
$a\ln(bx)$	$\dfrac{a}{x}$

На практике зависимость (9) чаще всего имеет вид степенной функции

$$u(x, y, z, ...) = C \cdot x^k \cdot y^m \cdot z^n \cdot ...,$$

показатели степеней которой k, m, n,… – вещественные (положительные или отрицательные, целые или дробные) числа; C – постоянный коэффициент. В этом случае абсолютная приборная погрешность δu оценивается по формуле

$$\delta u = \bar{u}\sqrt{(kE_x)^2 + (mE_y)^2 + (nE_z)^2 + ...}, \tag{12}$$

где $\bar{u}$ – среднее значение величины u; $E_x = \dfrac{\delta x}{x}, E_y = \dfrac{\delta y}{y}, E_z = \dfrac{\delta z}{z}, ...$ – относительные приборные погрешности прямых измерений величин x, y, z,… Для подстановки в формулу (12) выбираются *наиболее представительные*, т.е. близкие к средним значения x, y, z,…

При расчетах по формулам типа (12) необходимо помнить следующее.

1. Измеряемые величины и их абсолютные погрешности (например, x и δx) должны быть выражены в одних и тех же единицах.

2. Расчеты не требуют высокой точности вычислений и должны иметь оценочный характер. Так, входящие в подкоренное выражение и возводимые в квадрат величины (kE_x, mE_y, nE_z,…) обычно округляются с точностью до двух значащих цифр (напомним, что ноль является значащей цифрой только тогда, когда перед ним слева есть хотя бы одна цифра, отличная от нуля). Далее, если одна из этих величин (например, $|kE_x|$) по модулю превышает наибольшую из остальных ($|mE_y|$, $|nE_z|$,…) более чем в три раза, то можно, не прибегая к вычислениям по формуле (12), принять абсолютную ошибку равной $\delta u \approx \bar{u}\left|kE_x\right|$. Если же одна из них более чем в три раза меньше наименьшей из остальных, то при расчете по формуле (12) ею можно пренебречь.

Пример 2. Пусть при определении ускорения тела (см. пример 1) путь S измерялся рулеткой с ценой деления 1 *мм*, а время t – электронным секундомером. Тогда, в соответствии с изложенными в п.3, *а*, *б* (с. 13) правилами, погрешности прямых измерений будут равны

$$\delta S = 0{,}5 \text{ мм} = 0{,}0005 \text{ м};$$

$$\delta t = 0{,}01 \text{ с}.$$

Расчетную формулу (6) можно записать в виде степенной функции

$$a(S, t) = 2 \cdot S^1 \cdot t^{-2};$$

тогда на основании (12) погрешность косвенного измерения ускорения δa определится выражением

$$\delta a = \bar{a}\sqrt{(1 \cdot E_S)^2 + (-2 \cdot E_t)^2}.$$

В качестве наиболее представительных значений измеренных величин возьмем (см. табл. 2) $S \approx 8\ м$; $t \approx 3\ c$ и оценим по модулю относительные приборные ошибки прямых измерений с учетом их весовых коэффициентов:

$$E_S = \frac{\delta S}{S} = \frac{0{,}0005}{8} \approx 0{,}000063;$$

$$\left| -2E_t \right| = \frac{2\delta t}{t} = \frac{2 \cdot 0.01}{3} \approx 0{,}0067.$$

Очевидно, что в данном случае величиной E_S можно пренебречь и принять погрешность δa равной

$$\delta a = \overline{a} \left| -2E_t \right| = 2{,}03 \cdot 0{,}0067 \approx 0{,}0136\ (м/c^2).$$

Пример 3. Вернемся к определению коэффициента вязкости жидкости (работа 1.2). Расчетную формулу (10) можно представить в виде

$$\eta(D,t,l) = C \cdot D^2 \cdot t^1 \cdot l^{-1},$$

где $C = \frac{1}{18}(\rho_ш - \rho_ж) g$. Тогда для оценки приборной погрешности $\delta\eta$, согласно (12), получим выражение

$$\delta\eta = \overline{\eta} \sqrt{(2E_D)^2 + E_t{}^2 + (-E_l)^2}, \qquad (13)$$

где $E_D = \frac{\delta D}{D}$; $E_t = \frac{\delta t}{t}$; $E_l = \frac{\delta l}{l}$.

Пусть расстояние между метками l измерено сантиметровой лентой с ценой деления 0,5 *см*, диаметр шарика – микрометром, время его падения – электронным секундомером. Тогда δl = 0,25 *см*; δD = 0,01 *мм*; δt = 0,01 *с*. Предположим, что измеренные значения равны: $l \approx 80$ *см*; $D \approx 4$ *мм*; $t \approx 10$ *с*; $\overline{\eta} \approx 0{,}784$ *Па·с*. Оценим величины, входящие в формулу (13):

$$2E_D = \frac{2 \cdot 0{,}01}{4} = 0{,}0050;$$

$$E_t = \frac{0{,}01}{10} = 0{,}0010;$$

$$\left| -E_l \right| = \frac{0{,}25}{80} \approx 0{,}0032.$$

Пренебрегая величиной E_t, проведем расчет по формуле (13):

$$\delta\eta = 0{,}784 \sqrt{0{,}0050^2 + 0{,}0032^2} \approx 0{,}00464\ (Па \cdot c).$$

Полная ошибка. Окончательный результат измерений

В результате оценки случайной и приборной ошибок измерения величины x получено два доверительных интервала, характеризуемые значениями $\Delta_s x$ и δx. Результирующий доверительный интервал характеризуется ***полной абсолютной ошибкой*** Δ, которая, в зависимости от соотношения между величинами $\Delta_s x$ и δx, находится следующим образом.

