Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ СТУДЕНТОВ I КУРСА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2009

УДК 531+536(076.5)
М55

Составители:
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Г. Дубровский
канд. физ.-мат. наук, доц. Г.В. Харламов

Рецензенты:
д-р физ.-мат.наук, проф. П.А. Пуртов (НГУ)
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Г. Моисеев (НГТУ)

Работа подготовлена на кафедре прикладной и теоретической физики

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по курсу общей физики и самостоятельной работы студентов первого курса физико-технического факультета НГТУ. Сборник включает 14 тем по разделам механики, термодинамики и молекулярной физики. Каждая тема включает краткое теоретическое введение, примеры решения задач и задачи для решения на практических занятиях под руководством преподавателя. В конце пособия приведены варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения. Каждый студент обязан выполнить в течение семестра три задания (всего 30 задач) и защитить их перед преподавателем.

Задачи, включенные в сборник, выбирались из различных учебных пособий, таких как: И.Е. Иродов. Задачи по общей физике; В.С. Волькенштейн. Сборник задач по общему курсу физики; И.В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике, и др. Полный список использованных источников приведен в конце настоящего издания.

Студентам рекомендуется:

При подготовке к практическому занятию по одной из представленных в пособии тем внимательно изучить лекцию или прочитать главы из учебника, касающиеся этой темы.

Затем, разобрать приведенные в пособии примеры решения задач. Если остались неясные моменты, разобрать их на практическом занятии при помощи преподавателя.

Использовать полученный опыт для решения задач на практическом занятии, а затем, дома для решения задач из своего варианта задания, относящихся к этой теме.

Наиболее «продвинутым» студентам рекомендуется самостоятельно решать сложные задачи из задачников, список которых приведен в конце настоящего издания. Особое внимание следует обратить на задачник [2].

Тема 1: Анализ размерностей

Почти все физические величины являются размерными. В системе СИ основными механическими единицами являются метр (*м*), секунда (*с*) и килограмм (*кг*), в которых измеряются расстояние, время и масса. Размерности всех других механических величин выражаются через основные единицы и, поэтому называются производными. Например, скорость имеет размерность *м/с*, ускорение – *м/с*^{2}, плотность – *кг/м*^{3}, сила – *Н = кг м/с*^{2}, давление – *Па = Н/м*^{2} *= кг/(м с*^{2}*)* и т.д.

В физике существует абсолютное правило, применимое к любым физическим уравнениям: размерность величины, стоящей с правой стороны уравнения, должна равняться размерности величины, стоящей слева. Это правило чаще всего используется для проверки правильности вновь полученных уравнений. Однако этот принцип можно использовать для получения качественных зависимостей между физическими величинами в той или иной задаче. Для этого надо проанализировать, от каких параметров может зависеть искомая физическая величина в каждой конкретной задаче. Такой анализ выполняется на основе физического опыта, опираясь на физическую интуицию. Далее проведенный анализ представляют в виде общей формулы. Например, если некоторая физическая величина a зависит от параметров $b, c, d,...$, то общая зависимость $a \sim f(b, c, d, \ldots)$ запишется так

$$a \sim b^p \cdot c^q \cdot d^r \cdot \ldots \qquad (1.1)$$

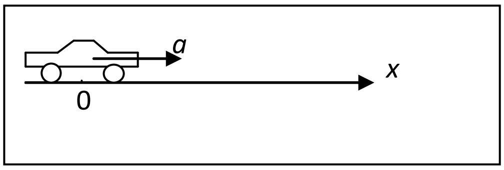
Показатели степени $p, q, r,...$ подлежат определению на основании принципа равенства размерностей справа и слева в этой формуле. При этом совсем не обязательно придерживаться системы единиц СИ. Можно ввести абстрактные размерные единицы. Пусть расстояние измеряется в единицах L, т.е. координаты имеют размерность $[x] = L$. Время измеряется в единицах T, $[t] = T$; масса измеряется в единицах M, $[m] = M$. Подставляя единицы измерения величин $a, b, c, d,...$ в уравнение (1.1), и приравнивая показатели степени при соответствующих единицах измерения справа и слева, мы получим систему уравнений для *p, q, r*,... Решая эту систему, мы найдем зависимость искомой физической величины от параметров задачи.

Прежде чем использовать этот метод для решения конкретных задач надо сделать два замечания. Во-первых, может оказаться, что искомая величина зависит от суммы некоторых функций параметров системы. В этом случае уравнение (1.1) неприменимо. Однако можно заранее из физических соображений определить вид такой зависимости и использовать формулу (1.1) для каждого слагаемого суммы отдельно. Во-вторых, в точную зависимость искомой величины могут входить безразмерные параметры, значения которых невозможно определить на основании анализа размерностей. Поэтому формула (1.1) дает лишь качественную зависимость. С другой стороны, часто в практически важных случаях безразмерный коэффициент оказывается порядка единицы. Поэтому, хотя метод анализа размерностей не является универсальным, он оказывается очень полезным, как для физиков – теоретиков, так и для экспериментаторов. Рассмотрим несколько примеров применения этого метода.

Задача 1. Автомобиль движется прямолинейно и равноускоренно. Используя анализ размерностей, найдите зависимость скорости автомобиля от ускорения и пути, если его начальная скорость равнялась нулю.

Дано: a, x.

Найти: v ~ f(a, x)



Решение. Автомобиль начинает двигаться из начала координат вдоль оси *x* с постоянным ускорением *a* (смотри рис.). Пройдя расстояние *x*, он приобретет скорость *v*. Исходя из физических соображений, эта скорость может зависеть от ускорения *a* и пройденного расстояния *x*. Согласно теории размерностей запишем эту зависимость в виде

$$v \sim a^p \cdot x^q, \qquad (1.2)$$

где p и q показатели степени, которые надо определить, приравнивая размерности справа и слева в данном уравнении.

Запишем размерности физических величин, входящих в уравнение (1.2):

$$[a] = \frac{L}{T^2} = L \cdot T^{-2},$$

$$[v] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1},$$

$$[x] = L.$$

Подставим соответствующие размерности в уравнение (1.2). Получим уравнение

$$L \cdot T^{-1} = L^p \cdot T^{-2p} \cdot L^q = L^{p+q} \cdot T^{-2p}. \tag{1.3}$$

Приравнивая показатели степени справа и слева в уравнении (1.3), получим

$$\begin{cases} 1 = p + q, \\ -1 = -2p. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$p = \frac{1}{2}, \qquad q = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, зависимость скорости автомобиля от ускорения и пройденного пути запишется в виде

$$v \sim \sqrt{a \cdot x}. \tag{1.4}$$

Точная зависимость скорости от ускорения и пути может включать безразмерный коэффициент, который не может быть определен на основании теории размерности. Например, в нашей задаче согласно точным формулам кинематики

$$v = a \cdot t,$$

$$x = \frac{a \cdot t^2}{2},$$

мы получим

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot x}.$$

Число $\sqrt{2}$ является тем самым безразмерным коэффициентом.

Ответ: $v \sim \sqrt{a \cdot x}$.

Задача 2. Используя анализ размерностей, определите зависимость скорости звука в газе от давления и плотности.

Дано: P, ρ
Найти: $c \sim f(P, \rho)$

Скорость звука в газе может зависеть от давления, плотности и температуры. Однако, эти параметры связаны между собой уравнением состояния газа. Поэтому остаётся только два независимых параметра, в качестве которых можно выбрать давление и плотность. Запишем предполагаемую зависимость в виде

$$c \sim P^p \cdot \rho^q. \quad (1.5)$$

Запишем размерности входящих в это уравнение физических величин:

$$[c] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1},$$

$$[P] = \frac{M}{L \cdot T^2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2},$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = M \cdot L^{-3}.$$

Подставляя соответствующие размерности в формулу (1.5), получаем уравнение размерностей

$$L \cdot T^{-1} = M^{p+q} \cdot L^{-p-3q} \cdot T^{-2p}.$$

Приравнивая показатели степени при соответствующих размерностях слева и справа, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = p + q, \\ 1 = -p - 3q, \\ 1 = -2p. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $p = 1/2, q = -1/2$.

Таким образом, найденная зависимость имеет вид

$c \sim \sqrt{P/\rho}$.

Эта формула отличается от точной, полученной из молекулярно-кинетической теории, коэффициентом порядка единицы. Например, для воздуха этот коэффициент составляет 1,18.

Ответ: $c \sim \sqrt{P/\rho}$.

Следующие задачи рекомендуем решить самостоятельно.

Задача 3. Используя метод размерностей, определите зависимость периода колебаний математического маятника от его параметров (m, l) и ускорения свободного падения (g). $\left(T \sim \sqrt{\frac{l}{g}}\right)$

Задача 4. Определите зависимость силы сопротивления, действующей на движущийся автомобиль, от плотности воздуха ρ, площади поперечного сечения S и его скорости v. $(F \sim \rho S v^2)$

Тема 2: Перемещение, скорость и ускорение материальной точки

В *кинематике* изучается движение материальных тел, при этом не рассматриваются причины этого движения. *Движение* – это изменение положения тела в пространстве с течением времени. Движение тела рассматривается относительно какой-либо *системы отсчета*, включающей в себя тело отсчета, систему координат (чаще всего декартову) и прибор для измерения времени (секундомер).

Часто при описании движения тела можно пренебречь его размерами и считать тело точкой. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с масштабом его движения. Линия, по которой движется материальная точка, называется *траекторией*. Длина траектории называется *путем (S)*. *Перемещением* ($\overrightarrow{\Delta r}$) называется вектор, соединяющий начальное положение материальной точки с её конечным положением. Вектор, соединяющий начало координат с положением точки в данный момент времени, называется *радиус-вектором точки* ($\vec{r}$). Зависимость радиус-вектора от времени называется *законом движения* материальной точки: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Скоростью материальной точки называется вектор, равный первой производной от радиус-вектора этой точки по времени:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt. \tag{2.1}$$

Величина этого вектора показывает, какой путь проходит точка за единицу времени. Направление вектора скорости всегда совпадает с направлением движения.

Ускорением материальной точки называется вторая производная от радиус-вектора этой точки по времени:

$$\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2. \tag{2.2}$$

Таким образом, ускорение – это первая производная от скорости точки по времени:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt. \tag{2.3}$$

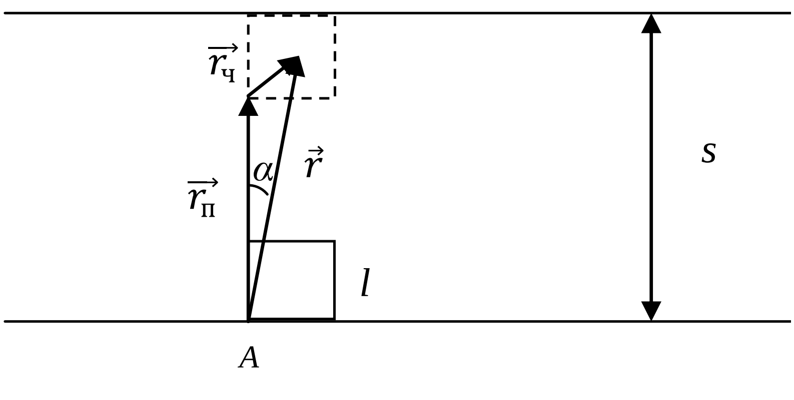
Ускорение показывает, как изменяется скорость по величине и по направлению в единицу времени.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Ширина канала s = 300 м. Квадратный паром со стороной l = 40 м переправляется поперек канала. За время переправы пассажир, двигаясь из точки A наискосок парома, успевает дойти до его середины. Найдите перемещение пассажира относительно берегов.

Дано: s = 300 м, l = 40 м.
Найти: $\vec{r}$

За время переправы точка A совершает перемещение $\vec{r}_п$, а человек относительно точки A - $\vec{r}_ч$ (см. рисунок). Перемещение человека относительно берега будет складываться из этих



двух перемещений: $\vec{r} = \vec{r_п} + \vec{r_ч}$. Чтобы определить вектор перемещения, надо определить его модуль и направление. Модуль *r* можно рассчитать по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{\left(s - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = 280{,}71 \text{ м.}$$

Направление вектора $\vec{r}$ можно определить, вычислив угол α:

$$tg\,\alpha = \frac{l/2}{s - l/2} = 0{,}071.$$

Поскольку тангенс угла α очень мал, то $\alpha \approx tg\,\alpha = 0{,}071$ рад $= 4{,}068^\circ$.

Ответ: r =280,71 м; α = 4,068°.

Задача 2. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью v_2 = 40 км/ч. Какова средняя скорость v движения автомобиля?

Дано: $t_1 = t/2$, $t_2 = t/2$, v_1 = 80 км/ч, v_2 = 40 км/ч.

Найти: v.

Средняя скорость движения определяется отношением пути, пройденного автомобилем, к суммарному времени, за которое автомобиль проходит этот путь:

$$v = \frac{S}{t}.$$

Весь путь автомобиля можно представить суммой путей за первую и вторую половины времени его движения:

$$S = S_1 + S_2.$$

Пути S_1 и S_2 можно выразить через соответствующие скорости v_1 и v_2 и времена движения автомобиля t_1 и t_2:

$$S_1 = v_1 \cdot t_1 = \frac{v_1 . t}{2},$$

$S_2 = v_2 \cdot t_2 = \dfrac{v_2 \cdot t}{2}.$

Полное время движения представим в виде $t = t_1 + t_2$. Тогда для средней скорости получаем формулу

$$v = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \cdot t + v_2 \cdot t}{2 \cdot t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Подставляя значения скоростей v_1 и v_2, получаем

$$v = \frac{80 + 40}{2} = 60 \text{ (км/ч)}.$$

Заметим, что в данном случае мы можем использовать внесистемные единицы измерения скорости (км/ч), т.к. при этом они не смешиваются с другими системными единицами. Если же в задаче встречаются физические переменные, выраженные в различных системах единиц (или внесистемные), то необходимо все размерные величины перевести в систему СИ.

Ответ: v = 60 км/ч.

Задача 3. Зависимость пройденного телом пути *S* от времени *t* дается уравнением $S = A \cdot t - B \cdot t^2 + C \cdot t^3$, где *A* = 2 м/с, *B* = 3 м/с^2, *C* = 4 м/с^3. Найти: а) зависимость скорости v и ускорения *a* от времени *t;* б) расстояние *S*, пройденное телом, скорость v и ускорение *a* тела через время *t* = 2 с после начала движения.

Дано: $S = A \cdot t - B \cdot t^2 + C \cdot t^3$,

A = 2 м/с,

B = 3 м/с^2,

C = 4 м/с^3,

t = 2 с.

Найти: $v(t), a(t)$;

S(2), $v(2)$, *a*(2).

а) По определению скорость тела – это производная от пути по времени $v(t) = dS/dt$. Берем производную и получаем

$v(t) = A - 2B \cdot t + 3C \cdot t^2.$

Ускорение – это производная от скорости по времени

$a(t) = dv/dt = -2B + 6C \cdot t.$

б) Рассчитаем путь, скорость и ускорение тела через две секунды после начала движения:

$S(2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 24$ (м),

$v(2) = 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2^2 = 38$ (м/с),

$a(2) = -2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 2 = 42$ (м/с^2).

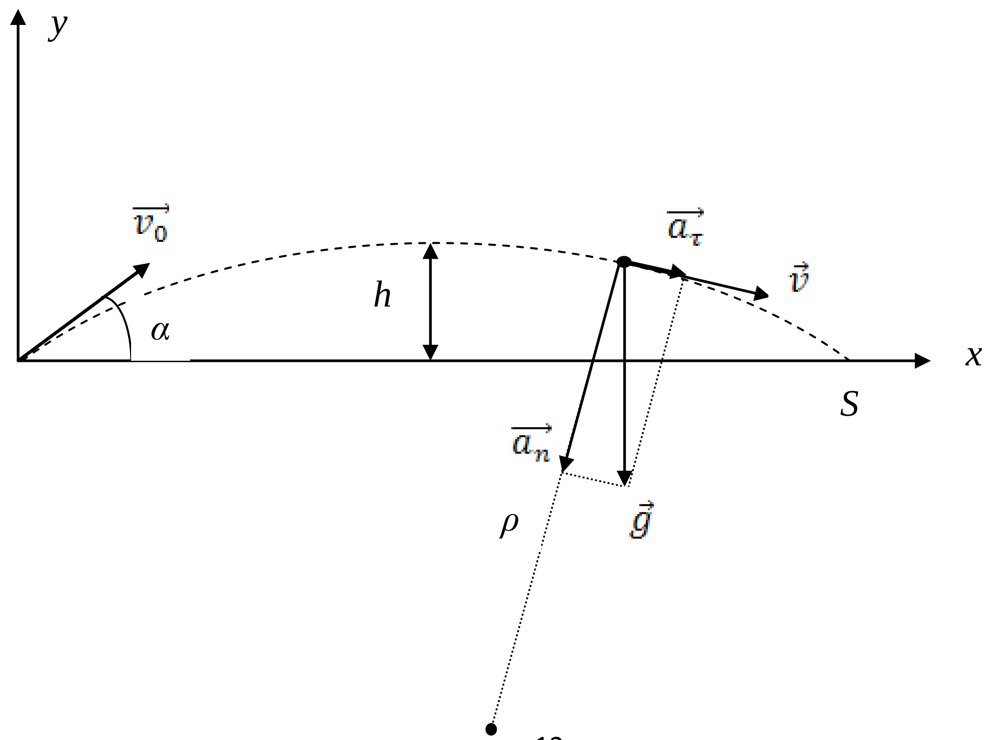
Ответ: а) $v(t) = A - 2B \cdot t + 3C \cdot t^2$, $a(t) = -2B + 6C \cdot t$;

б) $S(2) = 24$ (м), $v(2) = 38$ (м/с), $a(2) = 42$ (м/с^2).

Задача 4. Тело брошено со скоростью $v_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти максимальную высоту, дальность и время полета. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения, а также радиус кривизны ρ траектории тела через время $t = 1{,}25$ с после начала движения. Найти уравнение траектории тела. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Дано: $v_0 = 14{,}7$ м/с, $\alpha = 30^\circ$, $t = 1{,}25$ с.
Найти: $h, S, T, a_n, a_\tau, \rho, y(x)$.

Рассмотрим движение тела в системе отсчета (x, y). Пусть в начальный момент времени тело находилось в начале координат и имело скорость v_0 (см. рисунок).



Проекции начальной скорости на оси координат можно рассчитать по формулам

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha,$

$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha.$

По направлению оси x на тело не действуют никакие силы, т.к. силой сопротивления воздуха мы пренебрегаем, а сила тяжести действует вертикально вниз, т.е. по оси y. Поэтому в горизонтальном направлении тело будет двигаться равномерно со скоростью v_{0x}. Координата x тела будет изменяться по закону

$$x = v_{0x} \cdot t, \qquad (2.4)$$

до тех пор пока тело не упадет на землю.

По оси y по направлению к земле на тело действует постоянная сила тяжести, поэтому тело движется с постоянным ускорением свободного падения g, противоположного по направлению оси y. Координата y изменяется по закону

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}, \qquad (2.5)$$

а скорость v_y – по закону

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t. \qquad (2.6)$$

Чтобы определить время полета тела, надо координату y приравнять нулю. Получим уравнение

$$v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $t_1 = 0$ и $t_2 = 2v_{0y}/g$. Первый корень соответствует начальному положению тела, а второй – конечному, т.е. в момент падения. Таким образом, полное время полета

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Дальность полета – это координата x тела в момент падения. Используя выражения для x и T, получим

$$S = v_{0x} \cdot T = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Чтобы определить высоту подъема, надо рассчитать время, при котором координата y достигает максимума. Для этого надо взять производную от y по времени и приравнять её нулю:

$$\dot{y} = v_{0y} - g \cdot t = 0.$$

Мы видим, что это условие соответствует тому, что скорость v_y тела становится равной нулю в верхней точке своего движения. Отсюда получаем, $t = v_{0y}/g$. Заметим, что это время равно половине времени полета T, т.е. одну половину времени тело поднимается, а вторую – опускается. Подставляя найденное время в формулу для y, получаем высоту подъема тела:

$$h = v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{g \cdot {v_{0y}}^2}{2g^2} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}. \quad (2.7)$$

Чтобы рассчитать ускорения тела, изобразим их на рисунке. Полное ускорение тела равно g направлено вертикально вниз. Это ускорение можно разложить на нормальное a_n и тангенциальное a_τ. При этом тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории, т.е. по скорости движения, а нормальное – перпендикулярно к ним. Так как полное ускорение является векторной суммой нормального и тангенциального, то

$$g^2 = a_n^2 + a_\tau^2.$$

С другой стороны, скалярное произведение $(\vec{g} \cdot \vec{v}) = a_\tau \cdot v$, т.к. тангенциальное ускорение является проекцией полного ускорения на вектор скорости. Отсюда, получаем

$$a_\tau = \frac{(\vec{g} \cdot \vec{v})}{v} = \frac{g_x v_x + g_y v_y}{v}. \quad (2.8)$$

Для величин, входящих в эту формулу, запишем

$g_x = 0,$

$g_y = -g,$

$v_x = v_{0x},$

$v_y = v_{0y} - g \cdot t,$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - g \cdot t\right)^2}.$

После подстановки этих выражений для тангенциального ускорения получаем

$$a_\tau = \frac{-g\left(v_{0y} - g \cdot t\right)}{\sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - g \cdot t\right)^2}}.$$

Нормальное ускорение a_n определим по формуле

$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}.$

Радиус кривизны траектории связан с нормальным ускорением выражением

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (2.7)$$

Поэтому получаем

$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$

Уравнение траектории движения тела получим, если выразим время t через координату x и подставим в выражение для координаты y:

$t = \frac{x}{v_{0x}},$

$y(x) = v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2}{2} = x\, tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2.$

Мы видим, что траекторией движения тела является парабола, ветви которой направлены вниз. Эта парабола пересекает ось x в начале координат и в точке падения тела на землю, а её вершина находится посредине между этими двумя точками.

