Семинар Симметрии и законы сохранения. (вариант попроще)

Сведения из теории

Соотв. q_k обобщ. импульс сохраняется

(А) q_k – циклич. коорд., если $\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{dp_k}{dt}=0 \Rightarrow p_k=\mathrm{const}$

(Б) Теорема Эмми Нётер. Пусть $q_k\to q_k' = q_k+\varepsilon f_k(q,t)$, $t\to t'=t+\varepsilon h(q,t)$ – однопараметрич. пр-е координат и времени, тогда величина

$$\sum p_k\delta q_k - H\delta t + \delta\Lambda = \mathrm{const}$$

является интегралом движения.

(В) При этом должно выполняться характеристическое свойство преобразования симметрии:

$$L(q,\dot q,t) = L(q',\dot q',t')\frac{dt'}{dt} + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt},$$

здесь дополнит. слагаемое $\frac{d\Lambda}{dt}$ возникает из-за изменения лагранжиана (такие изменения допускаются и имеют вид полной производной по времени от произв. ф-ции $\Lambda(q,t)$)

После чего обратимся к решению простейших задач на определение интегралов движения различными методами.

Задача 1 Одномерное движение свободной частицы с

$$L=\frac{m\dot x^2}{2}.$$

Определите, при каких условиях преобразование

$$x\to x' = x + a(t)$$

является преобразованием симметрии, вычислите соответствующий интеграл движения.

$$L(x) = \frac{m(\dot x'-\dot a)^2}{2} = \frac{m\dot x'^2}{2} - m\dot x'\dot a + \frac{m\dot a^2}{2}$$

Потребуем, чтобы

$$-m\dot x'\dot a + \frac{m\dot a^2}{2} = \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x'}\dot x' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Lambda}{\partial x'} = -m\dot a, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{m\dot a^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'\partial t} = -m\ddot a = \frac{\partial^2\Lambda}{\partial t\partial x'} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot a = 0, \quad a(t) = \alpha + \beta t,$$

для беск. малого пр-я $\alpha\to\delta\alpha$, $\beta\to\delta\beta$

в этом случае

$$-m\dot x'\dot a + \frac{m\dot a^2}{2} = -m\dot x'\beta + \cancel{\frac{m\beta^2}{2}} \simeq -m\dot x'\beta$$

$$= \frac{d\delta\Lambda}{dt} \to \delta\Lambda = -mx\delta\beta$$

Соотв. интеграл дв-я имеет вид:

$$I = m\dot x(\delta\alpha + \delta\beta t) - mx\delta\beta$$

$\forall\, \delta\alpha, \delta\beta \to 0$

$$= m\dot x\,\delta\alpha + \delta\beta(m\dot x t - mx) = \mathrm{const}$$

Ясно, что $\delta\alpha$ соотв. простр. трансляции $\Rightarrow m\dot x = \mathrm{const}$;

параметр же $\delta\beta$ соотв. преобр-ю Галилея $\Rightarrow m\dot x t - mx = \mathrm{const} = -mx(t=0) = -mx(0)$

не интегрируя ур. дв-я получаем закон движения $x(t) = x(0) + \dot x t$.

Задача 2. Рассмотрим замкнутую систему нерелятивистских частиц, взаимодействующих посредством центральных сил, описываемую Лагранжианом

$$L = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\vec r}_k^{\,2}}{2} - \sum_{i<j} U(|\vec r_i - \vec r_j|)$$

Определите интегралы движения соответствующие (А) трансляциям в пространстве, (Б) преобразованиям Галилея со скор. $\vec V$.

(А) Трансляция в пространстве: $\vec r_k \to \vec r_k' = \vec r_k + \vec a$.

$$L(\vec r_k', \dot{\vec r}_k', t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\vec r}_k^{\,2}}{2} - \sum_{i<j} U(|\vec r_i + \vec a - \vec r_j - \vec a|) = L(\vec r_k, \dot{\vec r}_k, t),$$

в силу неизменности Лагранжиана является пр-ем симметрии, поэтому

$$\sum_{k=1}^{N} \vec p_k \cdot \delta \vec a \overset{\forall \delta \vec a}{=} const \Rightarrow \sum \vec p_k = \vec{const}$$

(Б) Буст со скоростью $\vec V$: $\vec r_k \Rightarrow \vec r_k' = \vec r_k + \vec V t$

$$L(\vec r_k', \dot{\vec r}_k', t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k (\dot{\vec r}_k + \vec V)^2}{2} - \sum U(|\vec r_k + \vec V t - \vec r_j - \vec V t|)$$

$$= L(\vec r_k, \dot{\vec r}_k, t) + \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec r}_k \vec V + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec V^2}{2}$$

Откуда, заключаем, что для бесконечно малого пр-я с $\vec V \Rightarrow \delta \vec V$:

$$L(\vec r_k, \dot{\vec r}_k, t) = L(\vec r_k', \dot{\vec r}_k', t) + \frac{d}{dt}\delta\Lambda, \quad \delta\Lambda = -\sum m_k \vec r_k \delta \vec V$$

