Тема 17. Волны де Бройля. Соотношения неопределенностей.

17.1. Основные понятия и соотношения.

Гипотеза Луи де Бройля. Де Бройль выдвинул предложение, что корпускулярно – волновая двойственность свойств характерна не только для света, но и для частиц вещества.

Допуская, что частицы вещества наряду с корпускулярными имеют также и волновые свойства, де Бройль перенес на случай частиц вещества те же правила перехода от одной картины к другой, какие справедливы в случае света.

Фотон обладает **энергией**

$$E = \hbar\omega, \text{ где } \hbar = \frac{h}{2\pi}; \; h \text{ - постоянная Планка, } \omega \text{ - частота,}$$

и **импульсом**

$$P = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \text{ где } \lambda \text{ -длина волны.}$$

По идее де Бройля, движение электрона или какой-либо другой частицы связано с волновым процессом, длина волны которого

$$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{P}, \tag{17.1}$$

а частота

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \tag{17.2}$$

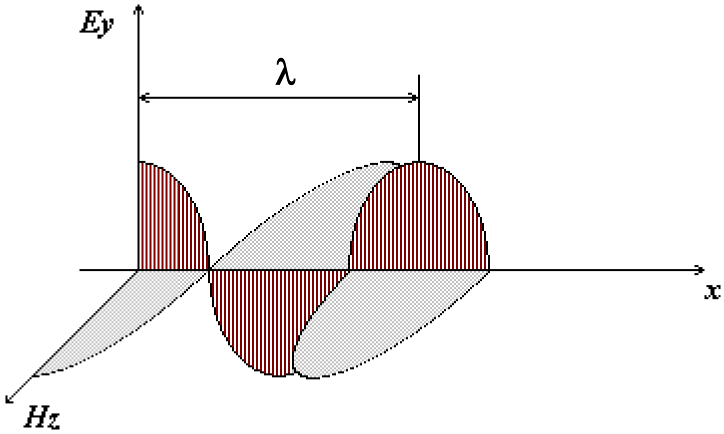
Формула (17.1) применима к частицам любой массы. Однако для макротел получаются слишком короткие длины волн, которые не могут быть обнаружены ни в каком дифракционном опыте. Потому можно считать, что волновые свойства у макроскопических тел практически **отсутствуют**.

Рассмотрим движение **свободной частицы** массой m со скоростью V. Связь между корпускулярными и волновыми свойствами такой частицы приведены в таблице 1.

Таблица 17.1

Свет	Частица
- поток корпускул (фотонов) Энергия фотона $E_ф = \hbar\omega = mc^2$ Импульс фотона $P_ф = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{E_ф}{c}$ Длина волны $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{P_ф}$ **Явления**, в которых свет проявляет корпускулярные свойства: 1. Тепловое излучение 2. Фотоэффект (внешний) 3. Эффект Комптона 4. Световое давление	**Корпускулярные свойства** Энергия свободной частицы $E = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ Импульс $p = mV$ Скорость V
- электромагнитная поперечная волна $\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx) \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx) \end{cases},$	**Волновые свойства** Движущаяся частица обладает $\lambda_б$ Длина волны де Бройля

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей



c- скорость света в вакууме

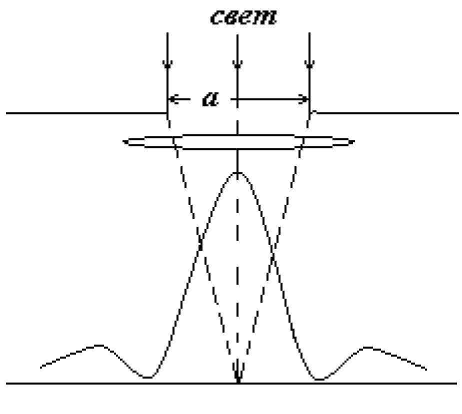
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\ ;\ V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\ \mu}}$$

V – скорость света в среде

Длина волны $\lambda = cT = \dfrac{2\pi c}{\omega}$

Явления, в которых проявляются волновые свойства света:

1. Интерференция
2. Дифракция
3. Поляризация
4. Дисперсия



a~10^{-5}÷10^{-6}м

I~A^2 (E_m^2) *I~N* фотонов

λ видимого света ~ *(7,8÷3,4)10^{-7}м*

I –интенсивность света

$$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

Частота волны де Бройля

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

Групповая скорость *U* волн де Бройля равна скорости частицы

$$U = V$$

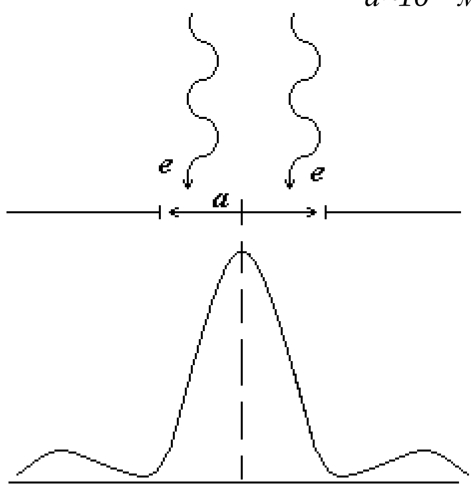
Фазовая скорость волн де Бройля

$$V_ф = \frac{c^2}{V}$$

$$\left(V_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mV} = \frac{c^2}{V} \right)$$

$\psi = \psi_m \cos(\omega t - kx)$, где ψ - волновая функция

$\lambda_б$~10^{-10}м
a~10^{-10}м



I~|A|^2
I~N электронов

Из соотношений для фазовой скорости $V_\phi = \frac{c^2}{V} = c^2\lambda$ видно, что V_ϕ зависит от длины волны: $V_\phi \sim \lambda$. Отсюда следует, что волны де Бройля должны испытывать большую дисперсию.

Вопрос о природе волн можно сформулировать как вопрос о физическом смысле амплитуды этих волн. Вместо амплитуды A удобнее выбрать интенсивность волны, пропорциональную квадрату модуля амплитуды $|A|^2$.

Из опытов по дифракции электронов следует, что в этих экспериментах обнаруживается неодинаковое распределение пучков, отраженных или рассеянных по разным направлениям.

С волновой точки наличие максимумов числа электронов в некоторых направлениях означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волн де Бройля.

Другими словами интенсивность волн в данной точке пространства определяет плотность вероятности попадания электронов в эту точку за 1 с. Это послужило основанием для своеобразного **статистического, вероятностного истолкования волн де Бройля**.

Квадрат модуля амплитуды волн де Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица обнаруживается в этой точке.

С учетом этого иногда волны де Бройля называют **«волнами вероятности»**.

Таблица 17.2

Для нерелятивистской частицы
$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mV}$, где p - импульс нерелятивистской частицы.
$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}$, где E – кинетическая энергия нерелятивистской частицы, m- масса частицы
$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3mk_\sigma T}}$, где m – масса частицы, k_σ -постоянная Больцмана, Т- абсолютная температура
$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mqU}}$, где q – заряд частицы, U – разность потенциалов.
Для релятивистской частицы
$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2E_K m_0 + \frac{E_K^2}{c^2}}}$, где m_0-масса покоя частицы, E_K- кинетическая энергия релятивистской частицы $E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$, p – импульс $p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{E_K(E_K + 2m_0c^2)}$

Соотношения неопределенностей Гейнзберга

В классической механике всякая частица движется по определенной траектории, так что в любой момент времени точно фиксированы её координата и импульс.

Корпускулярно-волновая двойственность свойств микрочастиц (электронов, протонов и т.д.) и вероятностный смысл волн де Бройля приводят к тому, что объект микромира нельзя одновременно со сколь угодно большой точностью характеризовать координатами и импульсом.