Рассчитаем все нужные нам величины:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 1{,}5 \text{ (с)},$$

$$S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \approx 19{,}1 \text{ (м)},$$

$$h = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} \approx 2{,}756 \text{ (м)},$$

$$a_\tau = \frac{-g(v_{0y} - g\cdot t)}{\sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - g\cdot t)^2}} \approx 3{,}52 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} \approx 9{,}15 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \approx 20{,}3 \text{ (м)}.$$

Ответ: $T = 1{,}5$ с, $S \approx 19{,}1$ м, $h \approx 2{,}756$ м, $a_\tau \approx 3{,}52$ м/с^2, $a_n \approx 9{,}15$ м/с^2, $\rho \approx 20{,}3$ м, $y(x) = x\, tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2$.

Следующие задачи решите самостоятельно:

Задача 5. Первую половину своего пути движения автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью v_2 = 40 км/ч. Какова средняя скорость v движения автомобиля? ($v \approx 53{,}3$ км/ч)

Задача 6. Точка прошла половину пути со скоростью v_0. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а последний участок прошла со скоростью v_2. Найти среднюю за все время движения скорость точки. $\left(v_{ср} = \frac{2v_0(v_1+v_2)}{2v_0+v_1+v_2}\right)$

Задача 7. Скорость течения в реке с параллельными берегами всюду одинакова и равна v_1. Ширина реки *l*. Катер может плыть со скоростью v_2 относительно воды. Как нужно направить нос катера при переправе, чтобы плыть точно перпендикулярно берегам? Сколько времени займет такая переправа? $\left(v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2},\ t = \frac{l}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}\right)$

Задача 8. Пусть скорость катера относительно воды меньше скорости течения: $v_2 < v_1$. Как следует направить нос катера при переправе, чтобы снос получился минимальным? На какое расстояние s_{min} при этом снесет катер? $\left(\cos\alpha = \frac{v_2}{v_1}, S_{min} = l\sqrt{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1}\right)$

Задача 9. Два шарика бросили одновременно из одной точки в горизонтальном направлении в противоположные стороны со скоростями $v_{10} = 3$ м/с и $v_{20} = 4$ м/с. Найти расстояние между шариками в момент, когда их скорости окажутся взаимно перпендикулярными. ($r \approx 2{,}5$ м)

Задача 10. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $S = A - B\cdot t + C\cdot t^2$, где B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти линейную скорость v точки, её тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения через время t = 3 с после начала движения, если известно, что при t' = 2 с нормальное ускорение точки $a_n' = 0{,}5$ м/с^2. ($v = 4$ м/с, $a_\tau = 2$ м/с^2, $a_n = 2$ м/с^2, $a \approx 2{,}8$ м/с^2)

Задача 11. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha\, t$, где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^{\circ}$ с её вектором скорости? ($t \approx 7{,}02$ с)

Тема 3: Динамика материальной точки. Законы Ньютона

Решение задач динамики материальной точки базируется на трех законах Ньютона:

1. Существуют такие системы отсчета, в которых если на точку не действуют никакие силы или действие всех сил компенсируется, то точка движется прямолинейно и равномерно или находится в покое. Такие системы отсчета называются *инерциальными*.
2. Если на материальную точку массой m действует результирующая сила $\vec{F}$, то точка движется с ускорением $\vec{a}$, которое прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{3.1}$$
3. Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3.2}$$

Наиболее важным для решения задач является *второй закон Ньютона*, т.к. он позволяет записать уравнение движения точки. Это будет *дифференциальное уравнение*. Поскольку ускорение – это вторая производная от радиус-вектора точки по времени, а результирующая сила в общем случае может зависеть от радиус-вектора, скорости точки и времени, то уравнение (3.1) можно представить в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \qquad (3.3)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, методы решения которого рассматриваются в курсе высшей математики. Решением такого уравнения является закон движения материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Наиболее простым методом решения дифференциальных уравнений является *метод разделения переменных*. Если удается записать дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad (3.4)$$

то решение такого уравнения можно представить в следующей форме:

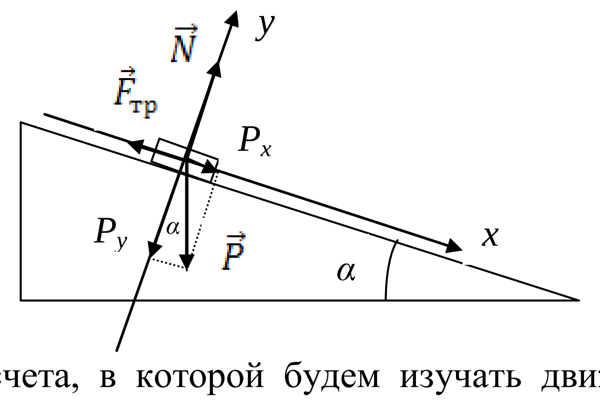
$$y = \int f(x)dx + C, \qquad (3.5)$$

где C – некоторая произвольная константа, которая не может быть вычислена при решении уравнения. Величину этой константы находят позже, используя начальные условия задачи.

Рассмотрим два примера на применение второго закона Ньютона.

Задача 1. На наклонной плоскости с углом наклона α покоится тело. Коэффициент трения тела о плоскость равен k. Телу толчком сообщают начальную скорость v_0, направленную вниз по наклонной плоскости. Как будет изменяться скорость тела, и какой путь оно пройдет до остановки?

Дано: α, k, v_0
Найти: $v(t)$, S



Выберем систему отсчета, в которой будем изучать движение тела. Начало координат совместим с начальным положением тела. Ось x направим вдоль наклонной плоскости, т.е. по направлению движения тела. Ось y направим перпендикулярно наклонной плоскости. На рисунке изображены все силы, действующие на тело. Сила тяжести $\vec{P}$ действует вертикально вниз. Её можно разложить на две составляющие P_x и P_y:

$P_x = Psin\,\alpha,$

$P_y = Pcos\,\alpha,$

$P = mg.$

Сила реакции опоры $\vec{N}$ действует перпендикулярно наклонной плоскости и направлена по оси y. Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена противоположно движению тела, т.е. противоположно оси x.

Запишем второй закон Ньютона в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Это уравнение мы можем спроектировать на оси координат x и y:

$$ma_x = P_x + N_x + F_{\text{тр}x,}$$

$$ma_y = P_y + N_y + F_{\text{тр}y.}$$

Запишем проекции всех сил на оси координат:

$P_x = mgsin\,\alpha,$

$P_y = -mgcos\,\alpha,$

$N_x = 0,$

$N_y = N,$

$F_{\text{тр}x} = -F_{\text{тр}} = -k \cdot N,$

$F_{\text{тр}y} = 0.$

Т.к. движение тела происходит только вдоль оси x, то

$a_x = a,$

$a_y = 0.$

Следовательно, уравнения Ньютона примут вид

$$ma = mgsin\,\alpha - k \cdot N,$$

$$0 = -mgcos\,\alpha + N.$$

Выражая из второго уравнения N и подставляя его в первое, получаем

$ma = mg\sin\alpha - k \cdot mg\cos\alpha.$

Сокращая на m, получаем ускорение тела

$a = g(\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha).$

Следует заметить, что это ускорение будет отрицательным, т.к. тело первоначально покоилось на наклонной плоскости, следовательно, сила трения больше проекции силы тяжести на ось x. Поскольку ускорение не меняется в процессе движения, то движение тела будет равнозамедленным и, следовательно, тело, в конце концов, остановится.

Запишем ускорение, как производную от скорости по времени

$$a = \frac{dv}{dt},$$

и проинтегрируем его

$$v = \int a\,dt + C = a \cdot t + C.$$

Константу C найдем из начальных условий: при $t = 0$ скорость $v = v_0$. Следовательно,

$v_0 = a \cdot 0 + C,$

$C = v_0.$

Окончательно получаем для скорости тела

$v(t) = a \cdot t + v_0 = g(\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha) \cdot t + v_0.$

В момент остановки тела его скорость станет равной нулю. Полагая в предыдущем уравнении $v(t_{\text{ост}}) = 0$, найдем время, через которое тело остановится:

$a \cdot t_{\text{ост}} + v_0 = 0,$

$$t_{\text{ост}} = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{g(\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha)}.$$

Чтобы вычислить путь, пройденный телом до остановки, надо проинтегрировать выражение для скорости по времени:

$$v(t) = \frac{dS}{dt},$$

$$S(t) = \int v(t)dt + C = \int (a \cdot t + v_0)dt + C = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + C.$$

Используя начальное условие для пути (при $t = 0$, $S = 0$), получим $C = 0$. Таким образом, получаем

$$S(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t.$$

Подставляя в это выражение $t = t_{\text{ост}}$, получаем путь, пройденный телом до остановки

$$S = \frac{a \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2}{2} + v_0 \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) = \frac{a \cdot v_0^2}{2a^2} - \frac{v_0^2}{a} = -\frac{v_0^2}{2a},$$

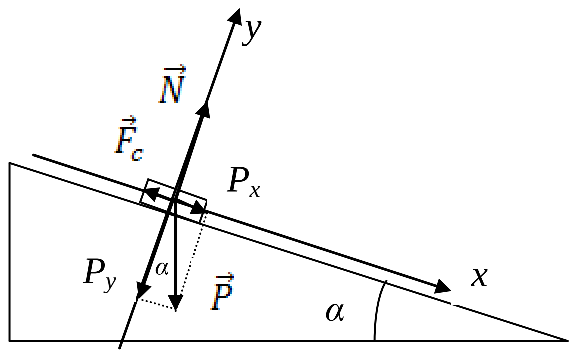
$$S = -\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(k \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Ответ: $v(t) = g(\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha) \cdot t + v_0$, $S = \frac{v_0^2}{2g(k \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)}$.

Задача 2. На смазанную наклонную плоскость с углом α кладут тело массы m без начальной скорости. Найти, как будут изменяться скорость и путь тела от времени, если сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости $F_c = \beta \cdot v$, β – постоянный коэффициент. Трением скольжения пренебречь.

Дано: $\alpha, m, v_0 = 0, F_c = \beta \cdot v.$

Найти: $v(t)$, $S(t)$.



Формально данная задача отличается от предыдущей тем, что вместо силы трения скольжения на тело действует сила сопротивления, которая, по существу, является силой вязкого трения. Изображая все силы на рисунке, запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{с}} = mg\sin\alpha - \beta\cdot v,$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N.$$

Второе из этих уравнений показывает, что силы по оси y компенсируются и никак не влияют на движение тела вдоль оси x. Первое уравнение представим в виде

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int\frac{dv}{g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v} = \int dt + C.$$

Вычислим первый интеграл

$$\int\frac{dv}{g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v} = \left(-\frac{m}{\beta}\right)\int\frac{-\frac{\beta}{m}dv}{g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v} = \left(-\frac{m}{\beta}\right)\int\frac{d\left(g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v\right)}{g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v}$$
$$= \left(-\frac{m}{\beta}\right)\ln\left(g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v\right).$$

Теперь запишем уравнение в виде

$$\left(-\frac{m}{\beta}\right)\ln\left(g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v\right) = t + C.$$

Используем начальное условие: $v = 0$ при $t = 0$.

$$\left(-\frac{m}{\beta}\right)\ln\left(g\sin\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot 0\right) = 0 + C,$$

$$C = \left(-\frac{m}{\beta}\right)\ln(g\sin\alpha).$$

Получаем алгебраическое уравнение относительно v

$$\left(-\frac{m}{\beta}\right) ln\left(gsin\,\alpha - \frac{\beta}{m}\cdot v\right) = t + \left(-\frac{m}{\beta}\right) ln(gsin\,\alpha).$$

Решая его, получаем

$$v(t) = \frac{mgsin\,\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right).$$

Эта формула удовлетворяет начальным условиям. Кроме того, это выражение показывает, что существует максимальная скорость тела

$$v_{max} = \frac{mgsin\,\alpha}{\beta},$$

которой тело стремится достигнуть при $t \to \infty$. Это означает, что на больших временах сила вязкого трения компенсирует силу тяжести, и скорость тела перестает увеличиваться.

Чтобы рассчитать зависимость пути от времени, надо проинтегрировать выражение для скорости по времени

$$S(t) = \int v(t)dt + C.$$

Проведя интегрирование, получаем

$$S(t) = \int \frac{mgsin\,\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)dt + C = \frac{mgsin\,\alpha}{\beta}t + \frac{m^2 gsin\,\alpha}{\beta^2}e^{-\frac{\beta}{m}t} + C.$$

Используя начальные условия: $S = 0$ при $t = 0$, получаем

$$C = -\frac{m^2 gsin\,\alpha}{\beta^2}.$$

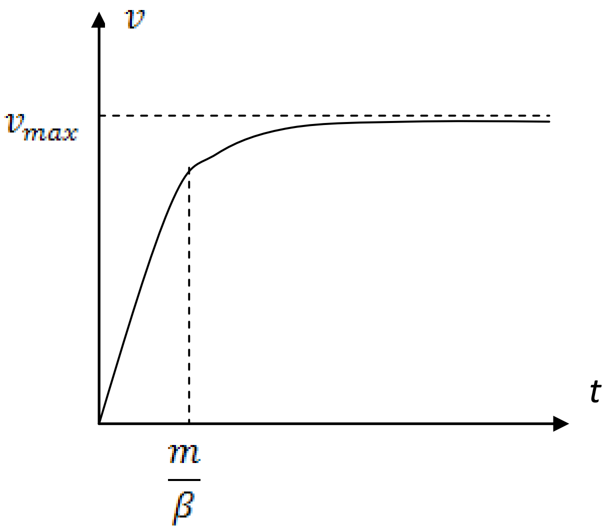
Окончательно получаем

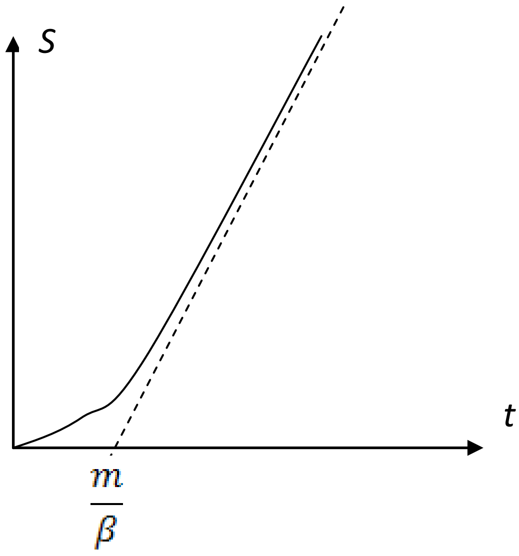
$$S(t) = \frac{mgsin\,\alpha}{\beta}\left[t + \frac{m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)\right].$$

Если $t \gg \frac{m}{\beta}$, то экспонентой можно пренебречь, и выражение упрощается

$$S(t) = \frac{mgsin\,\alpha}{\beta}\left(t - \frac{m}{\beta}\right).$$

Видно, что при этих условиях пройденный путь растет линейно со временем, т.е. движение – равномерное. На следующих рисунках изображены графики зависимостей скорости и пути тела от времени.





Ответ: $v(t) = \frac{mg\sin\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$, $S(t) = \frac{mg\sin\alpha}{\beta}\left[t + \frac{m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)\right]$.

Следующие задачи решите самостоятельно:

Задача 3. Неподвижное тело лежит на гладкой горизонтальной поверхности. В начальный момент времени на него начинает действовать сила, зависящая от времени по закону $F = A\sin(\omega t)$. Найти закон движения тела. A и ω - постоянные. Масса тела равна m. Как изменится закон движения тела, если сила будет зависеть от времени по закону $F = A\cos(\omega t)$. $\left(x(t) = \frac{A}{m\omega}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right], x(t) = \frac{A}{m\omega^2}[1 - \cos(\omega t)]\right)$

Задача 4. Лыжник, разогнавшись на спуске до скорости v_0, выезжает на горизонтальный участок пути и движется по инерции. Сила сопротивления воздуха пропорциональна второй степени скорости $F_c = \beta \cdot v^2$. Найти закон движения лыжника на горизонтальном участке пути. Масса лыжника равна m. Трением лыж о снег пренебречь. $\left(x(t) = \frac{m}{\beta} ln\left(\frac{\beta}{m} v_0 t + 1\right)\right)$

Тема 4: Законы изменения и сохранения импульса, энергии и момента импульса

Закон сохранения импульса заключается в том, что *в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему, остается неизменной во времени:*

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const. \tag{4.1}$$

Если система не замкнута, т.е. на неё действуют внешние силы, сумма которых равна $\vec{F}^e$, то можно сформулировать *закон (теорему) об изменении импульса* системы:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}^e. \tag{4.2}$$

С этим законом тесно связана *теорема о движении центра масс* системы:

$$M \cdot \vec{a}_c = M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e, \tag{4.3}$$

где $\vec{v}_c$ и $\vec{a}_c$ – скорость и ускорение центра масс системы. M – сумма масс всех тел системы. Положение центра масс системы определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{4.4}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор материальной точки, входящей в систему.

Основываясь на этих теоремах, И.В. Мещерский получил уравнение, описывающее реактивное движение (уравнение Мещерского):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}} \frac{dm}{dt} + \vec{F}. \tag{4.5}$$

Здесь m и $\vec{v}$ - масса и скорость тела, совершающего реактивное движение, $\vec{v}_{отн}$ - скорость отделяющейся части тела относительно самого тела (для ракеты – это относительная скорость газов), $\vec{F}$ – результирующая внешних сил, действующих на тело.

Элементарная работа силы, действующей на материальную точку, определяется скалярным произведением силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.6)$$

Работа силы при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 определяется выражением

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.7)$$

Энергией тела называется работа, которую может совершить тело при определённых условиях. В механике разделяют *кинетическую* и *потенциальную* энергии. Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.8)$$

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, составляющих тело:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i {v_i}^2}{2}. \quad (4.9)$$

Потенциальная энергия связана с взаимодействием тел друг с другом или с другими телами, не входящими в систему. Тело обладает потенциальной энергией, если находится в *потенциальном силовом поле*. Если на тело в любой точке пространства действует сила, то тело находится в силовом поле. Если при этом работа сил поля при перемещении тела по замкнутому контуру равна нулю, то поле называется *потенциальным*, а силы - *консервативными*. Вектор силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку в потенциальном поле, связан с потенциальной энергией U соотношением

$$\vec{F} = -grad\, U \equiv -\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right). \quad (4.10)$$

Потенциальная энергия материальной точки равна работе сил поля по перемещению этой точки из данного положения в точку пространства, в которой потенциальная энергия считается равной нулю. Положение этой последней точки выбирается произвольно.

Потенциальная энергия тела, поднятого над землёй, равна

$$U = mgh. \tag{4.11}$$

Здесь m – масса тела, g – ускорение свободного падения, h – высота, на которой расположен центр масс тела над уровнем земли. Тело обладает нулевой потенциальной энергией на поверхности земли.

Потенциальная энергия сжатой (растянутой) пружины равна

$$U = \frac{k\,x^2}{2}. \tag{4.12}$$

Здесь k – жесткость пружины, x – величина деформации пружины. Потенциальная энергия равна нулю для недеформированной пружины.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек равна

$$U = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{4.13}$$

где $\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг с}^2}$ - гравитационная постоянная, m_1 и m_2 массы материальных точек, r - расстояние между материальными точками. Нулевое значение потенциальной энергии соответствует бесконечному удалению материальных точек друг от друга.

Если на систему материальных точек действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы E сохраняется (*закон сохранения механической энергии*)

$$E = T + U = const. \tag{4.14}$$

Если кроме консервативных на тела системы действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия изменяется

$$\Delta E = A_{\text{неконсер.}} \tag{4.15}$$

Момент импульса материальной точки относительно центра O определяется как векторное произведение радиус-вектора точки на импульс этой точки:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (4.16)$$

Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно центра O называется векторное произведение радиус-вектора точки на эту силу:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (4.17)$$

Существует связь между изменением момента импульса точки и моментом силы, действующей на точку, которая называется *законом (теоремой) изменения момента импульса* материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O. \qquad (4.18)$$

Заметим, что если в этом уравнении положить $\vec{M}_O = 0$, то момент импульса материальной точки будет сохраняться: $\vec{L}_O = const$ (закон сохранения момента импульса).

Теорема об изменении момента импульса выполняется также и для системы материальных точек, если под $\vec{L}_O$ понимать сумму моментов импульсов всех точек системы, а под $\vec{M}_O$ - сумму всех моментов сил, действующих на систему:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{iO} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \qquad (4.19)$$

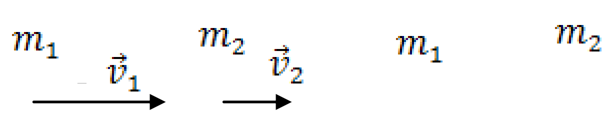
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \qquad (4.20)$$

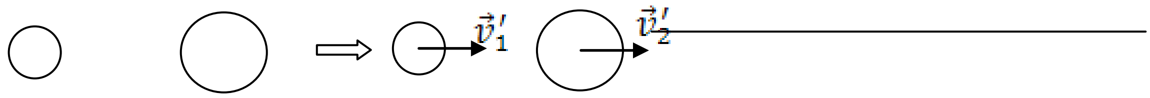
Рассмотрим несколько примеров на использование этих законов.