и интеграл движения имеет вид:

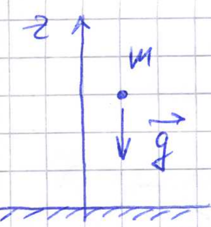
$$I = \sum_{k=1}^{N} \vec p_k \cdot \delta \vec V \cdot t - \sum m_k \vec r_k \delta \vec V \overset{\forall \delta \vec V}{=} const$$

$$\Rightarrow -M \vec R_{ц.и} + \left(\sum m_k \dot{\vec r}_k\right) t = \vec{const}$$

$$\Rightarrow \vec R_{ц.и}(t) = \frac{\sum m_k \dot{\vec r}_k}{\sum m_k} t + \vec R_{ц.и}(0) = \vec V_{ц.и} \cdot t + \vec R_{ц.и}(0).$$

Не производя никаких интегрирований уравнений движения, получили закон движения центра инерции системы.

Задача 3. Частица в однородном поле силы тяжести. Одномерное движение. Лагранжиан частицы имеет вид



$$L = \frac{m \dot z^2}{2} - mgz$$

(А) Покажите, что трансляция $z \to z' = z + \delta\alpha$ является преобразованием симметрии, вычислите соотв. инт. движения.

(Б) Покажите, что преобразование $z \to z' = z + \beta t$ также явл. пр-ем симметрии, вычислите соотв. интеграл движения.

Решение.

$$L(z', \dot z') = \frac{m \dot z^2}{2} - mgz - mg\delta\alpha =$$

$$= L(z, \dot z) - mg\delta\alpha, \Rightarrow \Lambda = mg\delta\alpha t$$

$$\Rightarrow p\delta\alpha + mg\delta\alpha t = const \qquad p = -mgt + p_0$$

$$\boxed{\dot z = v_0 - gt}$$

(Б) $z \to z' = z + \beta t$ $\quad$ $\beta \to \delta\beta$ — если число б. мало преобразов.

$$L(\dot z', z') = \frac{m(\dot z + \beta)^2}{2} - mgz - mg\beta t =$$

$$= \frac{m\dot z^2}{2} - mgz + m\dot z\beta + \frac{m\beta^2}{2} - mg\beta t$$

$$\Rightarrow \delta\Lambda = -mz\beta + mg\frac{\beta t^2}{2} - \cancel{\frac{m\beta^2}{2}t}$$ м. пренебречь т.к. $\beta \to \delta\beta$

$$\Rightarrow m\dot z\,\delta\beta\, t - mz\,\delta\beta + mg\frac{\delta\beta\, t^2}{2} = const$$

$$\Rightarrow mz = m\dot z t + mg\frac{t^2}{2} \xrightarrow[(\dot z = V_0 - gt)]{\text{с учетом (А)}} mz = (V_0 - gt)t + \frac{gt^2}{2} + z_0$$

$$\Rightarrow z = V_0 t - \frac{gt^2}{2} + z_0.$$ Опять как и в задачах 1, 2, не интегрируя ур. движения, получили $z = z(t)$.

Задача 4. Частица в трёхмерном пр-ве, в однородном поле с $U(z) = mgz$. Укажите все возможные интегралы движения. Лагранжиан $L = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} - mgz = \frac{m\dot{r}^2}{2} - mgz$.

Решение. (А) Применим соображения, связанные с циклич. координатами. Очевидно:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \to p_x = m\dot x = const,\ p_y = m\dot y = const.$$

Кроме того, в цилиндрических координатах (ρ, φ, z):

$$L = \frac{m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)}{2} - mgz$$

$$\to \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \to \varphi \text{ — циклич. коорд.} \to p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi = const$$

(Б) Ясно также, что L не изм. при поворотах вокруг оси z:

$$\vec r \to \vec r' = \vec r + \delta\varphi[\vec e_3 \times \vec r], \quad \delta\Lambda = 0$$

поэтому имеем еще один инт. дв-я

$$\vec p \cdot \delta\varphi[\vec e_3 \times \vec r] = \delta\varphi\, \vec e_3 \cdot [\vec r \times \vec p] = const \quad \forall \delta\varphi$$

$$\Rightarrow \vec e_3 \cdot [\vec r \times \vec p] = L_3 = [\vec r \times \vec p]_3 = const.$$

(В) $E = H = \vec p \cdot \dot{\vec r} - L = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz = const.$

Задача 5. Для частицы в центр. симметричном поле с $U = U(r)$ укажите возм. инт. дв-я.

$$L\Big|_{\text{в сф. коор}} = \frac{m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)}{2} - U(r)$$

$$\to \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = const$$

$H = \sum \vec p \cdot \vec v - L = const$ = вычисл. в „своих" переме