Если одна из погрешностей более чем в три раза превышает другую (например, $\Delta_s x > 3\delta x$), то полная ошибка Δ принимается равной этой большей величине (в приведенном примере $\Delta \approx \Delta_s x$). Если же величины $\Delta_s x$ и δx близки между собой, то полная ошибка вычисляется как

$$\Delta = \sqrt{(\Delta_s x)^2 + (\delta x)^2}\ . \qquad (14)$$

Запись окончательного результата измерений должна включать в себя следующие обязательные элементы.

1) Доверительный интервал вида

$$x = \overline{x} \pm \Delta$$

с указанием значения доверительной вероятности α. Величины $\overline{x}$ и Δ выражаются в одних и тех же единицах измерения, которые выносятся за скобку.

2) Значение ***полной относительной погрешности***

$$E = \frac{\Delta}{\overline{x}} \cdot 100\%,$$

выраженное в процентах и округленное до десятых долей.

Полная ошибка Δ округляется до двух значащих цифр. Если полученное после округления число оканчивается цифрами 4, 5 или 6, то дальнейшее округление не производится; если же вторая значащая цифра 1, 2, 3, 7, 8 или 9, то значение Δ округляется до одной значащей цифры (примеры: *а)* $0{,}2642 \approx 0{,}26$; *б)* $3{,}177 \approx 3{,}2 \approx 3$; *в)* $7{,}83 \cdot 10^{-7} \approx 8 \cdot 10^{-7}$ и т.д.). После этого среднее значение $\overline{x}$ округляется с той же точностью.

Пример 4. В результате определения ускорения движения тела (примеры 1 и 2) получено среднее значение ускорения $\overline{a} = 2{,}03$ *м/с*^{2}, случайная ошибка $\Delta_s a = 0{,}139$ *м/с*^{2} с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$ и приборная ошибка $\delta a = 0{,}0136$ *м/с*^{2}. Так как δa более чем в десять раз меньше $\Delta_s a$, то ею можно пренебречь и принять округленную полную абсолютную погрешность равной $\Delta \approx \Delta_s a \approx 0{,}14$ *м/с*^{2}. Оценим относительную ошибку:

$$E = \frac{0{,}139}{2{,}03} \cdot 100\% \approx 6{,}8\%$$

и запишем окончательный результат измерений:

$$\boxed{\begin{gathered} a = (2{,}03 \pm 0{,}14)\,м/с^2 \quad при\,\alpha = 0{,}95; \\ E = 6{,}8\%. \end{gathered}}$$

Пример 5. Пусть при определении скорости звука u (лабораторная работа 4.2) получены следующие результаты: среднее значение $\overline{u} = 343{,}3$ *м/с*; случайная погрешность $\Delta_s u = 8{,}27$ *м/с* при $\alpha = 0{,}90$; абсолютная приборная погрешность $\delta u = 1{,}52$ *м/с*. Очевидно, что и в данном случае величиной δu можно пренебречь по сравнению с $\Delta_s u$, и расчет по формуле (14) не требуется. Полная ошибка после округления равна $\Delta \approx \Delta_s u \approx 8$ *м/с*; округленное среднее значение $\overline{u} \approx 343$ *м/с*. Полная относительная погрешность

$$E = \frac{8{,}27}{343{,}3} \cdot 100\% \approx 2{,}4\% .$$

Окончательный результат измерений имеет вид

$$\boxed{\begin{gathered} u = (343 \pm 8)\,м/с \quad при\,\alpha = 0{,}90; \\ E = 2{,}4\%. \end{gathered}}$$

Пример 6. При определении длины волны λ лазерного излучения (работа 5.1) получено: $\overline{\lambda} = 6{,}27 \cdot 10^{-4}$ *мм*; $\Delta_S \lambda = 2{,}17 \cdot 10^{-5}$ *мм* при $\alpha = 0{,}95$; $\delta\lambda = 1{,}86 \cdot 10^{-5}$ *мм*. В данном случае значения приборной и случайной погрешностей близки между собой, поэтому полную ошибку найдем по формуле (14):

$$\Delta = \sqrt{(2{,}17 \cdot 10^{-5})^2 + (1{,}86 \cdot 10^{-5})^2} \approx 2{,}75 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-4}\,(мм).$$

Округленное среднее будет равно $\overline{\lambda} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ *мм*. Оценим полную относительную ошибку

$$E = \frac{2{,}75 \cdot 10^{-5}}{6{,}27 \cdot 10^{-4}} \cdot 100\% \approx 4{,}4\%$$

и запишем окончательный результат:

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda = (6{,}3 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-4}\,мм \quad при\ \alpha = 0{,}95; \\ E = 4{,}4\,\%. \end{gathered}}$$