Задача 1. Шар массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с и нагоняет шар массой $m_2 = 8$ кг, движущийся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Считая удар центральным, найти скорости v_1' и v_2' шаров после удара, если удар: а) абсолютно неупругий; б) абсолютно упругий.

Дано: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг, $v_1 = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $v_2 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Найти: v_1', v_2'





а) если удар абсолютно неупругий и центральный, то шары после соударения слипаются и движутся вместе: $v_1' = v_2' = v'$. Для того чтобы рассчитать скорость шаров после соударения, достаточно одного уравнения, которым является закон сохранения импульса в проекциях на направление движения (см. рисунок):

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'$.

Выразим v':

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Заметим, что для неупругого удара закон сохранения энергии неприменим, т.к. во время удара на шары действуют неконсервативные силы, и часть энергии превращается в тепло.

б) если удар абсолютно упругий, то шары имеют разные скорости после столкновения: $v_1' \neq v_2'$. Чтобы рассчитать эти скорости, необходимо записать два уравнения. Одним уравнением по-прежнему является закон сохранения импульса, а другим – закон сохранения механической энергии, которая является кинетической до и после столкновения:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_1 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_1 v_2'^2}{2}. \end{cases}$$

Перенесем величины, относящиеся к первому шару влево, а ко второму – вправо, и запишем уравнения в виде

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2). \end{cases}$$

Используя формулу разности квадратов, представим последнее уравнение в виде

$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$.

Разделив это уравнение на первое в системе уравнений, получим

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2.$$

Выражая отсюда v_2' и подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$v_1' = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2).$$

Вычислим значения скоростей после удара

$$v_1' = -0{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$v_2' = v_1' + v_1 - v_2 = 1{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знак «минус» означает, что первый шар после удара будет двигаться в обратном направлении.

Следует отметить, что исходная система уравнений, кроме полученного, имеет ещё одно решение:

$$v_1' = v_1,$$

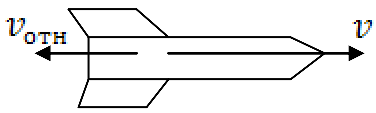
$$v_2' = v_2.$$

Это решение соответствует движению шаров с постоянными скоростями, т.е. без столкновения.

Ответ: а) $v_1' = v_2' = 1{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; б) $v_1' = -0{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}}, v_2' = 1{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2. Ракета, имеющая массу m_0 (вместе с топливом), начинает разгоняться в космосе. Как связана масса ракеты с её скоростью, если относительная скорость газов равна $v_{\text{отн}}$.

Дано: $m_0, v_{\text{отн}}$.
Найти: $m = f(v)$.



Согласно уравнению Мещерского,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \vec{F}.$$

Внешних сил, действующих на ракету в космосе, в данной задаче нет, т.е. $\vec{F} = 0$. Из рисунка видно, что скорость ракеты и относительная скорость газов направлены в разные стороны. Уравнение Мещерского в проекциях на направление движения запишется в виде

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}.$$

Теперь можно разделить переменные в этом уравнении и проинтегрировать

$$\frac{dv}{v_{\text{отн}}} = -\frac{dm}{m},$$

$$\int \frac{dv}{v_{\text{отн}}} = -\int \frac{dm}{m} + C.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\frac{v}{v_{\text{отн}}} = -\ln m + C.$$

Используем начальное условие: $v = 0$ при $m = m_0$.

$$0 = -\ln m_0 + C.$$

$$C = \ln m_0.$$

Зависимость скорости ракеты от её массы принимает вид

$$\frac{v}{v_{\text{отн}}} = \ln\frac{m_0}{m}.$$

Запишем это выражение в виде

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}. \tag{4.21}$$

Эта формула носит имя К.Э. Циолковского. Она показывает, что скорость ракеты возрастает с уменьшением её массы в результате выброса сгоревшего топлива. Скорость ракеты можно увеличить, если увеличить относительную скорость выхода газов.

Ответ: $\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}$.

Задача 3. Доказать соотношение

$$T_л = T_c + \frac{mv_c^2}{2},$$

где $T_л$ - кинетическая энергия системы материальных точек, определяемая в лабораторной системе отсчета (л – система), T_c - кинетическая энергия, определяемая в системе центра масс (ц – система), m - суммарная масса системы, v_c – скорость центра масс в л – системе.

Доказательство. Кинетическая энергия системы n материальных точек в л – системе по определению равна

$$T_л = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2.$$

Скорость каждой материальной точки в л – системе $\vec{v}_i$ складывается из скорости центра масс системы $\vec{v}_c$ и скорости точки относительно центра масс $\vec{v}_{ic}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}.$$

Подставим это выражение в первую формулу

$$T_л = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_c^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ic} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ic}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) v_c^2 + \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ic} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ic}^2.$$

Заметим, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = m, \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ic}^2 = T_c.$$

Чтобы рассчитать сумму $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ic}$, запишем определение радиус-вектора центра масс системы материальных точек:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i.$$

В системе центра масс (ц – система) этот вектор равен нулю

$$0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_{ic}.$$

Дифференцируя последнее равенство по времени, получим

$$0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_{ic}}{dt}.$$

Отсюда следует,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{ic} = 0.$$

Учитывая это, окончательно получаем

$$T_л = \frac{1}{2}mv_c^2 + T_c, \qquad (4.22)$$

Что и требовалось доказать.

Задача 4. Потенциальная энергия частицы имеет вид: а) $U = \alpha/r$; б) $U = kr^2/2$, где r – модуль радиус-вектора частицы; α и k - константы ($k > 0$). Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей при переходе её из точки (1, 2, 3) в точку (2, 3, 4).

Дано: а) $U = \alpha/r$; б) $U = kr^2/2$, $\vec{r}_1$ = (1, 2, 3), $\vec{r}_2$ = (2, 3, 4).

Найти: $\vec{F}, A$

Чтобы рассчитать силу, действующую на частицу в потенциальном поле, надо использовать формулу

$$\vec{F} = -grad\, U \equiv -\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

а) Вычислим производные, входящие в эту формулу.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x};$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d(\alpha/r)}{dr} = -\alpha/r^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\alpha x}{r^3}.$$

Аналогично получим выражения для производных от U по y и по z:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\alpha y}{r^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\alpha z}{r^3}.$$

Для силы $\vec{F}$ получаем выражение

$$\vec{F} = \vec{\imath}\frac{\alpha x}{r^3} + \vec{\jmath}\frac{\alpha y}{r^3} + \vec{k}\frac{\alpha z}{r^3} = \frac{\alpha}{r^3}\left(\vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z\right) = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Мы видим, что в таком поле на частицу действует сила Кулона, которая направлена по радиус-вектору и в зависимости от знака постоянной α может притягивать ($\alpha < 0$) или отталкивать ($\alpha > 0$) частицу.

Вычислим работу, совершаемую силой $\vec{F}$ при переходе частицы из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$.

$$A = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{r} = \alpha\int_1^2 \frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r^3} = \alpha\int_1^2 \frac{r\cdot dr}{r^3} = \alpha\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -\alpha\frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2}$$
$$= \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2} = U(r_1) - U(r_2).$$

$$r_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{14},$$

$$r_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2} = \sqrt{29}.$$

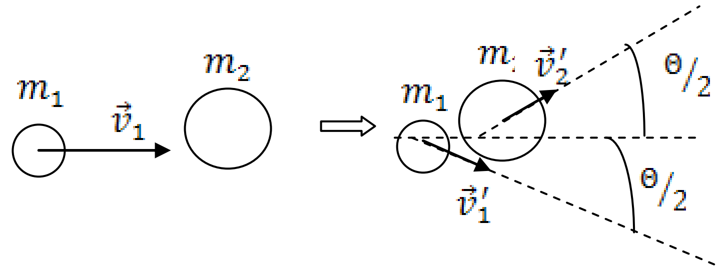
$$A \approx 0{,}082\alpha.$$

Задание под пунктом б) выполняется аналогично. Предлагаем выполнить его самостоятельно. Вы должны получить следующие ответы: $\vec{F} = -k\vec{r}$, $A = -7{,}5k$.

Ответ: а) $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, A \approx 0{,}082\alpha$; б) $\vec{F} = -k\vec{r}, A = -7{,}5k$.

Задача 5. После упругого столкновения частицы 1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения частицы 1, и угол между их направлениями разлета $\Theta = 60^{\circ}$. Найти отношение масс этих частиц.

Дано: $v_2 = 0, \Theta = 60^{\circ}$.
Найти: m_1/m_2

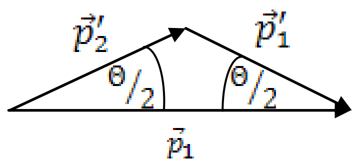


В данной задаче удар является абсолютно упругим, но нецентральным. Запишем законы сохранения импульса и энергии для такого удара.

$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$,

$T_1 = T_1' + T_2'$.

Первое из этих уравнений является векторным. Изобразим векторную диаграмму, соответствующую этому уравнению:



Эта диаграмма показывает, что векторная сумма импульсов после соударения равна импульсу частицы 1 до соударения. Мы видим, что углы при основании треугольника одинаковы и равны $\Theta/2$, следовательно, треугольник равнобедренный, и модули импульсов частиц после соударения равны между собой, т.е.

$p_1' = p_2'$,

или

$m_1 v_1' = m_2 v_2'$.

С другой стороны, из треугольника получаем

$\frac{p_1}{2} = p_1' \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)$.

Выразим из этого уравнения v_1':

$v_1' = \frac{v_1}{2\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$.

Запишем закон сохранения энергии

$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$.

Умножим это уравнение на 2 и разделим на m_1, используем равенство $v_2' = m_1 v_1'/m_2$.

$$v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{m_1 v_1'}{m_2}\right)^2 = v_1'^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Преобразуем это уравнение к виду

$\frac{v_1^2}{v_1'^2} = 1 + \frac{m_1}{m_2}$.

Выразим m_1/m_2.

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_1^2}{v_1'^2} - 1 = \frac{v_1^2}{v_1^2} 4\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) - 1 = 4\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2.$

Ответ: $m_1/m_2 = 4\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) - 1 = 2.$

Задача 6. Момент импульса частицы относительно некоторой точки *O* меняется со временем по закону $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b} \cdot t^2$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, причем $\vec{a} \perp \vec{b}$. Найти относительно точки O момент $\vec{M}$ силы, действующей на частицу, когда угол между векторами $\vec{M}$ и $\vec{L}$ окажется равным $45°$.

Дано: $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b} \cdot t^2$,

$\vec{a}$, $\vec{b}$ = const,

$\vec{a} \perp \vec{b}$,

$\alpha = \widehat{\vec{M}\vec{L}} = 45°$.

Найти: $\vec{M}_O$

Для расчета момента силы, действующего на частицу, относительно точки O используем теорему об изменении момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O.$$

$$\vec{L}_O = \vec{L} = \vec{a} + \vec{b} \cdot t^2.$$

Вычислим производную от этого выражения по времени

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 2\vec{b}t.$$

Таким образом, момент силы, действующей на частицу, в любой момент времени равен

$\vec{M} = \vec{M}_O = 2\vec{b}t.$

Теперь надо определить, в какой момент времени t угол между векторами момента силы и момента импульса составит $45°$. Для этого используем понятие скалярного произведения двух векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$.

$\vec{M} \cdot \vec{L} = ML\cos\alpha,$

где M и L модули векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$.

С другой стороны,

$\vec{M} \cdot \vec{L} = 2\vec{b}t \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} \cdot t^2\right) = 2\vec{b} \cdot \vec{a}t + 2\vec{b} \cdot \vec{b}t^3 = 2b^2t^3.$

Первое слагаемое в предыдущей формуле равно нулю, т.к. по условию $\vec{a} \perp \vec{b}$. Вычислим модули векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$.

$M = \sqrt{\vec{M}^2} = \sqrt{\left(2\vec{b}t\right)^2} = 2bt,$

$L = \sqrt{\vec{L}^2} = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b} \cdot t^2\right)^2} = \sqrt{a^2 + 2\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)t^2 + b^2t^4} = \sqrt{a^2 + b^2t^4}.$

Таким образом, получаем

$$2bt \cdot \sqrt{a^2 + b^2t^4}\cos\alpha = 2b^2t^3.$$

Сокращая на $2bt$ и возводя в квадрат, получаем выражение

$$(a^2 + b^2t^4)\cos^2\alpha = b^2t^4.$$

Выразим отсюда t:

$$t = \sqrt{\frac{a\cos\alpha}{b\sin\alpha}}.$$

Учитывая, что $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$, получаем

$$t = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Окончательно получаем

$$\vec{M} = 2\vec{b}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: $\vec{M} = 2\vec{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Следующие задачи рекомендуем решить самостоятельно.

Задача 7. В результате упругого лобового столкновения частицы 1 массы m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2. $(m_2 = 3m_1)$

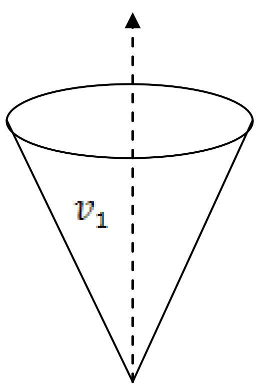
Задача 8. Замкнутая система состоит из двух частиц с массами m_1 и m_2, движущихся под прямым углом друг к другу со скоростями v_1 и v_2. Найти в системе их центра масс: а) импульс каждой частицы; б) суммарную кинетическую энергию обеих частиц. $\left(p_{1c} = p_{2c} = \mu\sqrt{v_1^2 + v_2^2}, T_c = \frac{\mu(v_1^2 + v_2^2)}{2}, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$

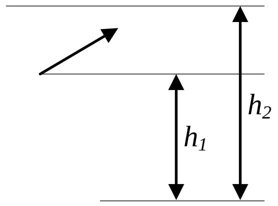
Задача 9. Летевшая горизонтально пуля массы m попала, застряв, в тело массы M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины l. В результате нити отклонились на угол Θ. Считая $m \ll M$, найти: а) скорость пули перед попаданием в тело; б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию. $\left(v_{\text{п}} \approx \frac{2M}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\theta}{2}, \frac{\Delta T}{T} \approx 1 - \frac{m}{M}\right)$

Задача 10. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a(x/y - y/z)$, где a – константа. Найти: а) силу $\vec{F}$, действующую на частицу; б) работу A, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3). $\left(\vec{F} = -a\left[\vec{i}\frac{1}{y} - \vec{j}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z}\right) + \vec{k}\frac{y}{z^2}\right], A = -\frac{a}{3}\right)$

Задача 11. Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M, в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом $\Theta = 30^\circ$ к первоначальному направлению движения частицы m. На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $M/m = 5$? $\left(\frac{\Delta T}{T}100\% = -40\%\right)$

Задача 12. Небольшую шайбу поместили на внутреннюю гладкую поверхность неподвижного круглого конуса на высоте h_1 от его вершины и сообщили ей в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса скорость v_1. На какую высоту h_2 (от вершины конуса) поднимется шайба? $\left(h_2 = \frac{v_1^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh_1}{v_1^2}}\right)\right)$





Тема 5: Вращательное движение твердого тела

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси описывается *основным уравнением динамики вращательного движения:*

$$I_z\varepsilon = M_z^e. \tag{5.1}$$

Здесь I_z - момент инерции твердого тела относительно оси z, ε - угловое ускорение твердого тела, M_z^e - суммарный момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси z.

Момент инерции материальной точки относительно оси z определяется по формуле

$$I_z = m\rho^2. \tag{5.2}$$

ρ - расстояние от точки до оси.

Момент инерции твердого тела относительно оси определяется интегралом

$$I_z = \int \rho^2 dm, \tag{5.3}$$

взятому по всей массе тела. Здесь ρ - расстояние от элемента массы dm до оси вращения (оси z). Используя эту формулу, можно вычислить момент инерции любого тела относительно оси. Например, для тонкого обруча массы m и радиуса R относительно оси z, проходящей через его центр, получим

$$I_z = mR^2. \tag{5.4}$$

Для плоского диска или цилиндра массы m и радиуса R относительно центральной оси получим

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2. \tag{5.5}$$

Для тонкого стержня относительно оси, проходящей через середину перпендикулярно стержню, получим

$$I_z = \frac{1}{12} m l^2. \tag{5.6}$$

m – масса стержня, l – его длина.

Для шара массы m и радиуса R относительно центральной оси получим

$$I_z = \frac{2}{5} m R^2. \tag{5.7}$$

Теорема Штейнера: Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси параллельной данной, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_z = I_C + md^2. \tag{5.8}$$

Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен

$$L_z = I_z \omega, \tag{5.9}$$

где ω - угловая скорость вращения тела.

Кинетическая энергия вращения твердого тела определяется по формуле

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \tag{5.10}$$

Если твердое тело вращается вокруг одной неподвижной точки, то момент инерции этого тела является *тензором*

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Здесь

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm,$$

$$I_{yy} = \int (x + z^2) dm, \tag{5.12}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

- *моменты инерции относительно осей координат* $\{x, y, z\}$, а

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xydm,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int xzdm, \tag{5.13}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yzdm$$

- *центробежные моменты инерции* относительно тех же осей.

Для любого вращающегося тела существует система координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, в которой тензор инерции (5.11) имеет диагональный вид

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Оси этой системы координат называются *главными осями инерции* тела, а моменты инерции I_1, I_2 и I_3 *главными моментами инерции* тела. Если тело имеет оси симметрии, то главные оси инерции совпадают с ними.

Момент импульса тела, вращающегося относительно неподвижной точки, имеет вид

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3. \tag{5.15}$$

$\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ составляющие угловой скорости – векторы, направленные по главным осям инерции.

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной точки, имеет вид

$$T = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2}. \tag{5.16}$$

Движение твердого тела относительно неподвижной точки описывается *динамическими уравнениями Эйлера*

$$\begin{cases} I_1\frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1^e, \\ I_2\frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = M_2^e, \\ I_3\frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3^e. \end{cases} \tag{5.17}$$

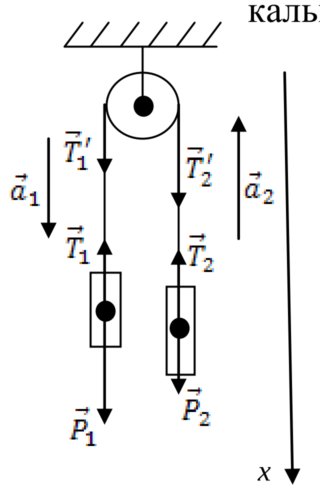
M_1^e, M_2^e и M_3^e проекции суммарного момента внешних сил, действующих на тело, на главные оси инерции $\{x_1, x_2, x_3\}$. Уравнения (5.17) записаны во вращающейся вместе с телом системе отсчета, оси координат которой являются главными осями инерции.

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

Задача 1. Два груза массой m_1 и m_2 подвешены на нити и перекинуты через блок в форме диска массой m и радиуса R. Определить натяжение нитей, ускорение грузов и угловое ускорение блока. Трением пренебречь.

Дано: m_1, m_2, m, R.
Найти: T_1, T_2, a, ε

Изобразим на рисунке все силы, действующие на систему. Будем считать, что блок вращается против часовой стрелки, т.е. $m_1 > m_2$. Ось x направим вертикально вниз. Поскольку масса нити мала, $\vec{T}_1 = \vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2 = \vec{T}_2'$. Кроме того, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$, поскольку грузы движутся вместе. Запишем второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 в проекции на ось x:



$$\begin{cases} P_1 - T_1 = m_1 a, \\ P_2 - T_2 = -m_2 a. \end{cases}$$

Запишем также основное уравнение динамики вращательного движения блока относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр блока:

$$I\varepsilon = M^e = T_1' R - T_2' R = (T_1 - T_2)R.$$

Поскольку блок является диском, то $I = mR^2/2$. Угловое ускорение блока связано с линейным ускорением точки на ободе диска, которое, в свою очередь, равно a – ускорению грузов:

$$\varepsilon = a/R.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим систему

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = m_1 a, \\ P_2 - T_2 = -m_2 a, \\ \dfrac{1}{2} m a = T_1 - T_2. \end{cases}$$

Учитывая, что $P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g$, и решая систему, получим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g,$$

$$\varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{\left(\frac{1}{2}m + m_1 + m_2\right)R} g,$$

$$T_1 = \frac{\left(2m_2 + \frac{1}{2}m\right)m_1}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g,$$

$$T_2 = \frac{\left(2m_1 + \frac{1}{2}m\right)m_2}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g.$$

Мы видим, что если $m_1 < m_2$, то ускорение становится отрицательным. Это означает, что блок вращается по часовой стрелке.

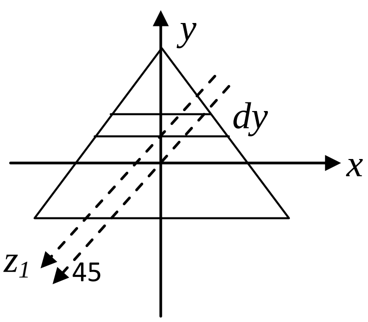
Ответ:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g, \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{\left(\frac{1}{2}m + m_1 + m_2\right)R} g, T_1 = \frac{\left(2m_2 + \frac{1}{2}m\right)m_1}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g, T_2 = \frac{\left(2m_1 + \frac{1}{2}m\right)m_2}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g.$$

Задача 2. Определить момент инерции тонкой пластины в форме правильного треугольника относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр масс. Масса пластины – *m*, сторона треугольника – *a*.