Так, если электрон движется вдоль оси X, то неопределенность координаты частицы и неопределенность импульса удовлетворяют соотношению

$$\Delta x \cdot \Delta p_X \geq \hbar \qquad (17.3)$$

Из (17.3) следует, что чем меньше неопределенность одной из переменных, тем больше неопределенность другой. Возможно и такое состояние, в котором одна из переменных имеет точное значение, зато другая переменная при этом оказывается совершенно неопределенной (её неопределенность равна ∞). Соотношение, аналогичное (17.3) имеет место для y и p_y , z и p_z,

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar,$$

а также для ряда других пар величин, называемых каноническими сопряженными.

Соотношением неопределенности связаны время пребывания частицы в некотором энергетическом состоянии Δt с неопределенностью энергии этого состояния ΔE

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \tag{17.4}$$

Следовательно, система, имеющая среднее время жизни Δt, не может быть охарактеризована определенным значением энергии; разброс энергии $\Delta E \sim \dfrac{\hbar}{\Delta t}$ возрастает с уменьшением среднего времени жизни.

Из выражения (17.4) следует, что частота излученного фотона должна иметь неопределенность $\Delta\omega = \dfrac{\Delta E}{\hbar}$, т.е. линии спектра должны характеризоваться частотой $\omega \pm \dfrac{\Delta E}{\hbar}$. Измеряя ширину спектральной линии, можно оценить «время жизни» атома в возбужденном состоянии.

Формулы (17.3) и (17.4) называются **соотношениями неопределенностей Гейзенчберга.**

Они указывают, в какой мере можно пользоваться понятиями классической физики применительно к микрочастицам. В частности, с какой степенью точности можно говорить о траекториях микрочастиц. Подставив в 17.3 вместо ΔP_X его значение $\Delta P_X = m\Delta V_X$, получим

$$\Delta x \cdot \Delta V_X \geq \frac{\hbar}{m} \tag{17.5}$$

Из (17.5) видно, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости, а значит, с тем большей точностью применимо понятие траектории.

17.2 Примеры решения задач

Задача 17.2.1 Электрон, движущийся со скоростью $V_1 = 5 \cdot 10^6 \dfrac{м}{с}$ попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью $E = 10\dfrac{В}{см}$.

Какое расстояние должен пролететь электрон в таком электрическом поле, чтобы его длина волны стала $1\overset{\circ}{A}$?

Решение

Работа ускоряющего поля идет на приращение кинетической энергии электрона.

$$A = Eed = \Delta E_K = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} \tag{17.6}$$

Длина волны де Бройля электрона $\lambda_б$

$$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{mV_2};$$

Конечная скорость электрона

$$V_2 = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda_\sigma} \qquad (17.7)$$

Расстояние, которое должен пролететь электрон найдем, подставляя в (17.6) формулу (17.7)

$$d = \frac{m}{2Ee}\left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{m^2\lambda_б{}^2} - V_1^2\right)$$

$$d = \frac{9.1\cdot10^{-31}}{2\cdot10^3\cdot1.6\cdot10^{-19}}\left(\frac{(2\cdot3.14\cdot10^{-34})^2}{(9.1\cdot10^{-31})^2\cdot(1\cdot10^{-10})^2} - (5\cdot10^6)^2\right) = \mathbf{0.062\,м}$$

Задача 17.2.2. Определите де Бройлевскую длину волны протона, кинетическая энергия которого равна энергии покоя электрона.

Решение

Кинетическая энергия протона

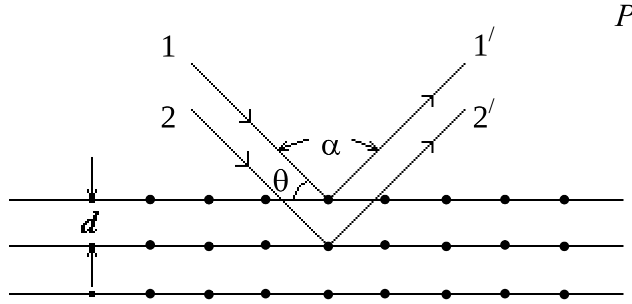
$$E_{Kp} = m_{0e}c^2$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda_б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_P\cdot E_{Kp}}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_P\cdot m_{0e}c^2}} = \frac{2\cdot3.14\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot1.67\cdot10^{-27}\cdot9.1\cdot10^{-31}\cdot\left(3\cdot10^8\right)^2}} \approx \mathbf{4\cdot10^{-4}}\ \mathring{A}$$

Задача 17.2.3. В опыте Дэвиссона и Джермера по отражению электронов от монокристалла Ni максимум четвертого порядка наблюдался в направлении, составляющем угол $\alpha = 55^\circ$ с направлением падающих электронов, обладающих энергией $E = 180 эВ$. Вычислите межплоскостное расстояние d, соответствующее данному отражению.