Дано: m, a.

Найти: I



z

Необходимо найти момент инерции равностороннего треугольника относительно оси z, проходящей через центр масс треугольника. Выберем начало координат в центре масс треугольника, как показано на рисунке. Центр масс треугольника делит его высоту в отношении 2 : 1. Разобьем треугольник на бесконечно тонкие полосы, параллельные оси x, которые можно считать стержнями. Вычислим момент инерции dI такой полосы массы dm, находящейся на расстоянии y от начала координат. Для этого используем теорему Штейнера.

$$dI = dI_z = dI_{z_1} + dm \cdot y^2 = \frac{1}{12} dm \cdot l^2 + dm \cdot y^2.$$

Здесь l – длина полосы, которую можно выразить через y.

$$l = 2\left(\frac{2}{3}h - y\right) tg\, 30^\circ.$$

$$h = \frac{a}{2tg\, 30^\circ}.$$

Введем плотность единицы площади пластины по формуле

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{2m}{ah}.$$

Выразим элемент массы dm:

$$dm = \rho\, dS = \rho\, l dy.$$

Подставим это выражение в формулу для момента инерции:

$$dI = \frac{1}{12}\rho\, l^3 dy + \rho\, l y^2 dy.$$

Чтобы найти момент инерции I, надо проинтегрировать это выражение по dy от $-h/3$ до $2h/3$.

$$I=\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{1}{12}\rho\, l^3+\rho\, ly^2\right)dy=\frac{1}{12}\rho\int_{-h/3}^{2h/3}l^3\,dy+\rho\int_{-h/3}^{2h/3}ly^2\,dy$$

$$=\frac{1}{12}\rho\int_{-h/3}^{2h/3}\left[2\left(\frac{2}{3}h-y\right)tg\,30^{\circ}\right]^3dy$$

$$+\rho\int_{-h/3}^{2h/3}\left[2\left(\frac{2}{3}h-y\right)tg\,30^{\circ}\right]y^2\,dy$$

$$=\frac{1}{12}\rho(2tg\,30^{\circ})^3\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}h-y\right)^3dy$$

$$+\rho 2tg\,30^{\circ}\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}h-y\right)y^2\,dy$$

$$=-\frac{1}{12}\rho(2tg\,30^{\circ})^3\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}h-y\right)^3d\left(\frac{2}{3}h-y\right)$$

$$+\rho 2tg\,30^{\circ}\frac{2}{3}h\int_{-h/3}^{2h/3}y^2\,dy-\rho 2tg\,30^{\circ}\int_{-h/3}^{2h/3}y^3\,dy=$$

$$=-\frac{1}{12}\rho(2tg\,30^{\circ})^3\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}h-y\right)^4\Bigg|_{-h/3}^{2h/3}+\rho 2tg\,30^{\circ}\frac{2}{3}h\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-h/3}^{2h/3}-$$

$$-\rho 2tg\,30^{\circ}\frac{y^4}{4}\Bigg|_{-h/3}^{2h/3}$$

$$=\frac{1}{12}\rho(2tg\,30^{\circ})^3\frac{1}{4}h^4+\rho 2tg\,30^{\circ}\frac{2}{9}h\left(\frac{h^3}{3}\right)-\rho 2tg\,30^{\circ}\frac{1}{4}\frac{5}{27}h^4$$

$$=\frac{1}{9\sqrt{3}}\rho h^4.$$

Здесь мы учли, что $tg\,30^{\circ}=1/\sqrt{3}$. Подставляя выражение для h, после простых преобразований окончательно получаем

$$I=\tfrac{1}{12}ma^2. \qquad (5.18)$$

Рассмотренный метод часто используется для вычисления моментов инерции различных фигур.

Ответ: $I=\frac{1}{12}ma^2$.

Задача 3. Найти линейные скорости v движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости $h=0{,}5$ м, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Дано: $h = 0{,}5$ м, $v_0 = 0$.
Найти: v.

Для решения задачи используем закон сохранения энергии. В верхней точке наклонной плоскости тело обладает потенциальной энергией

$U = mgh.$

В нижнем положении тело будет обладать только кинетической энергией, которая будет разной для различных тел:

1) Для шара, диска и обруча

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2};$$

2) Для скользящего тела

$T = \frac{mv^2}{2}.$

Согласно закона сохранения энергии, потенциальная энергия в верхнем положении тела равна его кинетической энергии в нижнем, т.к. трение не учитывается.

Угловая скорость катящегося без проскальзывания тела связана с линейной скоростью его центра масс

$\omega = \frac{v}{R},$

где R - радиус шара, диска или обруча. Моменты инерции тел выражаются формулами:

$I = \frac{2}{5}mR^2 -$ для шара,

$I = \frac{1}{2}mR^2 -$ для диска,

$I = mR^2 -$ для обруча.

Подставляя все выражения в формулу для кинетической, энергии и приравнивая кинетическую и потенциальную энергии, получаем:

1) Для шара

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{2mR^2v^2}{5R^22}=\frac{7mv^2}{10}=mgh,$$

$$v=\sqrt{\frac{10gh}{7}}=2{,}646\ (^{\text{м}}/_{\text{с}}).$$

2) Для диска

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mR^2v^2}{2R^22}=\frac{3mv^2}{4}=mgh,$$

$$v=\sqrt{\frac{4gh}{3}}=2{,}556\ (^{\text{м}}/_{\text{с}}).$$

3) Для обруча

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mR^2v^2}{R^22}=mv^2=mgh,$$

$$v=\sqrt{gh}=2{,}214\ (^{\text{м}}/_{\text{с}}).$$

4) Для скользящего тела

$$\frac{mv^2}{2}=mgh,$$

$$v=\sqrt{2gh}=3{,}13\ (^{\text{м}}/_{\text{с}}).$$

Таким образом, наибольшей скоростью будет обладать скользящее тело, т.к. для него вся потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения. Для остальных тел часть потенциальной энергии превращается в кинетическую энергию вращательного движения, что приводит к уменьшению скорости центра масс тела. Это уменьшение тем больше, чем больше момент инерции тела.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 2{,}646\ (м/с)$ - для шара, $v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 2{,}556\ (м/с)$ - для диска, $v = \sqrt{gh} = 2{,}214\ (м/с)$ - для обруча, $v = \sqrt{2gh} = 3{,}13\ (м/с)$ - для скользящего тела.

Задача 4. Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n_1 =10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к её центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к её центру? Радиус платформы R = 1,5 м.

Дано: m = 100 кг, n_1 =10 об/мин, m_0 = 60 кг, R = 1,5 м.

Найти: n_2, A.

Переходя от края платформы к её центру, человек изменяет момент инерции системы в целом относительно оси вращения. При этом должен выполняться закон сохранения момента импульса, так как отсутствуют моменты внешних сил:

$$L_1 = L_2.$$

Момент импульса твердого тела равен $L = I\omega$, поэтому получаем

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$.

Момент инерции является аддитивной величиной и равен сумме момента инерции платформы и момента инерции человека

$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 + m_0R^2$,

$I_2 = \frac{1}{2}mR^2$.

Во втором случае момент инерции человека равен нулю, т.к. он находится на оси вращения и является материальной точкой.

Учтем, что $\omega = 2\pi n$. Получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2}mR^2 + m_0R^2\right)2\pi n_1 = \frac{1}{2}mR^2 2\pi n_2.$$

Отсюда получаем

$$n_2 = \left(1 + \frac{2m_0}{m}\right)n_1 = 22\frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

Мы видим, что частота вращения платформы увеличилась, т.к. уменьшился момент инерции системы.

Следует отметить, что закон сохранения энергии не выполняется для данного процесса, поскольку человек совершает работу, переходя с края платформы в её центр. Эта работа будет равна разности кинетических энергий вращательного движения в конце и начале движения человека.

$$A = T_2 - T_1 = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 m_0 R^2\left(1 + \frac{2m_0}{m}\right)n_1^2 = 162{,}8\ (\text{Дж}).$$

Ответ: $n_2 = \left(1 + \frac{2m_0}{m}\right)n_1 = 22\ \text{об/мин}, A = 162{,}8\ \text{Дж}.$

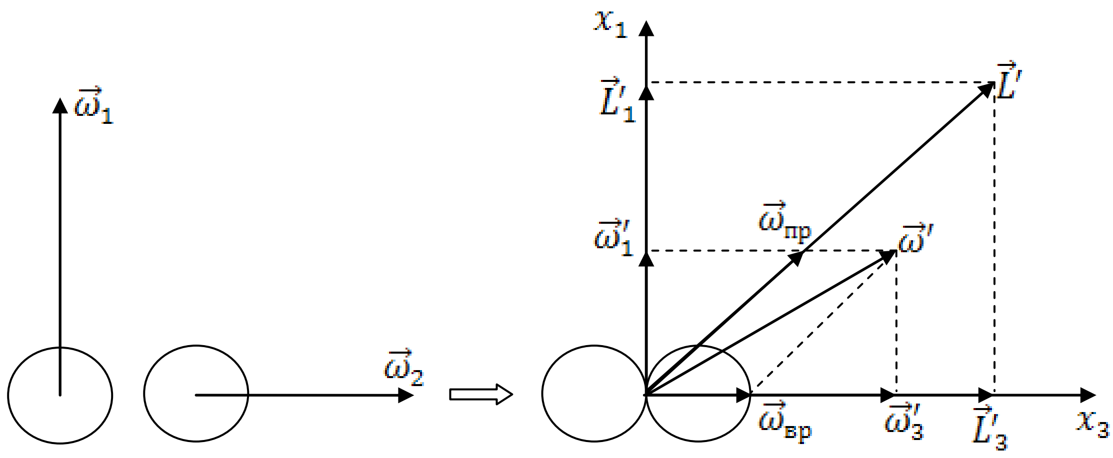
Задача 5. Два одинаковых шара радиуса R и массы m, вращающиеся с перпендикулярными друг другу угловыми скоростями $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$, жестко стыкуются. Внешние силы отсутствуют. Требуется определить угловые скорости прецессии $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ и вращения вокруг оси симметрии $\vec{\omega}_{\text{вр}}$ образовавшегося в результате стыковки шаров симметричного волчка, а также количество тепла, выделившееся при стыковке.

Дано: $R, m, \vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$

Найти: $\vec{\omega}_{\text{пр}}, \vec{\omega}_{\text{вр}}, Q$

При жесткой стыковке вращающихся шаров выполняется закон сохранения момента импульса, но не выполняется закон сохранения энергии. Момент импульса шаров до стыковки является векторной суммой собственных моментов $\vec{L}_1 = I_{\text{ш}}\vec{\omega}_1$ и $\vec{L}_2 = I_{\text{ш}}\vec{\omega}_2$:

θ



$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = I_ш \vec{\omega}_1 + I_ш \vec{\omega}_2.$$

Здесь $I_ш = \frac{2}{5} mR^2$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара. Согласно закону сохранения момента импульса

$$\vec{L} = \vec{L}' = const.$$

После стыковки шаров у нас появляется симметричный волчок, который будет вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}'$, не совпадающей по направлению с вектором $\vec{L}'$. Выберем систему координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, вращающуюся вместе с волчком (см. рисунок). Ось x_3 совместим с осью симметрии волчка, а ось x_1 направим перпендикулярно x_3 в плоскости, включающей вектор $\vec{L}'$. Эта система координат будет вращаться относительно направления вектора $\vec{L}'$. Поскольку оси x_1 и x_3 являются главными осями инерции, то проекции момента импульса на эти оси равны

$$L'_1 = I_1 \omega'_1,$$

$$L'_3 = I_3 \omega'_3.$$

Здесь $I_1 = 2(I_ш + mR^2) = (14/5) mR^2$ (по теореме Штейнера), $I_3 = 2I_ш = (4/5) mR^2$. ω'_1 и ω'_3 проекции угловой скорости $\vec{\omega}'$ на оси x_1 и x_3.

Для того чтобы установить некоторые полезные соотношения, запишем законы сохранения момента импульса и кинетической энергии для свободно вращающегося волчка:

$$L'^2 = L_1'^2 + L_3'^2 = I_1^2\omega_1'^2 + I_3^2\omega_3'^2 = const, \qquad (5.19)$$

$$T = \frac{I_1\omega_1'^2}{2} + \frac{I_3\omega_3'^2}{2} = \frac{L_1'^2}{2I_1} + \frac{L_3'^2}{2I_3} = const. \qquad (5.20)$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$T = \frac{L_1'^2}{2I_1} + \frac{L_3'^2}{2I_3} = \frac{L_1'^2}{2I_1} + \frac{L_3'^2}{2I_1} - \frac{L_3'^2}{2I_1} + \frac{L_3'^2}{2I_3} = \frac{L_1'^2 + L_3'^2}{2I_1} + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)L_3'^2 = const.$$

Поскольку первое слагаемое в последнем равенстве не меняется со временем (5.20), то, следовательно, не меняется со временем и проекция момента импульса на ось x_3: $L'_3 = const$. Из уравнения (5.20) следует, что $L'_1 = const$. Отсюда получаем

$$\omega_3' = \frac{L'_3}{I_3} = const,$$

$$\omega_1' = \frac{L'_1}{I_1} = const,$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_1'^2 + \omega_3'^2} = const.$$

Кроме того не будет изменяться в процессе движения угол θ, т.к.

$$\cos\theta = \frac{L'_3}{L'} = const.$$

Таким образом, движение волчка, состоящего из двух шаров, будет выглядеть так: волчок будет вращаться относительно оси симметрии с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_{\text{вр}}$, а сама эта ось будет поворачиваться с угловой скоростью $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ вокруг оси, совпадающей с направлением вектора $\vec{L}'$. При этом должно выполняться векторное равенство $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_{\text{вр}} + \vec{\omega}_{\text{пр}}$. Следовательно, угловая скорость волчка $\vec{\omega}'$ будет поворачиваться вокруг вектора $\vec{L}'$. Такое движение волчка называется регулярной прецессией. К таким же выводам можно прийти, решая динамические уравнения (5.17).

Разложим вектор $\vec{\omega}'$ на два вектора, один из которых параллелен $\vec{L}'$, а другой x_3. Для этого построим параллелограмм на этих осях (см. рисунок). Из рисунка видно, что

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{\omega_1'}{\sin\theta} = \frac{L_1'}{I_1}\frac{L'}{L_1'} = \frac{L'}{I_1}.$$

Для определения $\omega_{\text{вр}}$ запишем уравнение, следующее из рисунка

$$\omega_{\text{вр}} = \omega_3' - \omega_{\text{пр}}\cos\theta = \frac{L_3'}{I_3} - \frac{L'}{I_1}\cos\theta = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)L_3'.$$

Найдем L' и L_3'.

$$L' = L = \sqrt{I_{\text{ш}}^2\omega_1^2 + I_{\text{ш}}^2\omega_2^2} = I_{\text{ш}}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{2}{5}mR^2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_3'.$$

Если спроектировать последнее уравнение в начальный момент времени (момент стыковки) на вертикальную и горизонтальную оси, то получим

$$L_1 = L_1',$$

$$L_2 = L_3',$$

т.е. $L_1' = I_{\text{ш}}\omega_1 = (2/5)mR^2\omega_1$, $L_3' = I_{\text{ш}}\omega_2 = (2/5)mR^2\omega_2$.

Окончательно получаем

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{2mR^2 5}{5\cdot 14mR^2}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{1}{7}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

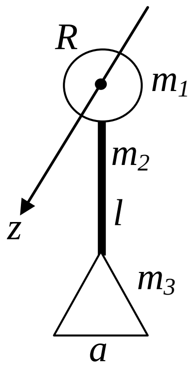
$$\omega_{\text{вр}} = \left(\frac{1}{(4/5)mR^2} - \frac{1}{(14/5)mR^2}\right)(2/5)mR^2\omega_2 = \frac{5}{14}\omega_2.$$

Чтобы рассчитать количество теплоты, выделившейся при стыковке шаров, надо вычислить их кинетические энергии до и после стыковки. Разность этих энергий составит ту энергию, которая выделится в виде теплоты.

$$Q = T - T' = \frac{I_ш\omega_1^2}{2} + \frac{I_ш\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1'^2}{2} - \frac{I_3\omega_3'^2}{2} = \frac{1}{5}mR^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{L_1'^2}{2I_1} - \frac{L_3'^2}{2I_3}$$
$$= \frac{1}{5}mR^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{[(2/5)mR^2\omega_1]^2}{2(14/5)mR^2} - \frac{[(2/5)mR^2\omega_2]^2}{2(4/5)mR^2}$$
$$= mR^2\left(\frac{6}{35}\omega_1^2 + \frac{1}{10}\omega_2^2\right).$$

Ответ: $\omega_{пр} = \frac{1}{7}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $\omega_{вр} = \frac{5}{14}\omega_2$, $Q = mR^2\left(\frac{6}{35}\omega_1^2 + \frac{1}{10}\omega_2^2\right)$.

Следующие задачи решите самостоятельно:



Задача 6. Тело, состоящее из диска радиуса R и массы m_1, стержня массы m_2 длины l и равностороннего треугольника массы m_3 со стороной a, способно вращаться относительно оси z. Найти момент инерции тела относительно оси вращения и закон вращения тела, если на него действует суммарный момент сил $M_z = \alpha - \beta t$, где α и β - константы. $\left(I_z = \frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{3}m_2l^2 + m_2R^2 + m_2Rl + \frac{1}{12}m_3a^2 + m_3\left(R + l + \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2,\right.$ $\left.\varphi(t) = \frac{\alpha}{2I_z}t^2 - \frac{\beta}{6I_z}t^3\right)$

Задача 7. Маховик с начальной угловой скоростью ω_0 начинает тормозиться силами, момент которых относительно его оси пропорционален квадратному корню из его угловой скорости. Найти среднюю угловую скорость маховика за все время торможения. $(\langle\omega\rangle = \omega_0/3)$

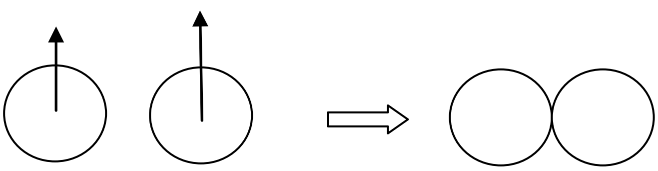
Задача 8. Однородный стержень длиной l = 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость v надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси? $(v \approx 7{,}1$ м/с$)$

Задача 9. Человек массы m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массы m_2, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ' относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека. $\left(\varphi = -\frac{2m_1}{m_2+2m_1}\varphi'\right)$

Задача 10. Однородный стержень массой m и длиной l висит горизонтально на двух вертикальных нитях, привязанных к его концам. Определить натяжение одной нити, если вторую перерезать. $(T_1 = mg/4)$

Задача 11. Два одинаковых шара радиуса R и массы m, вращающиеся с параллельными друг другу угловыми скоростями $\vec{\omega}_1 \uparrow\uparrow \vec{\omega}_2$, жестко стыкуются. Внешние силы отсутствуют. Требуется определить угловую скорость образовавшегося в результате стыковки шаров симметричного волчка, а также количество тепла, выделившееся при стыковке.

$\vec{\omega}_1$ $\vec{\omega}_2$



Тема 6: Движение материальной точки в центральном поле. Задача Кеплера

Законы Кеплера:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные времена описывает равные площади.

3. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}. \quad (6.1)$$

На основании этих законов Ньютон *получил закон всемирного тяготения*:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (6.2)$$

Здесь $\vec{F}_{12}$ – сила притяжения, действующая на материальную точку массой m_1 со стороны точки массой m_2, $\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, направленный от точки 1 к точке 2, $\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек определяется формулой

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (6.3)$$

Рассмотрим некоторые примеры применения этих формул.

Задача 1: Вычислить первую, вторую и третью космические скорости.

Дано: $R_з = 6370$ км, $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: v_1, v_2, v_3.

Первая космическая скорость v_1 – это скорость движения спутника по круговой орбите вблизи поверхности Земли. На спутник вблизи поверхности Земли действует сила притяжения со стороны Земли, которая является силой всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM_з}{R_з^2}.$$

С другой стороны, эта же сила является силой тяжести спутника

$$F = mg.$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$g = \gamma \frac{M_з}{R_з^2}.$$

Сила тяжести сообщает спутнику центростремительное ускорение

$$a_{цс} = \frac{v_1^2}{R_з},$$

которое приводит к движению спутника по круговой орбите с радиусом $R_з$.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$ma_{цс} = F.$$

Подставляя выражения для $a_{цс}$ и F, получим

$$m\frac{v_1^2}{R_з} = mg.$$

Отсюда получаем

$$v_1 = \sqrt{gR_з} = 7{,}9\ \frac{км}{с}. \qquad (6.4)$$

Вторая космическая скорость v_2 – это минимальная скорость спутника, при которой он покидает земную орбиту. Чтобы рассчитать v_2, используем закон сохранения энергии. Спутник обладает потенциальной энергией

$$U = -\gamma\frac{mM_з}{r}$$

и кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Полная энергия спутника является суммой потенциальной и кинетической

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM_з}{r} = const,$$

и сохраняется в процессе полета. При удалении спутника от Земли его скорость уменьшается. Поскольку потенциальная энергия спутника всегда отрицательна, полная энергия может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Если полная энергия спутника отрицательна, то существует такое максимальное расстояние r_{max}, при котором скорость спутника станет равной нулю, а полная энергия спутника будет потенциальной. При этом спутник не сможет покинуть земную орбиту и возвратится к Земле. Если полная энергия спутника положительна, то даже при $r \to \infty$ скорость спутника не обнуляется, и, таким образом, спутник покидает Землю. Следовательно, предельное значение полной энергии, при которой спутник покинет земную орбиту, определяется условием $E = 0$.

$$\frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM_з}{R_з} = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M_з}{R_з}} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}. \tag{6.5}$$

Третьей космической скоростью v_3 называется минимальная скорость спутника, при которой он может покинуть Солнечную систему, стартуя с Земли. Понятно, что стартовать с Земли надо по направлению движения Земли вокруг Солнца. Тогда нужно сообщить спутнику меньшую скорость, т.к. скорость Земли прибавится к скорости, набранной спутником относительно Земли. Рассчитаем сначала скорость спутника v_0, которую ему надо сообщить, чтобы он покинул Солнечную систему, стартуя с орбиты Земли вокруг Солнца, предполагая, что Земля не взаимодействует со спутником. Это делается аналогично тому, как мы рассчитывали вторую космическую скорость, только массу Земли надо заменить на массу Солнца, а $R_з$ - на радиус орбиты Земли вокруг Солнца r_0:

$$v_0 = \sqrt{2\gamma \frac{M_с}{r_0}} = 42{,}1\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Здесь $M_с = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг, $r_0 = 149{,}6 \cdot 10^6$ км.

Теперь учтем, что спутник стартует с Земли, которая сама имеет скорость движения по орбите $v_{Земли}$. Рассчитаем эту скорость. Это делается аналогично тому, как мы рассчитывали первую космическую скорость, только опять массу Земли надо заменить на массу Солнца, а $R_з$ - на радиус орбиты Земли вокруг Солнца r_0:

$$v_{\text{Земли}} = \sqrt{\gamma \frac{M_c}{r_0}} = 29{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Таким образом, если бы спутник не взаимодействовал с Землей, но при этом стартовал с поверхности Земли в направлении её движения, то, чтобы выйти за пределы Солнечной системы, он должен обладать скоростью относительно Земли

$$v_{\text{отн}} = v_0 - v_{\text{Земли}} = 12{,}3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Теперь учтем притяжение Земли, действующее на спутник. При старте с Земли спутник должен обладать третьей космической скоростью v_3. При этом он будет обладать кинетической энергией

$$T = \frac{mv_3^2}{2}.$$

Кроме того он будет обладать потенциальной энергией взаимодействия с Землей

$$U = -\gamma \frac{mM_з}{R_з}.$$

По мере удаления от Земли его кинетическая энергия будет уменьшаться, а, следовательно, будет уменьшаться его скорость относительно Земли. Однако, эта скорость не должна быть меньше $v_{\text{отн}}$, т.к. в противном случае спутник не сможет выйти за пределы Солнечной системы. Таким образом, кинетическая энергия спутника относительно Земли не должна быть меньше

$$T_{\text{отн}} = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2}.$$

Отсюда получаем условие

$$T + U = T_{\text{отн}},$$

или

$$\frac{mv_3^2}{2} - \gamma \frac{mM_з}{R_з} = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2}.$$

Выразим v_3:

$$v_3 = \sqrt{2\gamma \frac{M_з}{R_з} + v_{отн}^2} = \sqrt{2gR_з + v_{отн}^2} = \sqrt{v_2^2 + v_{отн}^2} = 16{,}7\ \frac{км}{с}. \quad (6.6)$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{gR_з} = 7{,}9\ \frac{км}{с}$, $v_2 = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2\ \frac{км}{с}$,

$v_3 = \sqrt{2gR_з + v_{отн}^2} = 16{,}7\ \frac{км}{с}$.

Задача 2. Доказать, что эллиптическая орбита в полярных координатах описывается уравнением $p = r(1 - e\cos\varphi)$, где p и e - постоянные. Начало отсчета совпадает с одним из фокусов эллипса.

Доказательство. Уравнение эллипса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Здесь a и b - полуоси эллипса.

Положение некоторой точки на эллипсе, с одной стороны, характеризуется координатами x и y, с другой – r и φ. Связь между этими величинами задается формулами

$$x = r\cos\varphi - x_0,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Отсюда получим

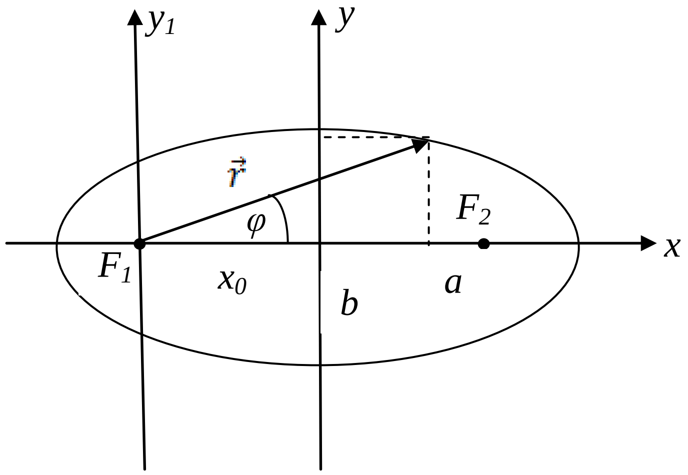
$$r^2 = (x + x_0)^2 + y^2.$$

Для y^2 получаем

$$y^2 = r^2 - (x + x_0)^2.$$

Подставим выражения для x и y в уравнение эллипса. После некоторых преобразований получим уравнение

$$r^2 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \cos^2\varphi - \frac{2rx_0}{a^2}\cos\varphi + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1.$$



По свойству эллипса (сумма расстояний от произвольной точки на эллипсе до его фокусов равна $2a$)

$x_0^2 = a^2 - b^2.$

Подставим это выражение в предыдущее уравнение и выделим полный квадрат:

$$-\left(r\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}\cos\varphi + \frac{b}{a}\right)^2 + 1 + \frac{r^2}{b^2} = 1.$$

Сокращая единицы и проведя тождественные преобразования, получим

$$r\left(1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\cos\varphi\right) = \frac{b^2}{a}.$$

Введем обозначения

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

В этих обозначениях уравнение примет вид

$p = r(1 - e\ \cos\varphi),$

что и требовалось доказать.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Период обращения Юпитера вокруг Солнца в 12 раз больше соответствующего периода для Земли. Считая орбиты планет круговыми, найти: а) во сколько раз расстояние от Юпитера до Солнца превышает расстояние от Земли до Солнца; б) скорость и ускорение Юпитера в гелиоцентрической системе отсчета. ($R_{Ю}/R_{З} \approx 5{,}24$; $v_{Ю} \approx 13{,}02$ км/с; $a_{Ю} \approx 0{,}216 \cdot 10^{-3}$ м/с^2)

Задача 4. Доказать, что сила тяготения, действующая на частицу *А* внутри однородного сферического слоя вещества, равна нулю.

Задача 5. Вычислить первую и вторую космические скорости для запусков с Луны. Сравнить с соответствующими скоростями для Земли.

Тема 7: Движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета

Если материальная точка движется в неинерциальной системе отсчета, то на неё кроме обычных сил действуют две силы инерции: *переносная сила*

$$\vec{F}_в = -m[\vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})], \qquad (7.1)$$

и *сила Кориолиса*

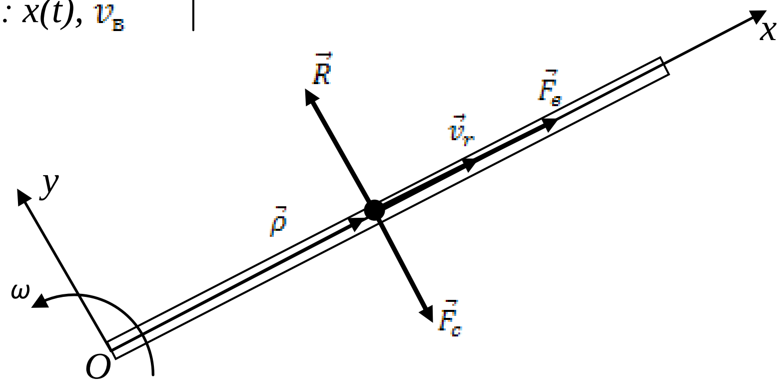
$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \qquad (7.2)$$

Здесь m - масса материальной точки, $\vec{a}_o$ – ускорение начала системы координат неинерциальной системы отсчета, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ - угловая скорость и угловое ускорение неинерциальной системы отсчета, $\vec{\rho}$ - радиус-вектор материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета, $\vec{v}_r$ - скорость материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета (относительная скорость).

Задача 1. Гладкая трубка вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из её концов с угловой скоростью ω. В середину трубки помещают небольшой груз с нулевой относительной скоростью. Найти закон движения груза относительно трубки. Какой скоростью будет обладать груз в момент вылета из трубки. Длина трубки l.

Дано: ω, $v_0 = 0$, l.
Найти: $x(t)$, $v_в$

Изобразим трубку с движущимся в ней грузом на ри-



сунке. Расставим действующие на груз силы.

На груз действуют следующие силы:

1. Сила тяжести $\vec{P}$, действующая перпендикулярно плоскости вращения трубки (на рисунке не показана).
2. Реакция трубки $\vec{N}$, направленная противоположно силе тяжести и компенсирующая её действие (на рисунке не показана).
3. Переносная сила инерции $\vec{F}_e$.
4. Кориолисова сила инерции $\vec{F}_c$, направленная перпендикулярно относительной скорости $\vec{v}_r$ и направлению угловой скорости $\vec{\omega}$. $\vec{\omega}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка на нас.
5. Реакция трубки $\vec{R}$, направленная противоположно силе Кориолиса и компенсирующая её действие.

Поскольку трубка гладкая, силы трения отсутствуют.

Запишем второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e + \vec{F}_c + \vec{R}.$$

Направим ось x вдоль трубки, как показано на рисунке. Рассмотрим переносную силу инерции

$$\vec{F}_e = -m[\vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})].$$

Поскольку начало координат неподвижно, то $\vec{a}_o = 0$. Кроме того $\vec{\varepsilon} = 0$, т.к. трубка вращается равномерно с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Таким образом, получаем

$$\vec{F}_e = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}).$$

По правилам определения векторного умножения эта сила будет направлена в положительном направлении оси x. Величина этой силы будет равна

$$F_e = m\omega^2 x,$$

т.к. $\vec{\omega}$ и $\vec{\rho}$ взаимно перпендикулярны и модуль ρ равен x. Именно эта сила заставляет груз двигаться вдоль трубки.

Теперь спроектируем уравнение Ньютона на ось x.

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x.$$

Все остальные силы перпендикулярны оси x и, к тому же, компенсируют друг друга. Сокращая на m, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0.$$

Решаем его методом характеристического уравнения. Решение ищем в виде

$$x = e^{\lambda t}.$$

Возьмем вторую производную и подставим в уравнение.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Для λ получаем

$$\lambda = \pm\omega.$$

Общее решение дифференциального уравнения запишем в виде

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий задачи:

$$x(0) = \frac{l}{2};$$

$v_r(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Получаем систему алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} \dfrac{l}{2} = C_1 + C_2, \\ 0 = C_1 - C_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$C_1 = C_2 = \frac{l}{4}.$$

Таким образом, закон движения груза имеет вид

$$x = \frac{l}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Найдем относительную скорость движения груза в момент вылета из трубки. В этот момент времени $t_в$ координата x груза будет равна длине труби l, поэтому получим систему уравнений

$$\begin{cases} l = \dfrac{l}{4}(e^{\omega t_в} + e^{-\omega t_в}), \\ v_{rв} = \dfrac{\omega l}{4}(e^{\omega t_в} - e^{-\omega t_в}). \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$v_{rв} = \frac{\sqrt{3}\omega l}{2}.$$

Однако в задаче требуется найти скорость груза в момент вылета из трубки, т.е. абсолютную скорость груза или скорость груза относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Кроме относительной скорости $v_{rв}$ груз обладает также переносной скоростью $v_{eв} = \omega l$, с которой он движется вместе с трубкой перпендикулярно оси x (по оси y). Складывая эти две скорости геометрически (по теореме Пифагора), получим

$$v_в = \sqrt{v_{rв}^2 + v_{eв}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\omega l}{2}\right)^2 + (\omega l)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\omega l.$$

Ответ: $x(t) = \frac{l}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$, $v_в = \frac{\sqrt{7}}{2}\omega l$.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 2. Шероховатая трубка вращается в космическом корабле вокруг оси, проходящей через один из её концов с угловой скоростью ω. В середину трубки помещают небольшой груз с нулевой относительной скоростью. Найти закон движения груза относительно трубки. Длина трубки l. Коэффициент трения груза о трубку равен f. Рассмотреть предел $f \to 0$.
$\left(x(t) = \frac{l}{4\sqrt{f^2+1}} e^{f\omega t}\left[f\left(e^{-\omega\sqrt{f^2+1}t} - e^{\omega\sqrt{f^2+1}t}\right) + \sqrt{f^2+1}\left(e^{\omega\sqrt{f^2+1}t} + e^{-\omega\sqrt{f^2+1}t}\right)\right]\right)$

Задача 3. В поезде к потолку вагона подвешен груз. На какой угол отклонится груз, если поезд начнет двигаться с ускорением a = 0,5 м/с^2. Определить натяжение нити, если масса груза m = 100 г. $(\alpha \approx 2{,}92^\circ)$

Тема 8: Кинематика специальной теории относительности

В специальной теории относительности координаты и время точечного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета (K-системы) к другой (K'-системе), движущейся относительно первой с постоянной скоростью u, направленной по оси x, изменяются согласно *преобразованиям Лоренца*

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z, \qquad (8.1)$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Следствиями из преобразований Лоренца являются:

1. *Относительность одновременности.* Если в одной системе отсчета два события происходят одновременно, то в другой системе отсчета разница во времени между ними будет равна

$$\Delta t' = -\frac{\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (8.2)$$

2. *Сокращение расстояний.* Если какое-либо тело в одной системе отсчета покоится и его длина вдоль оси x равно l_0, то в другой системе, движущейся относительно первой с постоянной скоростью u, направленной по оси x, его длина будет меньше

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (8.3)$$

3. *Замедление времени.* Если в одной системе отсчета время между двумя последовательными событиями составляет τ_0 по часам, связанным с этой системой отсчета, то в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с постоянной скоростью u, это время, отмеренное по своим часам, будет больше

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (8.4)$$

4. *Релятивистское сложение скоростей.* Если в одной системе отсчета материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = \left(v_x,\ v_y, v_z\right)$, то в другой системе отсчета компоненты скорости определяются по формулам

$$v_x' = \frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}},$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}, \qquad (8.5)$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}.$$

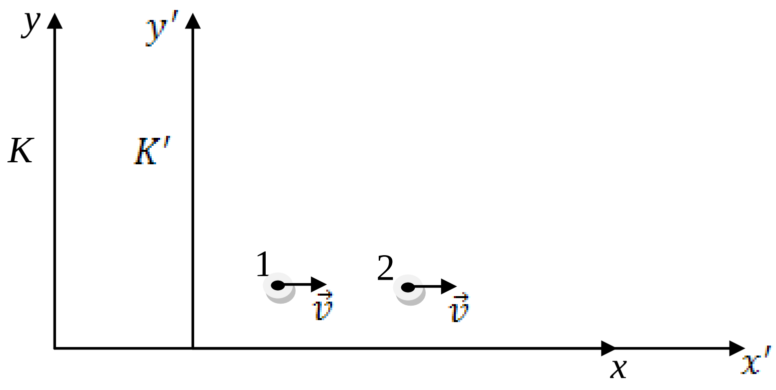
Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 1. Две нестабильные частицы движутся в *K*-системе отсчета по некоторой прямой в одном направлении со скоростью $v = 0{,}99c$. Расстояние между ними в этой системе отсчета l = 120 м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в системе отсчета, связанной с ними. Какой промежуток времени между моментами распада обеих частиц наблюдали в *K*-системе? Какая частица распалась позже в *K*-системе?

Дано: $v = 0{,}99c$, l = 120 м.

Найти: Δt.

Направим ось *x* *K*-системы отсчета по направлению движения частиц. K'-систему отсчета свяжем с движущимися частицами. Тогда скорость K'-системы относительно *K*-системы будет равна v $(u = v)$.



В K'-системе частицы покоятся и распадаются одновременно, т.е. $\Delta t' = 0$. По условию задачи расстояние между точками в *K*-системе равно l, т.е. $\Delta x = l$. Запишем преобразования Лоренца для времени

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Это преобразование выражает время события в системе K' через время этого события в системе K. В нашей задаче требуется найти промежуток времени, прошедший между распадами частиц в системе K, поэтому надо переписать преобразование Лоренца так, чтобы оно переводило время из системы K' в систему K (обратное преобразование Лоренца). Это можно сделать, если заметить что система K движется относительно K'-системы с той же скоростью u, но в противоположную сторону. Следовательно, чтобы получить обратное преобразование Лоренца, надо в прямом преобразовании поменять x на x', t на t' и t' на t и изменить u на $-u$. Получим

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{8.6}$$

Т.к. $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t' = t_2' - t_1'$, $\Delta x' = x_2' - x_1'$, получим

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Поскольку $\Delta t' = 0$ и $u = v$,

$$\Delta t = \frac{\frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Расстояние между частицами в K'-системе будет больше, чем в K-системе (релятивистское сокращение длины):

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Учитывая это, получаем

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}l}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 19{,}9\ (\text{мкс}).$$

Так как $\Delta t > 0$, то $t_2 > t_1$, т.е. вторая частица распадается позже.

Ответ: $\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}l}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 19{,}9$ мкс; позже распадается частица, которая движется последней.

Задача 2. Протон движется со скоростью, равной 0,8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0,9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга?

Дано: $v_p = 0{,}8c$, $v_e = 0{,}9c$.
Найти: v.

Перейдем в систему отсчета, связанную с протоном. Ось *x* направим по направлению движения протона. В этой системе отсчета скорость протона будет равной нулю, а электрон будет двигаться в противоположную сторону направления оси *x*. Используем формулу релятивистского сложения скоростей

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}.$$

В этой формуле $v_x' = v_e' = v$, $v_x = -v_e$, $u = v_p$. Отсюда получаем

$$v = \frac{-v_e - v_p}{1+\frac{uv_p}{c^2}} = -0{,}9884c.$$

Знак минус показывает, что частицы движутся навстречу друг другу. Модуль относительной скорости равен

$$v = 0{,}9884c = 2{,}97 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v = 0{,}9884c = 2{,}97 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Космическая ракета движется с большой относительной скоростью. Релятивистское сокращение её длины составило 36 %. Определить скорость движения ракеты. $(v \approx 2{,}3 \cdot 10^8\ \text{м/с})$

Задача 4. Прямоугольный брусок со сторонами 3,3 и 6,9 см движется параллельно большому ребру. При какой скорости движения прямоугольный брусок превратится в куб? Как скажется движение на объеме тела? $(v \approx 2{,}63 \cdot 10^8\ \text{м/с})$

Задача 5. В *К*-системе отсчета мюон, движущийся со скоростью $v = 0{,}99c$, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние l = 3 км. Определить: а) собственное время жизни этого мюона; б) расстояние, которое пролетел мюон в *К*-системе отсчета с «его точки зрения». $(\tau_0 \approx 1{,}4\ \text{мкс}; l_0 \approx 0{,}42\ \text{км})$

Задача 6. Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке $\Delta x_1 = 4$ м. Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по этой же линейке $\Delta x_2 = 9$ м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки. $(l_0 = 6\ \text{м}; v \approx 2{,}2 \cdot 10^8\ \text{м/с})$

Тема 9: Энергия и импульс в специальной теории относительности

Импульс материальной точки в теории относительности определяется выражением

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.1)$$

Здесь m_0 - масса материальной точки, $\vec{v}$ - её скорость.

Полная энергия материальной точки задается формулой

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.2)$$

Она состоит из энергии покоя материальной точки

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (9.3)$$

и кинетической энергии

$$T = E - E_0. \qquad (9.4)$$

Таким образом, релятивистское выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (9.5)$$

Импульс и энергия материальной точки в релятивистской механике связаны выражением

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \qquad (9.6)$$

При переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую импульс и энергия изменяются согласно преобразованиям Лоренца

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$p'_y = p_y,$$

$$p'_z = p_z, \qquad (9.7)$$

$$E' = \frac{E - u p_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Определить импульс электрона, обладающего кинетической энергией 5 МэВ.

Дано: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг,

$T = 5$ МэВ $= 8 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: p.

Запишем связь между энергией и импульсом в виде

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2.$$

С другой стороны,

$$E = T + E_0.$$

Отсюда получаем

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{E_0^2 + 2E_0T + T^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{T(2E_0 + T)}}{c} =$$

$$= 2{,}93 \cdot 10^{-21} \left(\frac{\text{кг м}}{\text{с}}\right).$$

Ответ: $p = \frac{\sqrt{T(2E_0 + T)}}{c} = 2{,}93 \cdot 10^{-21} \left(\frac{\text{кг м}}{\text{с}}\right)$.

Задача 2. Релятивистская частица с массой m_0 и кинетической энергией T налетает на покоящуюся частицу с той же массой. Найти массу и скорость составной частицы, образовавшейся в результате соударения.

Дано: $m_1 = m_2 = m_0,\ T_1 = T, T_2 = 0$.

Найти: m, v

Запишем законы сохранения импульса и энергии в релятивистской форме

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}', \\ E_1 + E_2 = E'. \end{cases}$$

Так как $\vec{p}_2 = 0$, $E_2 = m_0c^2$, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{m_0 v_1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} = \dfrac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ m_0c^2 + T + m_0c^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Выразим v_1 через T.