Решение



Представим кристалл в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии *d*. Поток электронов падает под углом скольжения θ (угол между направлением падающих электронов и кристаллографической плоскостью). Атомы кристаллической решетки становятся источниками когерентных вторичных волн $1'$ и $2'$, интерферирующих между собой. Максимумы интенсивности (дифракционные максимумы) удовлетворяют формуле Вульфа-Брэгга

$$2d\sin\theta = m\lambda,\ \text{где}\ m = 4 \qquad (17.8)$$

Межплоскостное расстояние *d* найдем

$$d = \frac{4\lambda_Б}{2\sin\theta} \qquad (17.9)$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} \qquad (17.10)$$

Подставляя (17.10) в (17.9), получим

$$d = \frac{4 \cdot 2\pi\hbar}{2\sin\theta \cdot \sqrt{2mE}} \qquad (17.11)$$

Угол скольжения $\theta = 90° - \frac{\alpha}{2}$; $\sin\theta = \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2}$

Подставляя числовые значения в (17.11), найдем

$$d = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot \cos 27{,}5° \sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 180 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\, м = \mathbf{2{,}1\, \mathring{A}}.$$

Задача 17.2.4. Вычислите длину волны де Бройля для дейтона, обладающего кинетической энергией $E_{K1} = 10 МэВ$ и $E_{K2} = 2000 МэВ$ (m_0 дейтона $= 3{,}35 \cdot 10^{-27}\, кг$).

Решение

Вычислим энергию покоя E_0 дейтона для того, чтобы оценить в каком случае дейтон можно считать классической частицей ($E_K < E_0$), а в каком – релятивистской частицей ($E_K \geq E_0$).

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 3{,}35 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 0{,}3 \cdot 10^{-9}\, Дж = 1870 \cdot 10^6\, эВ = 1870\, МэВ$$

1. При $E_{K1} = 10 МэВ = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\, Дж$ дейтон – классическая частица, так как $E_{K1} < E_0$.

Импульс найдем по формуле $P = mV$.

Длина волны де Бройля классического дейтона

$$\lambda_Б = \frac{2\hbar\pi}{P} = \frac{2\hbar\pi}{\sqrt{2m_д E_{K1}}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 3{,}35 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}} = \frac{6{,}28 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10^{-19}} \approx \mathbf{6 \cdot 10^{-15}\, м}$$

2. При $E_{K2} = 2000 МэВ = 3{,}2 \cdot 10^{-10}\, Дж$ дейтон – релятивистская частица ($E_{K2} \geq E_0$).

Импульс релятивистской частицы

$$P = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 c \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (17.12)$$

Полная энергия частицы

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (17.13)$$

Возведем в квадрат (17.13)

$$E^2 = \frac{E_0{}^2}{1 - \beta^2}$$

$$E^2 - E^2\beta^2 = E_0{}^2 \qquad (17.13)$$

Так как

$$E \cdot \beta = mc^2 \frac{V}{c} = mVc = P \cdot c \qquad (17.14)$$

Подставляя (17.14) в (17.13), получаем

$$E^2 - P^2c^2 = E_0{}^2 \qquad (17.15)$$

Выразим импульс частицы

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0{}^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(E - E_0)(E + E_0)} \qquad (17.16)$$

Так как $E - E_0 = E_K$ - кинетическая энергия частицы, а

$$E + E_0 = E_K + 2E_0 \tag{17.17}$$

Поэтому связь между импульсом и кинетической энергией частицы выражается формулой