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} - 1\right),$$

$$v_1 = c\frac{\sqrt{\left(2+\dfrac{T}{m_0c^2}\right)\dfrac{T}{m_0c^2}}}{1+\dfrac{T}{m_0c^2}}.$$

Учитывая последнее уравнение, решаем систему

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{2m_0c^2}{T}}},$$

$$m = \sqrt{2m_0\left(2m_0 + \frac{T}{c^2}\right)}.$$

Ответ: $v = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{T}}}$, $m = \sqrt{2m_0\left(2m_0+\frac{T}{c^2}\right)}$.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Энергия фотона в K-системе отсчета равна ε. Найти энергию ε' этого фотона в K'-системе, перемещающейся со скоростью u относительно K-системы в направлении движения фотона. При каком значении u энергия $\varepsilon' = \varepsilon/2$? $\left(\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}};\, u = \frac{3}{5}c\right)$

Задача 4. Нейтрон с кинетической энергией $T = 2m_0c^2$, где m_0 - его масса, налетает на другой, покоящийся нейтрон. Найти в системе их центра масс: а) суммарную кинетическую энергию T_c нейтронов; б) импульс p_c каждого нейтрона. ($T_c = 777$ МэВ; $p_c = 940$ МэВ$/c$)

Задача 5. Неподвижная частица массы *M* распадается на две частицы с массами m_1 и m_2. Определить энергии и скорости продуктов распада.

Тема 10: Распад и рассеяние нерелятивистских и релятивистских частиц. Импульсные диаграммы

Задачи на рассеяние как релятивистских, так и нерелятивистских частиц можно рассматривать в *лабораторной системе отсчета* (ЛСО) и в *системе отсчета центра инерции* (СЦИ). Часто удобно решать задачу в СЦИ, а затем пересчитывать скорости частиц после столкновения в ЛСО.

Постановка задачи о рассеянии в ЛСО выглядит так: частица с массой m_1 движется со скоростью $\vec{v}_1$ и налетает на неподвижную частицу с массой m_2, имея некоторый прицельный параметр *b*. В результате столкновения они приобретают скорости $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$.

В СЦИ этот процесс выглядит так: две частицы с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу с одинаковыми по величине и противоположными по направлению импульсами $\vec{p}_{1c} = -\vec{p}_{2c}$. После столкновения их импульсы остаются равными и противоположными, но меняют направление по отношению к первоначальному.

Рассмотрим упругое столкновение двух нерелятивистских частиц в СЦИ. Так как кинетическая энергия сталкивающихся частиц сохраняется, то

$$\frac{m_1v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2v_{2c}^2}{2} = \frac{m_1v_{1c}'^2}{2} + \frac{m_2v_{2c}'^2}{2}, \qquad (10.1)$$

или

$$\frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_2} = \frac{p_{1c}'^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}'^2}{2m_2}. \qquad (10.2)$$

Поскольку в системе центра инерции

$p_{1c}^2 = p_{2c}^2,$

$p_{1c}'^2 = p_{2c}'^2,$

то

$$p_{1c}^2\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = p_{1c}'^2\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right). \qquad (10.3)$$

Следовательно,

$$|p_{1c}| = |p_{1c}'|$$

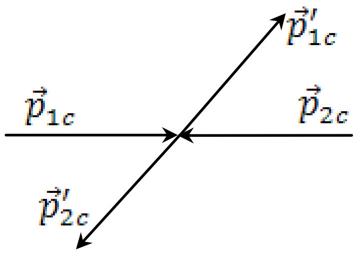
и

$$|p_{1c}| = |p_{2c}| = |p_{1c}'| = |p_{2c}'|.$$

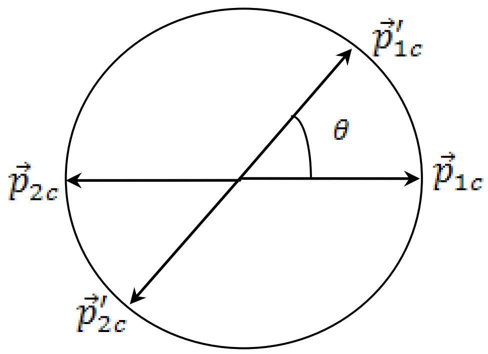
Так как суммарный импульс двух частиц после столкновения равен нулю, то

$$\vec{p}_{1c}' = -\vec{p}_{2c}'.$$

Изобразим процесс столкновения этих частиц в виде диаграммы векторов (*векторной диаграммы*).



или



Мы видим, что концы всех векторов импульсов лежат на окружности. Угол θ зависит от прицельного параметра b и законами сохранения не определяется.

Для того чтобы найти импульсы частиц после соударения в лабораторной системе координат, необходимо рассчитать их скорости $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ в соответствии с преобразованиями Галилея. Так как скорость центра масс в процессе столкновения не изменяется, то преобразование Галилея сводится к прибавлению скорости центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{-\vec{p}_{2c}}{m_2} = \frac{\vec{p}_{1c}}{m_2}$$

к скоростям $\vec{v}'_{1c}$ и $\vec{v}'_{2c}$. Отсюда получим

$$\vec{p}'_1 = m_1(\vec{v}'_{1c} + \vec{v}_c) = \vec{p}'_{1c} + \frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}, \qquad (10.4)$$

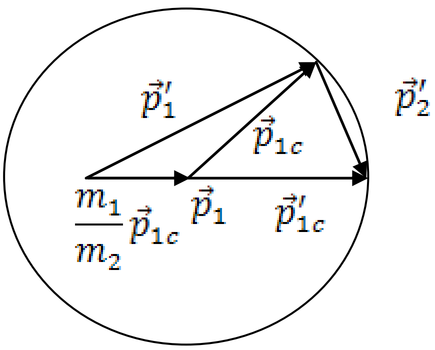
$$\vec{p}'_2 = m_2(\vec{v}'_{2c} + \vec{v}_c) = \vec{p}'_{2c} - \vec{p}_{2c} = \vec{p}_{1c} - \vec{p}'_{1c}. \qquad (10.5)$$

Построим импульсные диаграммы для этого столкновения в лабораторной системе отсчета. В соответствии с законом сохранения импульса в ЛСО имеем

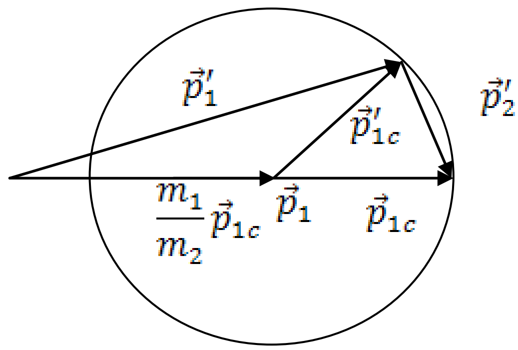
$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2. \qquad (10.6)$$

Отложим импульс первой частицы $\vec{p}_1$ до столкновения. Подставляя (10.4) и (10.5) в (10.6), получаем

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{1c} + \frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}.$$



$m_1 < m_2$



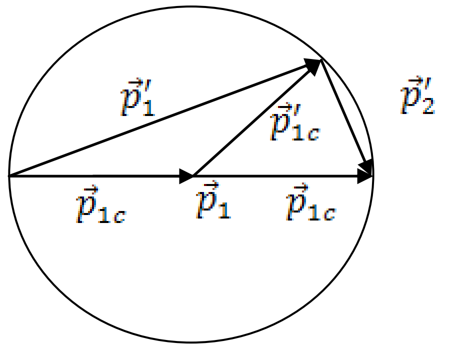
$m_1 > m_2$

Отложим на векторе $\vec{p}_1$ сначала вектор $\frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}$, а затем вектор $\vec{p}_{1c}$. Импульс первой после столкновения $\vec{p}'_{1c}$ отложим от начала импульса $\vec{p}_{1c}$. Так как эти векторы равны по модулю, то через их концы можно провести окружность с центром в начале. Вектор $\vec{p}_1'$, согласно (10.4), является векторной суммой $\frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}$ и $\vec{p}_{1c}'$, и его конец будет лежать на этой окружности. Вектор $\vec{p}_2'$ будет замыкать треугольники в соответствии с (10.6) и (10.5).

Приведенные импульсные диаграммы позволяют быстро решать некоторые задачи теории рассеяния нерелятивистских частиц. Приведем примеры.

Задача 1. Покажите, что при $m_1 = m_2$ угол разлета частиц, т.е. угол между векторами $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$, равен 90°.

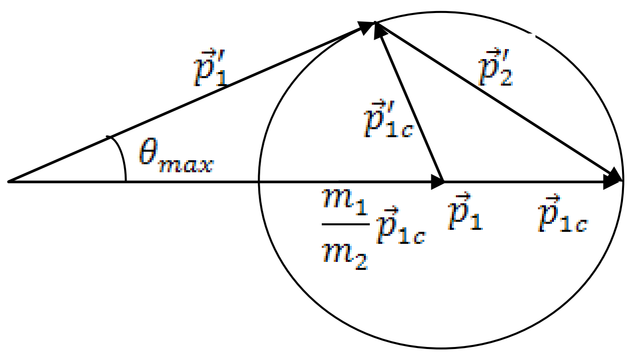
Доказательство. Построим импульсную диаграмму, учитывая, что вектор



$\frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c} = \vec{p}_{1c}$. Мы видим, что вектор $\vec{p}_1$ является диаметром окружности, в которую вписан треугольник, состоящий из векторов $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ и $\vec{p}_1$. Т. к. этот треугольник опирается на диаметр, то угол между его сторонами прямой, т.е. угол между векторами $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$ равен 90°. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Показать, что при $m_1 > m_2$ существует предельный угол вылета налетающей частицы в ЛСО. Определите этот угол.

Решение. Построим импульсную диаграмму для случая $m_1 > m_2$ так, чтобы вектор $\vec{p}_1'$ был направлен по касательной к окружности. Угол между $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_1$



является углом вылета налетающей частицы и, в данном случае, он будет максимально возможным. Значение этого угла определяется выражением

$$\sin\theta_{max} = \frac{|\vec{p}\,'_{1c}|}{\left|\frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}\right|} = \frac{|\vec{p}_{1c}|}{\left|\frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{1c}\right|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Ответ: $\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$.

Рассмотренные здесь импульсные диаграммы могут после некоторых модификаций применяться как для неупругих столкновений нерелятивистских частиц, так и для упругих столкновений релятивистских частиц.

Следующие задачи рекомендуется решить на практических занятиях под руководством преподавателя.

Задача 3. α-частица, летящая со скоростью v_0, испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и отлетает под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс m_α и $M_я$ это возможно? Определите скорости -частицы и ядра после столкновения. Определите угол, который составляет скорость ядра после столкновения к скорости -частицы до столкновения.

Задача 4. Частица массы m неупруго сталкивается с частицей массы M ($m < M$) и отклоняется на угол 90°. При этом в СЦИ теряется доля $1-\alpha^2$ первоначальной кинетической энергии. Чему равен угол вылета частицы отдачи, покоившейся до столкновения. $\left(tg\theta = \frac{\sqrt{\alpha^2 M^2 - m^2}}{M+m}\right)$

Задача 5. Частица, движущаяся со скоростью v_0, распадается «на лету» на две частицы с массами m_1 и m_2. Определить связь между углами вылета последних и их энергиями.

Тема 11: Уравнение состояния идеального газа. Первое начало термодинамики

Идеальным газом называется газ, суммарный объем всех молекул которого много меньше объема, занимаемого газом, и взаимодействием молекул газа друг с другом можно пренебречь. Опыт показывает, что многие газы (водород, кислород, азот и др.) при нормальных условиях являются идеальными. Состояние идеального газа описывается макроскопическими параметрами: объемом V, давлением p и температурой T. Уравнение, связывающее эти параметры между собой, называется уравнением состояния. Уравнением состояния для идеального газа является уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \tag{11.1}$$

Здесь m - масса газа, μ - молярная масса газа, $R = 8{,}31\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ - универсальная газовая постоянная.

Для смесей идеального газа выполняется закон Дальтона: давление смеси газов p равно сумме парциальных давлений, т.е. сумме давлений, которые создают порции газа, составляющие смесь, если бы они находились в сосуде по отдельности:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots \tag{11.2}$$

Первое начало термодинамики записывается в виде

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{11.3}$$

и, по-существу, является законом сохранения энергии в термодинамике. В этом уравнении δQ - количество теплоты, полученное термодинамической системой, dU - изменение внутренней энергии системы, δA – работа, совершаемая системой против внешних сил. Для идеального газа изменение внутренней энергии определяется выражением

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\, dT, \tag{11.4}$$

где i - число степеней свободы молекулы газа, dT - изменение температуры газа. Число степеней свободы зависит от того, сколько атомов содержит молекула газа. Для жестких молекул

$i = 3$ для одноатомных молекул,

$i = 5$ для двухатомных молекул,

$i = 6$ для многоатомных молекул (кроме линейных).

Работа в термодинамике выражается формулой

$$\delta A = p\, dV, \tag{11.5}$$

где dV - изменение объема системы. Интегрируя это выражение от начального состояния газа до конечного, можно получить выражение для работы при различных термодинамических процессах. Так для изотермического процесса работа равна

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT\, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{11.6}$$

Определим удельную (c) и молярную (C) теплоемкости тела:

$$c = \frac{\delta Q}{m\, dT}, \tag{11.7}$$

$$C = \frac{\delta Q}{\nu\, dT}. \tag{11.8}$$

$\nu = \frac{m}{\mu}$ – количество вещества в молях. Для газов различают теплоемкость при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_P. Для идеальных газов молярные теплоемкости C_V и C_P даются формулами:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \tag{11.9}$$

$$C_P = \frac{i+2}{2} R. \tag{11.10}$$

Адиабатическим процессом называется термодинамический процесс, протекающий без теплообмена между системой и внешней средой ($\delta Q = 0$). Термодинамические параметры адиабатического процесса связаны между собой уравнением Пуассона:

$$pV^{\gamma} = const, \tag{11.11}$$

или

$$TV^{\gamma-1} = const. \qquad (11.12)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} \qquad (11.13)$$

показатель адиабаты.

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

Задача 1. В сосуде объемом 2 м^3 находится смесь 4 кг гелия и 2 кг водорода при температуре 27° С. Определить давление и молярную массу смеси газов.

Дано: V = 2 м^3, $m_{He} = 4$ кг, $m_{H_2} = 2$ кг, t = 27° С

Найти: p, μ

Чтобы вычислить давление смеси гелия и водорода, необходимо применить закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2.$$

Здесь p_1 и p_2 - парциальное давление гелия и водорода соответственно. Парциальные давления можно рассчитать по закону Клапейрона - Менделеева:

$$p_1 V = \frac{m_{He}}{\mu_{He}} RT,$$

$$p_2 V = \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} RT.$$

Складывая эти уравнения и используя закон Дальтона, получим

$$(p_1 + p_2)V = \left(\frac{m_{He}}{\mu_{He}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}\right) RT,$$

или

$$pV = \left(\frac{m_{He}}{\mu_{He}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}\right) RT.$$

С другой стороны, для смеси газов мы можем также написать уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Здесь $m = m_{He} + m_{H_2}$ - масса смеси, μ - эффективная молярная масса смеси.

Сравнивая последние два уравнения, получаем

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_{He}}{\mu_{He}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}.$$

Отсюда вычислим μ:

$$\mu = \frac{m_{He} + m_{H_2}}{\frac{m_{He}}{\mu_{He}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}}.$$

Учитывая, что молярные массы гелия и водорода равны

$$\mu_{He} = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$

$$\mu_{H_2} = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$

получаем

$$\mu = 3 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Для давления из уравнения Клапейрона – Менделеева получаем

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}.$$

Учитывая, что $T = t + 273 = 300\,K$, рассчитываем давление смеси:

$p = 24{,}93 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $\mu = 3 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, $p = 24{,}93 \cdot 10^5$ Па.

Задача 2. Определить удельные теплоемкости c_p, c_V для смеси 1 кг азота и 1 кг гелия.

Дано: $m_{N_2} = 1$ кг,, $m_{He} = 1$ кг,	По определению
Найти: c_p, c_V	

Здесь δQ_V - количество теплоты, переданное смеси газов в процессе нагревания при постоянном объеме, $m = m_{N_2} + m_{He}$ - масса смеси, dT - изменение температуры смеси при нагревании.

Согласно первому началу термодинамики,

$$\delta Q_V = dU_V + \delta A_V,$$

где dU_V - изменение внутренней энергии смеси при постоянном объеме, δA_V – работа, которую совершает данная смесь газов против внешних сил при неизменном объеме.

Поскольку смесь считается идеальным газом, то

$$dU_V = dU_{VN_2} + dU_{VHe} = \frac{i_{N_2}}{2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} R\,dT + \frac{i_{He}}{2}\frac{m_{He}}{\mu_{He}} R\,dT$$
$$= \frac{1}{2}\left(i_{N_2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + i_{He}\frac{m_{He}}{\mu_{He}}\right) R\,dT,$$

$$\delta A_V = p\,dV = 0 \text{ (объём постоянен).}$$

Здесь

$i_{N_2} = 5$ (двухатомный газ),

$i_{He} = 3$ (одноатомный газ),

$\mu_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$,

$\mu_{He} = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Учитывая, что $m = m_{N_2} + m_{He}$, получим

$$c_V = \frac{dU_V}{m\,dT} = \frac{\frac{1}{2}\left(i_{N_2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + i_{He}\frac{m_{He}}{\mu_{He}}\right) R\,dT}{\left(m_{N_2} + m_{He}\right)dT} = \frac{i_{N_2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + i_{He}\frac{m_{He}}{\mu_{He}}}{m_{N_2} + m_{He}}\frac{R}{2}$$
$$= 1{,}93 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}.$$

Аналогично рассчитаем c_P.

$$c_P = \frac{\delta Q_P}{m\,dT}.$$

$$\delta Q_P = dU_P + \delta A_P.$$

Изменение внутренней энергии рассчитывается так же, как и при постоянном объеме:

$$dU_P = dU_{PN_2} + dU_{PHe} = \frac{i_{N_2}}{2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}R\,dT + \frac{i_{He}}{2}\frac{m_{He}}{\mu_{He}}R\,dT$$
$$= \frac{1}{2}\left(i_{N_2}\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + i_{He}\frac{m_{He}}{\mu_{He}}\right)R\,dT.$$

Работа смеси при постоянном давлении определяется с помощью уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$\delta A_P = p\,dV = \frac{m}{\mu}R\,dT = \left(\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}}\right)R\,dT.$$

В последнем равенстве мы воспользовались результатом предыдущей задачи. Окончательно получаем

$$c_P = \frac{\left(i_{N_2}+2\right)\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \left(i_{He}+2\right)\frac{m_{He}}{\mu_{He}}}{m_{N_2}+m_{He}}\frac{R}{2} = 3{,}12\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}.$$

Ответ: $c_V = 1{,}93\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$, $c_P = 3{,}12\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$.

Следующие задачи решите самостоятельно:

Задача 3. В сосуде емкостью 8,3 л находится воздух при нормальном давлении и температуре 300 К. В сосуд вводят 3,6 г воды и закрывают крышкой. Определить давление в сосуде при 400 К, если вся вода при этой температуре превращается в пар. ($p = 2{,}15\cdot 10^5$ Па)

Задача 4. Азот массой 2 кг охлаждают при постоянном давлении от 400 до 300 К. Определить изменение внутренней энергии, внешнюю работу и количество выделенной теплоты. ($\Delta U = -148$ кДж; $A = -59{,}4$ кДж; $Q = -207{,}4$ кДж)

Задача 5. Молекулярный пучок кислорода ударяется о неподвижную стенку. После соударения молекулы отражаются от стенки с той же по модулю скоростью. Определить давление пучка на стенку, если скорость молекул 500 м/с и концентрация молекул в пучке $5 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$. ($p = 1{,}33 \cdot 10^5$ Па)

Задача 6. Газовая смесь состоит из азота массой 2 кг и аргона массой 1 кг. Принимая эти газы за идеальные, определить удельные теплоемкости c_V и c_P газовой смеси. ($c_V = 599$ Дж/(кг · К); $c_P = 866$ Дж/(кг · К))

Задача 7. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и количество теплоты Q, переданное газу. Построить график процесса. ($\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 0{,}4$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж)

Тема 12: Цикл Карно. Энтропия. Второе начало термодинамики

Особое значение в термодинамике имеют *циклические процессы*. Это процессы, в которых термодинамическая система получает некоторое количество теплоты Q_1 от одного тела – нагревателя, а затем отдает часть этой теплоты Q_2 другому телу – холодильнику. В результате такого процесса система возвращается в исходное состояние и совершает работу против внешних сил A. Устройство, работа которого связана с таким циклическим процессом, называется *тепловой машиной*. *Коэффициент полезного действия* тепловой машины (кпд) определяется формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1} 100\% = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} 100\%, \qquad (12.1)$$

или

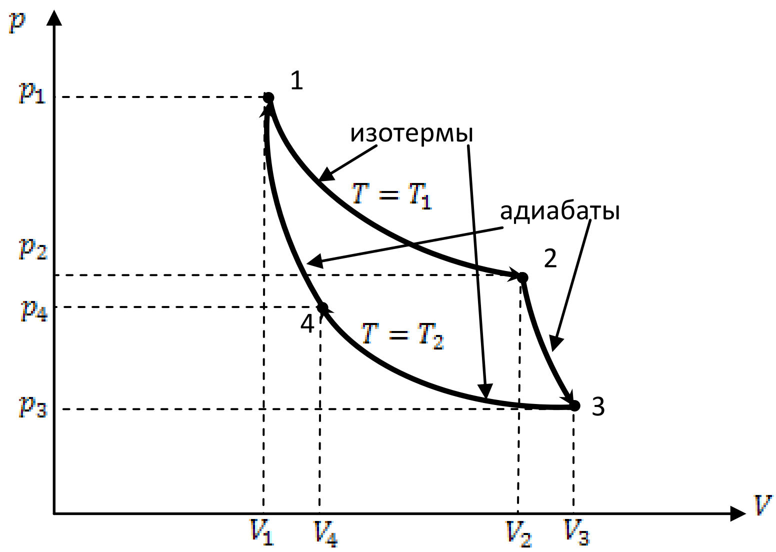
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (12.2)$$

Если все процессы, составляющие циклический процесс являются обратимыми, то такая тепловая машина называется идеальной. Идеальная машина обладает максимально возможным кпд среди всех тепловых машин, работающих при тех же условиях. Особое место среди идеальных тепловых машин имеет машина, построенная *на цикле Карно*. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).

При изотермическом процессе 1 → 2 происходит передача теплоты Q_1 от нагревателя рабочему телу (например, идеальному газу) машины Карно при температуре T_1. На участке 3 → 4 происходит передача теплоты Q_2 холодильнику при температуре T_2. Кпд машины Карно дается выражением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (12.3)$$

Если тепловую машину запустить в обратном направлении, то на участке 4 → 3 будет происходить передача теплоты от холодильника, а на участке 2 → 1 – передача теплоты нагревателю, при этом внешние силы будут совершать работу над рабочим телом машины. Такую машину называют *холодильной*.



Эффективность холодильной машины определяется отношением теплоты, отнятой у холодильника за один цикл, к работе внешних сил, совершенной над рабочим телом машины за этот цикл:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A}. \tag{12.4}$$

Изменение энтропии dS, которая является функцией состояния системы, определяется выражением

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \tag{12.5}$$

где δQ - количество теплоты, переданное системе в обратимом процессе, T - её температура. Если состояние системы изменяется от некоторого состояния 1 к состоянию 2, то изменение энтропии определяется интегралом

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{12.6}$$

Второе начало термодинамики имеет несколько эквивалентных формулировок, одной из которых является утверждение, что *энтропия в замкнутой термодинамической системе возрастает (необратимые процессы) или остается постоянной (обратимые процессы)*:

$$\Delta S \geq 0. \tag{12.7}$$

Рассмотрим некоторые примеры решения задач.

Задача 1. Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл.

Дано: газ O_2, m =1 кг, $V_2 = 2V_1$, A_{23} =3000 Дж

Найти: A

Работа, совершенная тепловой машиной за цикл, определяется суммой работ, совершенных на каждом участке цикла:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}.$$

Так как процессы 1 → 2 и 3 → 4 являются изотермическими, происходящими при температурах T_1 и T_2, то работы на этих участках вычисляются согласно уравнениям

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} R\, T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} R\, T_2 ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right).$$

Процессы 2 → 3 и 4 → 1 являются адиабатическими. При адиабатическом процессе работа совершается только за счет изменения внутренней энергии системы, поэтому

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\, (T_1 - T_2),$$

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\, (T_2 - T_1).$$

Подставляя все полученные выражения в выражение для полной работы, получаем

$$A = A_{12} + A_{34} = \frac{m}{\mu} R \left[T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + T_2 ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)\right].$$

Используем уравнения Пуассона для адиабатических процессов 2 → 3 и 4 → 1:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Разделив эти уравнения друг на друга, получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Используя это уравнение, полную работу представим в виде

$$A = \frac{m}{\mu} R\, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_1 - T_2).$$

Разность температур $T_1 - T_2$ выразим через работу A_{23}:

$$T_1 - T_2 = \frac{A_{23}}{\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее, окончательно получаем

$$A = \frac{2}{i}\ ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)A_{23}.$$

Учитывая, что для двухатомного газа $i = 5$, вычисляем работу, совершенную газом за цикл:

$$A = \frac{2}{5}\ ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right)A_{23} = 831{,}6\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 831{,}6$ Дж.

Задача 2. Как изменится энтропия 2 г водорода, занимающего объем 40 л при температуре 270 К, если давление увеличить вдвое при постоянной температуре и затем повысить температуру до 320 К при постоянном объеме?

Дано: $m = 2$ г $= 2\ 10^{-3}$ кг (H_2), $V_1 = 40$ л $= 4\ 10^{-2}$ м^3, $T_1 = 270$ К,
$p_2 = 2\ p_1$ ($T = const$), $T_2 = 320$ К

Найти: ΔS

Согласно первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\ dT + p\ dV = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\ dT + \frac{m}{\mu}R\,T\frac{dV}{V}.$$

Здесь использовано уравнение Менделеева – Клапейрона в виде

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{R\,T}{V}.$$

Рассчитаем изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\ \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{m}{\mu}R\ \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}R\ \left(\frac{i}{2}ln\frac{T_2}{T_1} + ln\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Учитывая, что изменение объема происходит при постоянной температуре, получаем

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$ (закон Бойля – Мариотта).

Для водорода $i = 5$. Подставляя все эти выражения в уравнение для изменения энтропии, получаем

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \left(\frac{5}{2} ln \frac{T_2}{T_1} - ln \frac{p_2}{p_1}\right) = -2{,}28\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Отсюда видно, что в заданном процессе энтропия уменьшается.

Ответ: $\Delta S = -2{,}28\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу 1,5 10^5 Дж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 260 К. Найти кпд машины, количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику. ($\eta = 0{,}35; Q_1 = 429$ кДж; $Q_2 = 279$ кДж)

Задача 4. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° С. Определить термический кпд цикла и температуру охладителя тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж. ($\eta = 0{,}35; t_2 = 52$°С)

Задача 5. В результате изотермического расширения объем 8 г кислорода увеличился в 2 раза. Определить изменение энтропии газа. ($\Delta S = 1{,}44$ Дж/К)

Задача 6. Горячая вода некоторой массы отдает теплоту холодной воде такой же массы, и температуры их становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом увеличивается.

Задача 7. При температуре 250 К и давлении 1,013 10^5 Па двухатомный газ занимает объем 80 л. Как изменится энтропия газа, если давление увеличить вдвое, а температуру повысить до 300 К?

Задача 8. Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатическом расширении в 5 раз. Определить кпд цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К? Какое количество теплоты получит от холодильника машина, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении, и какое количество теплоты будет передано нагревателю?

Задача 9. Изобразите цикл Карно на (T, S) диаграмме (T – температура, S – энтропия) и рассчитайте его кпд и эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно.

Тема 13: Распределение Максвелла. Распределение Больцмана

Вероятность dw того, что некоторая молекула в какой-то момент времени будет иметь скорость, попадающую в интервал $\vec{v} \div \vec{v} + d\vec{v}$, определяется формулой

$$dw(\vec{v}) = \frac{dN(\vec{v})}{N} = f(\vec{v})d\vec{v} = f\left(v_x, v_y, v_z\right)dv_x dv_y dv_z. \quad (13.1)$$

Здесь $dN(\vec{v})$ - число молекул, имеющих скорость, попадающую в данный интервал, N - полное число молекул в системе. $f(\vec{v})$ является плотностью вероятности того, что молекула будет иметь скорость в окрестности $\vec{v}$ в единичном интервале скоростей. Она называется *функцией распределения молекул по скоростям*. Для равновесной термодинамической системы функция распределения молекул по скоростям является *распределением Максвелла*:

$$f(\vec{v}) = f(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (13.2)$$

m - масса молекулы системы, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Функции

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

$$\varphi(v_y) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}, \quad (13.3)$$

$$\varphi(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}$$

являются распределением Максвелла по компонентам скорости.

Опираясь на эти формулы, можно получить распределение Максвелла по абсолютной величине (модулю) скорости

$$dw(v) = \frac{dN(v)}{N} = F(v)dv, \quad (13.4)$$

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (13.5)$$

Используя распределение Максвелла, вычисляют некоторые характерные скорости молекул:

1) *наиболее вероятная скорость* молекулы

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}; \quad (13.6)$$

2) *средняя квадратичная скорость* молекулы

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad (13.7)$$

3) *средняя арифметическая скорость* молекулы

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \qquad (13.8)$$

Распределение Больцмана описывает распределение молекул по координатам в потенциальном силовом поле:

$$dw(\vec{r}) = \frac{dN(\vec{r})}{N} = f(\vec{r})d\vec{r} = f(x, y, z)dxdydz, \qquad (13.9)$$

$$f(\vec{r}) = Ae^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}. \qquad (13.10)$$

Здесь $U(\vec{r})$ - потенциальная энергия молекулы в точке $\vec{r}$. Постоянная A определяется из условия нормировки

$$\int f(\vec{r})d\vec{r} = 1. \qquad (13.11)$$

Интегрирование проводится по всему пространству, занимаемому системой.

Исходя из распределения Больцмана, можно получить зависимость концентрации молекул газа в поле тяжести Земли в зависимости от высоты h

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \qquad (13.12)$$

Здесь n_0 - концентрация молекул газа у поверхности Земли.

Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 1: Азот (N_2) находится в равновесном состоянии при T = 421 К. Определить относительное число $\frac{\Delta N}{N}$ молекул, скорости которых заключены в пределах от 499,9 до 500,1 м/с.

Дано: T = 421 К, $v \div v + \Delta v = 499{,}9 \div 499{,}9 + 0{,}2$.

Найти: $\frac{\Delta N}{N}$

Для того чтобы рассчитать относительную долю молекул, имеющих скорость в данном интервале, воспользуемся распределением Максвелла по абсолютной величине скорости.

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_v^{v+\Delta v} \frac{dN(v)}{N} = \int_v^{v+\Delta v} F(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_v^{v+\Delta v} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv. \qquad (13.13)$$

Полученный здесь интеграл достаточно труден для точного вычисления. Однако его можно рассчитать приближенно. Для этого сначала оценим наиболее вероятную скорость молекул азота при данной температуре:

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 499{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как эта скорость намного превышает величину интервала интегрирования $\Delta v = 0{,}2$, можно считать, что на этом интервале подынтегральное выражение остаётся постоянным. В этом случае получаем

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\Delta v = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}}\Delta v = 3{,}32\cdot 10^{-4}.$$

Мы видим, что лишь 0,0332% молекул имеют скорость в заданном интервале.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 3{,}32\cdot 10^{-4}$.

Задача 2. Вблизи поверхности Земли отношение объемных концентраций кислорода (O_2) и азота (N_2) в воздухе η_0 = 20,95/78,08 = 0,268. Полагая температуру атмосферы не зависящей от высоты и равной 0° С, определить это отношение η на высоте h = 10 км.

Дано: O_2, N_2 η_0 = 0,268 t = 0° С h = 10 км	Для решения задачи воспользуемся формулой распределения молекул газа в поле тяжести Земли $n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$. Запишем это выражение для кислорода и азота по отдельности:
Найти: η	

$$n_{O_2}(h) = (n_0)_{O_2} e^{-\frac{m_{O_2}gh}{kT}} = (n_0)_{O_2} e^{-\frac{\mu_{O_2}gh}{RT}},$$

$$n_{N_2}(h) = (n_0)_{N_2} e^{-\frac{m_{N_2}gh}{kT}} = (n_0)_{N_2} e^{-\frac{\mu_{N_2}gh}{RT}}.$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\eta = \frac{n_{O_2}(h)}{n_{N_2}(h)} = \frac{(n_0)_{O_2}}{(n_0)_{N_2}} e^{-\frac{gh}{RT}(\mu_{O_2}-\mu_{N_2})} = \eta_0 e^{-\frac{gh}{RT}(\mu_{O_2}-\mu_{N_2})} = 0{,}225.$$

Мы видим, что с увеличением высоты относительное содержание кислорода понижается.

Ответ: η = 0,225.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Найти температуру T, при которой средняя квадратичная скорость молекул азота (N_2) больше средней арифметической скорости на 50 м/с. $(T = 453{,}5\ K)$

Задача 4. Вычислить наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорости молекул кислорода (O_2) при 20° С. $(v_{\text{нв}} = 390{,}1\ \text{м/с};\ v_{\text{кв}} = 477{,}8\ \text{м/с};\ \langle v\rangle = 440{,}2\ \text{м/с})$

Задача 5. Азот (N_2) находится в равновесном состоянии при T = 421 К. Определить относительное число $\frac{\Delta N}{N}$ молекул, скорости которых заключены в пределах: а) от 249,9 до 250,1 м/с; б) от 749,9 до 750,1 м/с. (а) $3{,}32 \cdot 10^{-4}$; б) $1{,}758 \cdot 10^{-4}$)

Задача 6. Закрытая с одного конца труба длины l = 1 м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью ω = 62,8 рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па, температура t = 20° С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца. $\mu_{\text{воздуха}} = 29\ \text{г/моль}$. $(p = 1{,}02 \cdot 10^5$ Па)

Задача 7. Найти среднее значение *x*-вой компоненты скорости молекул и её модуля для газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре *T*. Масса молекулы равна m_0. $\left(\langle v_x \rangle = 0;\ \langle |v_x| \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}}\right)$

Задача 8. Из распределения Максвелла по модулям скоростей молекул выведите распределение Максвелла по кинетической энергии молекул $\varepsilon = mv^2/2$. Постройте график соответствующей функции распределения и определите наиболее вероятную энергию молекулы $\varepsilon_{\text{нв}}$.

Тема 14: Явления переноса в газах

Явлениями переноса называются процессы распространения каких-либо характеристик вещества в пространстве. Основными явлениями переноса считаются: *диффузия* – процесс переноса вещества; *вязкость или внутреннее трение* – процесс переноса импульса; *теплопроводность* – процесс переноса энергии и др. Явления переноса – существенно неравновесные процессы и связаны с неравномерностью распределения каких-либо характеристик вещества в пространстве.

Диффузией называется процесс распространения молекул одного вещества в среде другого. Если молекулы некоторого вещества распространяются в среде того же вещества, то говорят о *самодиффузии*. Основной характеристикой диффузии является диффузионный поток

$$j_N = \frac{dN}{dS\,dt}, \qquad (14.1)$$

количество молекул, прошедших через единичную площадку в единицу времени в сторону уменьшения концентрации диффундирующих молекул.

Диффузионный поток связан с градиентом концентрации диффундирующих молекул по *закону Фика*:

$$j_N = -D\frac{dn}{dx}. \qquad (14.2)$$

Здесь $\frac{dn}{dx}$ - градиент концентрации в одномерном случае, D - *коэффициент диффузии*. Если умножить это выражение на массу молекулы m_0, то получим закон Фика для массы переносимого вещества

$$j_m = -D\frac{dc}{dx}. \quad (14.3)$$

Здесь

$$j_m = \frac{dm}{dS\,dt}, \quad (14.4)$$

поток массы диффундирующего вещества ($m = m_0N$), $c = m_0n$ массовая концентрация вещества (плотность).

Вязкостью или внутренним трением вещества называется явление переноса импульса молекул в текучей среде, в результате которого возникает сила между слоями среды, стремящаяся выровнять скорости этих слоев. Сила внутреннего трения определяется *законом Ньютона*

$$F = -\eta\frac{dv}{dx}S. \quad (14.5)$$

Здесь $\frac{dv}{dx}$ - градиент скорости слоев среды, S - площадка, перпендикулярная оси *x*, η - *коэффициент внутреннего трения или динамическая вязкость*.

Теплопроводностью называется явление переноса энергии молекул вещества, в результате которого происходит выравнивание температуры различных частей среды. Теплопроводность характеризуется *потоком тепла*

$$j_Q = \frac{dQ}{dS\,dt}, \quad (14.6)$$

где dQ количество теплоты, прошедшее в положительном направлении оси *x* через перпендикулярную оси площадку dS за время dt.

Поток тепла подчиняется *закону Фурье*:

$$j_Q = -\kappa\frac{dT}{dx}. \quad (14.7)$$

Здесь $\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры в одномерном случае, κ - коэффициент теплопроводности.

В газах явления переноса связаны с переходами молекул из одной области пространства в другую и со столкновениями их между собой. Основными характеристиками движения молекул газа являются:

1) средняя арифметическая скорость молекул $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$;
2) *средняя длина свободного пробега* молекул $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$ (σ - эффективный диаметр молекул газа, n - концентрация молекул);
3) *среднее число столкновений* молекул в единице объема за единицу времени $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\sigma^2 n^2\langle v\rangle$.

В элементарной кинетической теории явлений переноса в газах показано, что коэффициенты переноса D, η и κ связаны с характеристиками движения молекул:

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle, \tag{14.8}$$

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle v\rangle, \tag{14.9}$$

$$\kappa = \frac{1}{3}c_V\rho\lambda\langle v\rangle. \tag{14.10}$$

Здесь ρ - плотность газа, c_V - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 1. Вакуумная система заполнена водородом при давлении 10^{-3} мм рт. ст. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул водорода при таком давлении, если $t = 50°$ C.

Дано: $p = 10^{-3}$ мм рт. ст. = 0,133 Па

$\sigma_{H_2} = 2{,}3\ 10^{-10}$ м

$T = 323$ К

Найти: λ

Длина свободного пробега определяется формулой

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$.

Чтобы вычислить концентрацию водорода при данных условиях воспользуемся основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов в форме

$$p = nkT.$$

Выражая n и подставляя в первое уравнение, получаем

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = 0{,}143 \text{ м.}$$

Ответ: $\lambda = 0{,}143$ м.

Задача 2. Вычислить количество льда, которое образуется в течении часа в бассейне, площадь которого 10 м^2. Толщина льда 15 см, температура воздуха -10° С, коэффициент теплопроводности льда $\kappa = 2{,}1$ Вт/(м·К).

Дано: $\Delta t = 1$ час,
$S = 10$ м^2,
$d = 15$ см,
$t = -10°$ С,
$\kappa = 2{,}1$ Вт/(м·К)

Найти: Δm

Прежде всего, необходимо найти количество теплоты ΔQ, которое необходимо отвести от воды массой Δm, чтобы её превратить в лед. Учитывая, что удельная теплота замерзания воды $r = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, запишем

$$\Delta Q = r\Delta m. \tag{13.11}$$

Эта теплота должна передаться через лед от нижнего его края, примыкающего к воде, к верхнему краю, находящемуся при температуре воздуха. Такой процесс описывается законом Фурье

$$j_Q = -\kappa\frac{dT}{dx} = -\kappa\frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Здесь $\Delta T = T_2 - T_1$, где $T_2 = t + 273 = 263$ К температура верхнего края льда, $T_1 = 273$ К температура нижнего края льда, т.к. лед замерзает при 0° С. Таким образом, $\Delta T = -10$ К. $\Delta x = d$ толщина льда.

С другой стороны,

$$j_Q = \frac{dQ}{dS\,dt} = \frac{\Delta Q}{S\,\Delta t}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta Q = -\kappa \frac{\Delta T}{d} S\, \Delta t.$$

Эта теплота может быть передана за время Δt от нижнего края льда к верхнему. Приравнивая её теплоте, необходимой для замораживания воды массой Δm, окончательно получаем

$$\Delta m = -\kappa \frac{\Delta T\, S\, \Delta t}{d\, r} = 15 \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 15$ кг.

Следующие задачи решите самостоятельно.

Задача 3. Сосуд емкостью 2 л содержит азот при температуре 27° С и давлении 0,5 атм. Найти число молекул в сосуде, число столкновений между всеми молекулами за 1 с, среднюю длину свободного пробега молекул. ($N = 2{,}45 \cdot 10^{22}; Z = 3{,}04 \cdot 10^{31}\ c^{-1};\ \lambda = 1{,}91 \cdot 10^{-7}$ м)

Задача 4. Определить коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения азота, находящегося при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. ($D = 1{,}54 \cdot 10^{-5}$ м^2/с; $\eta = 1{,}73 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с))

Задача 5. Идеальный газ состоит из жестких двухатомных молекул. Как и во сколько раз изменятся коэффициент диффузии D и вязкость η, если объем газа адиабатически уменьшить в 10 раз? ($D_1/D_2 \approx 6{,}31$; $\eta_1/\eta_2 \approx 0{,}631$)

Задача 6. Теплопроводность гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

Следующие задания надо решить согласно варианту, определяемому по номеру студента в списке группы.

Задание 1

Вариант № 1

1. Материальная точка движется по прямой линии. Закон движения имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, $A = 2\ м$, $B = -3\ м/с$, $C = 1\ м/с^2$, $D = 5\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. При прямолинейном движении материальной точки зависимость ускорения от времени имеет вид $a(t) = A + Bt$, где $A = 1 м/с^2$, $B = -2\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 2\ м,$ $v_0 = -1\ м/с$. Найти путь, который пройдет точка за $t = 3\ с$.

3. Тело брошено под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 30\ м/с$. Найти дальность s и время полета t_n, а также максимальную высоту подъема тела h. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения, а также радиус кривизны траектории ρ в момент времени $t = t_n/3$.

4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a - поло-

жительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость угла поворота и угловой скорости от времени.

6. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2\ м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивления воздуха нет.

7. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

9. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса R = 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью k = 0,2. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

10. Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0. Скорость газовой струи относительно ракеты равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

Вариант № 2

1. Материальная точка совершает прямолинейное движение. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + Ct^3 + Dt^4$, $B = 1\ м/с$, $C = -5\ м/с^3$, $D = 0.5\ м/с^4$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату

x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 2\,c$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\, и\, a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 3$ с.

2. Материальная точка движется с ускорением, зависящим от времени $a(t) = A - Bt$, где $A = 3\,м/c^2$, $B = 1\,м/c^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 0$, $v_0 = 2\,м/c$. Найти путь, который пройдет точка до остановки.