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E_K(E_K + 2E_0)} \tag{17.18}$$

Тогда длина волны де Бройля релятивистской частицы (дейтона)

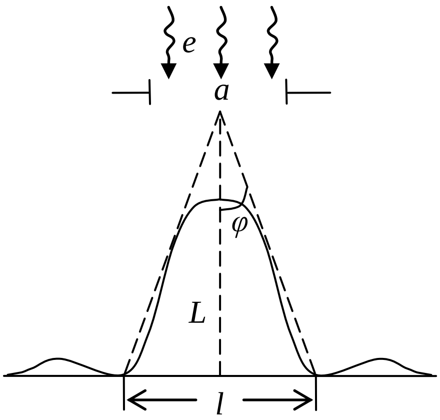
$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar \cdot c}{\sqrt{2E_0E_K + E_K{}^2}} \tag{17.19}$$

Подставляя числовые значения в (17.19), получаем $\lambda_Б$

$$\lambda_Б = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-10} + \left(3{,}2 \cdot 10^{-10}\right)^2}} = \mathbf{3{,}5 \cdot 10^{-16}}\, \boldsymbol{м}$$

Задача 17.2.5. На узкую щель шириной $a = 1мкм$ направлен параллельный пучок электронов. Расстояние между двумя минимумами первого порядка l в дифракционной картине, полученной на экране, равно $4 \cdot 10^{-5}м$. Экран расположен от щели на $L = 15см$. Определите скорость электронов.

Решение



Длину волны де Бройля определяем по формуле

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{P} = \frac{2\pi\hbar}{mV} \tag{17.20}$$

Условие первого дифракционного минимума на одной щели имеет вид

$$a\sin\varphi = m\lambda_Б \text{, где } m = 1 \tag{17.21}$$

При малых углах $\sin\varphi \approx \varphi$

$$a\varphi = \lambda_Б \tag{17.22}$$

Из рисунка видно, что

$$tg\varphi = \frac{l/2}{L} \tag{17.23}$$

Так как $tg\varphi \approx \varphi$, тогда

$$l = 2L \cdot tg\varphi = 2L \cdot \varphi \tag{17.24}$$

Подставив значение φ из (17.24) в (17.22), получим

$$a \cdot \frac{l}{2L} = \lambda_Б \tag{17.25}$$

Из формулы (17.20) и (17.25) определяем скорость электронов

$$V = \frac{2\hbar\pi}{m\lambda_Б} = \frac{2\hbar\pi \cdot 2L}{mal} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-5}} = \mathbf{5{,}2 \cdot 10^6}\, \boldsymbol{\frac{м}{с}}$$

Задача 17.2.6. Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга, показать, что ядра атомов не могут содержать электронов. Считать радиус ядра равным $10^{-13}см$

Решение

Соотношение неопределенностей выражается формулой

$$\Delta x \cdot \Delta P_X \geq \hbar$$

Если неопределенность координаты принять равной радиусу ядра, то есть $\Delta x = R_Я$, то неопределенность импульса электрона определим следующим образом

$$\Delta P_X = \frac{2\pi\hbar}{\Delta x}$$

Так как $\Delta P_X = m \cdot \Delta V_X$, то

$$\Delta V_X = \frac{2\pi\hbar}{m \cdot \Delta x} = \frac{2\pi\hbar}{m \cdot R_Я} \qquad (17.26)$$

Подставляя числовые значения в (17.26), вычислим

$$\Delta V_X = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-15}} = \mathbf{0{,}7 \cdot 10^{12}\ \frac{м}{с}}$$

Так как $\Delta V_X >> c$ (скорости света), следовательно, **ядра атомов не могут содержать электроны**.

Задача 17.2.7 (а). «Время жизни» возбужденного состояния атома составляет около $10^{-8}\,c$. Используя это в качестве Δt для испускания фотона, вычислите минимальное $\Delta\omega$, допускаемое принципом неопределенности. Какую долю ω это составляет, если длина волны рассматриваемой спектральной линии равна $6000\,\mathring{A}$? (Этот расчет определяет предельную резкость спектральной линии).

Решение

Для определения неопределенности частоты испускаемого фотона воспользуемся соотношением неопределенности для энергии возбужденного состояния и времени пребывания в этом состоянии

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \qquad (17.27)$$

Так как $\Delta E = \hbar \cdot \Delta\omega$, то

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \qquad (17.28)$$

С учетом (17.28) получаем

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1 \qquad (17.29)$$

(минимальное значение $\Delta\omega$ получим при знаке равенства в (17.29))

$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta t} \qquad (17.30)$$

Частоту выразим через длину волну $\lambda = c \cdot \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \qquad (17.31)$$

Относительную неопределенность частоты фотона определим, разделив $\Delta\omega$ на ω, используя (17.30) и (17.31)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{\Delta t \cdot 2\pi \cdot c} \qquad (17.32)$$

Подставляя числовые значения, вычислим предельную резкость спектральной линии

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{10^{-8} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 0{,}32 \cdot 10^{-7} \approx \mathbf{0{,}3 \cdot 10^{-5}\%}$$

Расчет показывает, что частота спектральной линии определена с высокой степенью точности.

Задача 17.2.7 (б). Используя данные предыдущей задачи, оцените относительную неопределенность длины волны фотона.

Решение

Продифференцировав формулу (17.31), получим

$$d\omega = -\frac{2\pi \cdot c}{\lambda^2} d\lambda$$

Заменив знак “*d*” на “Δ” и убрав знак “–”, получим

$$\Delta\omega = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda^2} \Delta\lambda \qquad (17.33)$$

(знак “–” показывает, что увеличение частоты соответствует уменьшению длины волны)

Из формулы (17.33), выразим неопределенность длины волны

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\omega \cdot \lambda^2}{2\pi \cdot c}$$

Тогда относительная неопределенность длины волны с учетом (17.30) будет выражаться формулой

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\omega \cdot \lambda}{2\pi \cdot c} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot c \cdot \Delta t} \qquad (17.34)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-8}} = 0{,}3 \cdot 10^{-7} = \mathbf{0{,}3 \cdot 10^{-5}\%}$$

Как видим результаты задачи 17.2.7 (а) и (б) **одинаковые**.

Задача 17.2.8. Траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку малых капелек тумана, размер которых порядка *1мкм*. Можно ли, наблюдая след электрона с энергией *1кэВ*, обнаружить отклонение в его движении от законов классической механики?

Решение

Для определения неопределенности скорости электрона воспользуемся соотношением неопределенности координаты (Δy) и импульса (ΔP_y)

$$\Delta y \cdot \Delta P_y \geq \hbar \qquad (17.35)$$

Так как неопределенность импульса

$$\Delta P_y = m \cdot \Delta V_y,$$

то неопределенность скорости получим

$$\Delta V_y = \frac{\hbar}{\Delta y \cdot m}, \qquad (17.36)$$

где неопределенность координаты Δy можно принять равной размеру капелек тумана $(\Delta y = 10^{-6}\,м)$.

Скорость электрона определим из формулы кинетической энергии $E_K = \frac{mV_y^{\,2}}{2}$

$$V_y = \sqrt{\frac{2E_K}{m}} \qquad (17.37)$$

Относительную неопределенность скорости получим, разделив (17.36) на (17.37)

$$\frac{\Delta V_y}{V_y} = \frac{\hbar}{\Delta y \cdot m} \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_K}} = \frac{\hbar}{\Delta y \sqrt{2E_K \cdot m}} \qquad (17.38)$$

Подставляя числовые значения в (17.38), получим

$$\frac{\Delta V_y}{V_y} = \frac{10^{-34}}{10^{-6}\sqrt{2 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = \frac{10^{-4}}{17} \approx 0{,}06 \cdot 10^{-4} = \mathbf{6 \cdot 10^{-4}\%}$$

Обнаружить отклонения в движении электрона от законов классической механики нельзя. **Понятие траектории в данном случае имеет физический смысл.**