3. Под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии $l = 10{,}0\,км$, если начальная скорость снаряда $v_0 = 500\,м/c$? Определить радиус кривизны траектории снаряда через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Точка А движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время «нацелен» в точку В, которая в свою очередь движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между точками равно l. Через сколько времени точки встретятся?

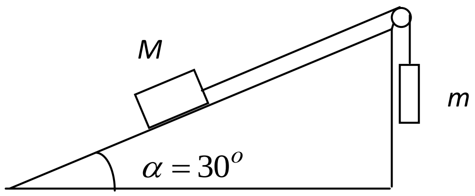
5. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график; б) скорость v и ускорение a точки в зависимости от t; в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.

6. Материальная точка массой m движется в плоскости xy по закону $x = R\sin(\omega t)$, $y = R\cos(\omega t)$, где R и ω - положительные постоянные. Определить модуль и направление силы, действующей на точку.

7. На моторной лодке, двигающейся против течения реки со скоростью v_0 относительно берега, неожиданно заглох двигатель. Как в дальнейшем будет двигаться лодка, если сила сопротивления воды $F_c = \beta v_{отн}$ ($v_{отн}$ - скорость лодки относительно воды)? Скорость течения всюду постоянна и равна v_1.

8. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^o$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в два раза меньше времени спуска.

9. Показанная на рисунке система находится в равновесии. Коэффициент трения покоя между бруском массой *M* и поверхностью наклонной плоскости



равен 0,4. Масса груза *M* = 4 кг. В каких пределах может меняться масса *m*? Какова сила трения, если *m* = *1* кг?

10. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением *a*, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна *u*, а ее масса в начальный момент равна m_0.

Вариант № 3

1. Материальная точка движется по окружности. Закон движения имеет вид $s(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 1\,м$, $B = 2\,м/с$, $C = -3\,м/с^2$. Найти зависимость линейной скорости и тангенциального ускорения точки от времени. Определить координату s, скорость v, и ускорение a_τ, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\,с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $s(t), v(t)\ и\ a_\tau(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\sin(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

3. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10\,м/с$ под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории движения тела через одну секунду после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

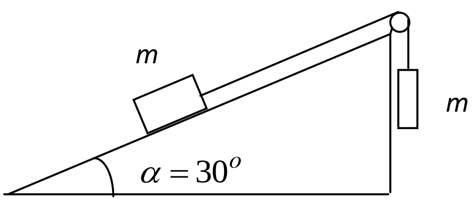
4. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s(t) = Ct^3$, где $C = 0{,}1\, см/с^3$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3 м/с$.

5. Мяч массой m бросают вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Отрыв мяча от рук происходит на высоте h. Найти закон движения мяча, если сила сопротивления воздуха имеет вид $F_c = \beta v$.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\sin(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

8. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом k = 0,1. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?



9. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^o$. Гири 1 и 2 одинаковой массы m_1 = m_2 = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которыми движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири о наклонную плоскость k = 0,1.

10. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/$с$.

Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Вариант № 4

1. Материальная точка движется по прямой. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + C\sin(t)$, $B = 1\ м/с$, $C = 2\ м$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\cos(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

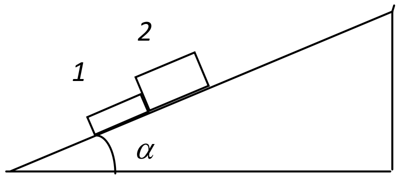
3. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела $h = 3$ м и радиус кривизны траектории движения тела в верхней точке траектории $R = 3$ м.

4. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория: а) парабола $y = \alpha x^2$; б) эллипс $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, где α и β - постоянные.

5. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = at\vec{i} + bt^2\vec{j}$, где $a = 0{,}5$ рад/с^2, $b = 0{,}06$ рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей x и y. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент $t = 10$ с.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\cos(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. Найти закон вертикального падения шарика плотностью ρ и радиуса r в вязкой жидкости плотностью ρ_0, если сила сопротивления $F = \beta v$, v - скорость шарика, β - постоянная. Начальная скорость шарика равнялась нулю.



8. На наклонную плоскость составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска *1* и *2*. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками – соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$. Найти: а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; б) значения угла α, при которых не будет скольжения.

9. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол ϑ отклонения нити в крайнем положении.

10. Платформа массы m_0 начинает двигаться горизонтально под действием постоянной силы $\vec{F}$. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг$/c$. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Вариант № 5

1. Материальная точка движется по прямой. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + Dt^3$, , $B = 2\ м/с$, $D = -1\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 2\ c$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 5$ с.

2. При прямолинейном движении материальной точки зависимость ускорения от времени имеет вид $a(t) = A + Bt^2$, где $A = 5\ м/с^2$, $B = -1\ м/с^4$. Найти

зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 0, \quad v_0 = 3\,м/с$. Найти путь, который пройдет точка за $t = 3\,с$.

3. Тело брошено под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20\,м/с$. Найти дальность s и время полета t_n, а также максимальную высоту подъема тела h. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения, а также радиус кривизны траектории ρ в момент времени $t = t_n/4$.

4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в полтора раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a - положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость угла поворота и угловой скорости от времени.

6. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0{,}2\,м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивления воздуха нет.

7. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

9. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau =$ 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса $R =$ 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхно-

стью $k = 0{,}2$. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

10. Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0. Скорость газовой струи относительно ракеты равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

Вариант № 6

1. Материальная точка совершает прямолинейное движение. Закон движения имеет вид $x(t) = B + Ct^2 + Dt^4$, $B = 1\,м$, $C = -5\,м/с^2$, $D = 0.5\,м/с^4$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 6\,с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\,и\,a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 6$ с.

2. Материальная точка движется с ускорением, зависящим от времени $a(t) = A - Bt$, где $A = 3 м/с^2$, $B = 1\,м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 0$, $v_0 = 2\,м/с$. Найти путь, который пройдет точка до остановки.

3. Под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии $l = 10{,}0\,км$, если начальная скорость снаряда $v_0 = 500\,м/с$? Определить радиус кривизны траектории снаряда через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

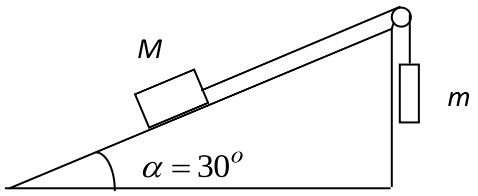
4. Точка А движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время «нацелен» в точку В, которая в свою очередь движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между точками равно l. Через сколько времени точки встретятся?

5. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график; б) скорость v и ускорение a точки в зависимости от t; в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$

6. Материальная точка массой m движется в плоскости xy по закону $x = R\sin(\omega t)$, $y = R\cos(\omega t)$, где R и ω - положительные постоянные. Определить модуль и направление силы, действующей на точку.

7. На моторной лодке, двигающейся против течения реки со скоростью v_0 относительно берега, неожиданно заглох двигатель. Как в дальнейшем будет двигаться лодка, если сила сопротивления воды $F_c = \beta v_{отн}$ ($v_{отн}$ - скорость лодки относительно воды)? Скорость течения всюду постоянна и равна v_1.

8. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^o$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в два раза меньше времени спуска.



9. Показанная на рисунке система находится в равновесии. Коэффициент трения покоя между бруском массой M и поверхностью наклонной плоскости равен 0,4. Масса груза M = 4 кг. В каких пределах может меняться масса m? Какова сила трения, если m = 1 кг?

10. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

Вариант № 7

1. Материальная точка движется по окружности. Закон движения имеет вид $s(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 1\,м$, $B = 2\,м/с$, $C = -3\,м/с^2$. Найти зависимость ли-

нейной скорости и тангенциального ускорения точки от времени. Определить координату s, скорость v, и ускорение a_τ, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\,c$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $s(t), v(t)\; и\; a_\tau(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\sin(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

3. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10\; м/c$ под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории движения тела через одну секунду после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

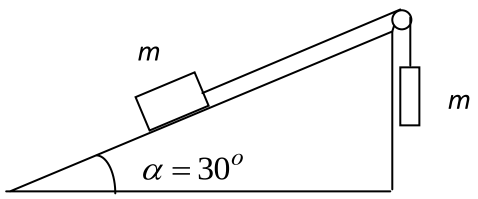
4. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s(t) = Ct^3$, где $C = 0{,}1\, см/c^3$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3 м/c$.

5. Мяч массой m бросают вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Отрыв мяча от рук происходит на высоте h. Найти закон движения мяча, если сила сопротивления воздуха имеет вид $F_c = \beta v$.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\sin(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

8. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом k = 0,1. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?



9. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^o$. Гири 1 и 2 одинаковой массы m_1 = m_2 = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которыми движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири о наклонную плоскость k = 0,1.

10. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/c. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент t = 0 тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Вариант № 8

1. Материальная точка движется по прямой. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + C\sin(t)$, $B = 1\ м/с$, $C = 2\ м$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\ c$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\cos(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

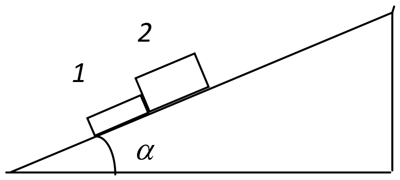
3. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела h = 3 м и радиус кривизны траектории движения тела в верхней точке траектории R = 3 м.

4. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории *y(x)*. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория: а) парабола $y = \alpha x^2$; б) эллипс $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, где α и β - постоянные.

5. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = at\vec{i} + bt^2\vec{j}$, где a = 0,5 рад/с^2, b = 0,06 рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей *x* и *y*. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент t = 10 с.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\cos(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты *x*. Масса точки *m*. *A* и ω - постоянные.

7. Найти закон вертикального падения шарика плотностью ρ и радиуса *r* в вязкой жидкости плотностью ρ_0, если сила сопротивления $F = \beta v$, v - скорость шарика, β - постоянная. Начальная скорость шарика равнялась нулю.



8. На наклонную плоскость составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска *1* и *2*. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками – соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$. Найти: а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; б) значения угла α, при которых не будет скольжения.

9. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол ϑ отклонения нити в крайнем положении.

10. Платформа массы m_0 начинает двигаться горизонтально под действием постоянной силы $\vec{F}$. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ *кг/с*. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Вариант № 9

1. Материальная точка движется по прямой линии. Закон движения имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, $A = 2\ м$, $B = -3\ м/с$, $C = 1\ м/с^2$, $D = 5\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. При прямолинейном движении материальной точки зависимость ускорения от времени имеет вид $a(t) = A + Bt$, где $A = 1 м/с^2$, $B = -2\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 2\ м,$ $v_0 = -1\ м/с$. Найти путь, который пройдет точка за $t = 3\ с$.

3. Тело брошено под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 30\ м/с$. Найти дальность s и время полета t_n, а также максимальную высоту подъема тела h. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения, а также радиус кривизны траектории ρ в момент времени $t = t_n/3$.

4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a - положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость угла поворота и угловой скорости от времени.

6. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2\ м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэро-

стат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивления воздуха нет.

7. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

9. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса R = 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью k = 0,2. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

10. Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0Скорость газовой струи относительно ракеты равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

Вариант № 10

1. Материальная точка совершает прямолинейное движение. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + Ct^2 + Dt^3$, $B = 1\ м/с$, $C = -5\ м/с^2$, $D = 0.5\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 5$ с.

2. Материальная точка движется с ускорением, зависящим от времени $a(t) = A + Bt$, где $A = 3\,м/с^2$, $B = 1\,м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 0$, $v_0 = 2\,м/с$. Найти путь, который пройдет точка до остановки.

3. Под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии $l = 10{,}0\,км$, если начальная скорость снаряда $v_0 = 500\,м/с$? Определить радиус кривизны траектории снаряда через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Точка А движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время «нацелен» в точку В, которая в свою очередь движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между точками равно l. Через сколько времени точки встретятся?

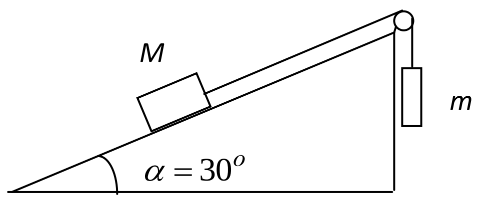
5. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график; б) скорость v и ускорение a точки в зависимости от t; в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$

6. Материальная точка массой m движется в плоскости xy по закону $x = R\sin(\omega t)$, $y = R\cos(\omega t)$, где R и ω - положительные постоянные. Определить модуль и направление силы, действующей на точку.

7. На моторной лодке, двигающейся против течения реки со скоростью v_0 относительно берега, неожиданно заглох двигатель. Как в дальнейшем будет двигаться лодка, если сила сопротивления воды $F_c = \beta v_{отн}$ ($v_{отн}$ - скорость лодки относительно воды)? Скорость течения всюду постоянна и равна v_1.

8. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^o$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в два раза меньше времени спуска.

9. Показанная на рисунке система находится в равновесии. Коэффициент трения покоя между бруском массой M и поверхностью наклонной плоскости



равен 0,4. Масса груза M = 4 кг. В каких пределах может меняться масса m? Какова сила трения, если m = *1* кг?

10. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

Вариант № 11

1. Материальная точка движется по окружности. Закон движения имеет вид $s(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 1\,м$, $B = 2\,м/с$, $C = -3\,м/с^2$. Найти зависимость линейной скорости и тангенциального ускорения точки от времени. Определить координату s, скорость v, и ускорение a_τ, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\,с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $s(t), v(t)\, и\, a_\tau(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\sin(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

3. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10\,м/с$ под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории движения тела через одну секунду после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s(t) = Ct^3$, где $C = 0{,}1\,см/с^3$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3\,м/с$.

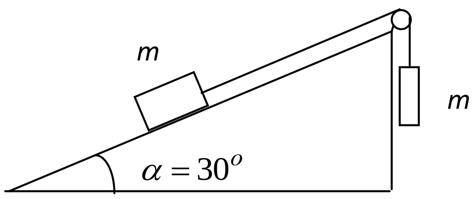
5. Мяч массой m бросают вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Отрыв мяча от рук происходит на высоте h. Найти закон движения мяча, если сила сопротивления воздуха имеет вид $F_c = \beta v$.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\sin(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

8. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом k = 0,1. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

9. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^o$. Гири 1 и 2 одинаковой массы m_1 = m_2 = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которыми движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири о наклонную плоскость k = 0,1.



10. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ *кг/с*. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент t = 0 тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Вариант № 12

1. Материальная точка движется по прямой. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + C\sin(t)$, $B = 1\ м/с$, $C = 2\ м$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\cos(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

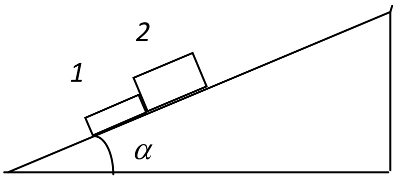
3. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела h = 3 м и радиус кривизны траектории движения тела в верхней точке траектории R = 3 м.

4. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория: а) парабола $y = \alpha x^2$; б) эллипс $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, где α и β - постоянные.

5. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = at\vec{i} + bt^2\vec{j}$, где a = 0,5 рад/с^2, b = 0,06 рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей x и y. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент t = 10 с.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\cos(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. Найти закон вертикального падения шарика плотностью ρ и радиуса r в вязкой жидкости плотностью ρ_0, если сила сопротивления $F = \beta v$, v - скорость шарика, β - постоянная. Начальная скорость шарика равнялась нулю.



8. На наклонную плоскость составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска *1* и *2*. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками – соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$. Найти: а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; б) значения угла α, при которых не будет скольжения.

9. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол ϑ отклонения нити в крайнем положении.

10. Платформа массы m_0 начинает двигаться горизонтально под действием постоянной силы $\vec{F}$. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ *кг/с*. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Вариант № 13

1. Материальная точка движется по прямой линии. Закон движения имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, $A = 2$ *м*, $B = -3$ *м/с*, $C = 1$ *м/с*^{2}, $D = 5$ *м/с*^{3}. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\,с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)$ и $a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. При прямолинейном движении материальной точки зависимость ускорения от времени имеет вид $a(t) = A + Bt$, где $A = 1$*м/с*^{2}, $B = -2$ *м/с*^{3}. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 2$ *м*, $v_0 = -1$ *м/с*. Найти путь, который пройдет точка за $t = 3\,с$.

3. Тело брошено под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 30\, м/с$. Найти дальность s и время полета t_n, а также максимальную высоту подъема тела h. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения, а также радиус кривизны траектории ρ в момент времени $t = t_n/3$.

4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a - положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость угла поворота и угловой скорости от времени.

6. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2\, м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивления воздуха нет.

7. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

9. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса R = 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью k = 0,2. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

10. Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0. Скорость газовой струи относительно ракеты равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

Вариант № 14

1. Материальная точка совершает прямолинейное движение. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + Ct^2 + Dt^3$, $B = 1\ м/с$, $C = -5\ м/с^2$, $D = 0.5\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 5$ с.

2. Материальная точка движется с ускорением, зависящим от времени $a(t) = A + Bt$, где $A = 3 м/с^2$, $B = 1\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 0,\quad v_0 = 2\ м/с$ Найти путь, который пройдет точка до остановки.

3. Под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии $l = 10{,}0\ км$, если начальная скорость снаряда $v_0 = 500\ м/с$? Определить радиус кривизны траектории снаряда через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Точка А движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время «нацелен» в точку В, которая в свою очередь движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между точками равно l. Через сколько времени точки встретятся?

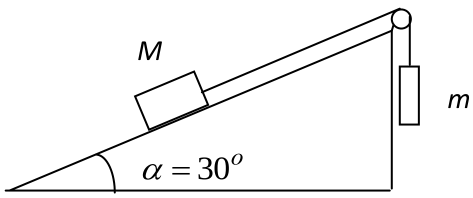
5. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$;

изобразить ее график; б) скорость v и ускорение a точки в зависимости от t; в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$

6. Материальная точка массой m движется в плоскости xy по закону $x = R\sin(\omega t)$, $y = R\cos(\omega t)$, где R и ω - положительные постоянные. Определить модуль и направление силы, действующей на точку.

7. На моторной лодке, двигающейся против течения реки со скоростью v_0 относительно берега, неожиданно заглох двигатель. Как в дальнейшем будет двигаться лодка, если сила сопротивления воды $F_c = \beta v_{отн}$ ($v_{отн}$ - скорость лодки относительно воды)? Скорость течения всюду постоянна и равна v_1.

8. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^o$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в два раза меньше времени спуска.



9. Показанная на рисунке система находится в равновесии. Коэффициент трения покоя между бруском массой M и поверхностью наклонной плоскости равен 0,4. Масса груза M = 4 кг. В каких пределах может меняться масса m? Какова сила трения, если m = 1 кг?

10. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

Вариант № 15

1. Материальная точка движется по окружности. Закон движения имеет вид $s(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 1\,м$, $B = 2\,м/с$, $C = -3\,м/с^2$. Найти зависимость линейной скорости и тангенциального ускорения точки от времени. Определить координату s, скорость v, и ускорение a_τ, которые будет иметь точка в мо-

мент времени $t = 3\,c$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $s(t), v(t)$ $и$ $a_\tau(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\sin(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.

3. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10\,м/с$ под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории движения тела через одну секунду после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s(t) = Ct^3$, где $C = 0{,}1\,см/с^3$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3 м/с$.

5. Мяч массой m бросают вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Отрыв мяча от рук происходит на высоте h. Найти закон движения мяча, если сила сопротивления воздуха имеет вид $F_c = \beta\, v$.

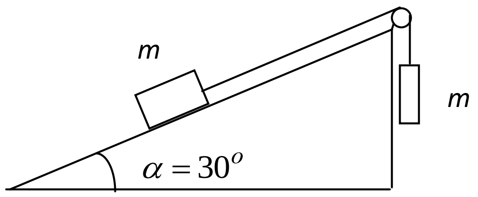
6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\sin(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

8. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом k = 0,1. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

9. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^o$. Гири 1 и 2 одинаковой массы m_1 = m_2 = 1 кг соеди-

нены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которыми движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири о наклонную плоскость k = 0,1.



10. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ $кг/с$. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент t = 0 тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

Вариант № 16

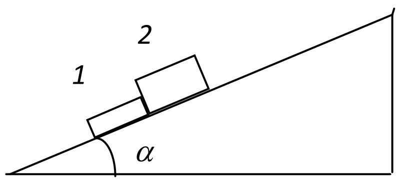
1. Материальная точка движется по прямой. Закон движения имеет вид $x(t) = Bt + C\sin(t)$, $B = 1\ м/с$, $C = 2\ м$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 3\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)$ и $a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.
2. Ускорение материальной точки, движущейся прямолинейно, зависит от времени по закону $a(t) = A\cos(t)$. Найти закон движения точки, если в начальный момент ее скорость равнялась нулю.
3. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела h = 3 м и радиус кривизны траектории движения тела в верхней точке траектории R = 3 м.
4. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке x = 0 и радиус кривизны траектории в этой

точке, если траектория: а) парабола $y = \alpha x^2$; б) эллипс $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, где α и β - постоянные.

5. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = at\vec{i} + bt^2\vec{j}$, где a = 0,5 рад/с^2, b = 0,06 рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей x и y. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент t = 10 с.

6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x(t) = A\cos(\omega t)$. Найти зависимость силы, действующей на точку, от ее координаты x. Масса точки m. A и ω - постоянные.

7. Найти закон вертикального падения шарика плотностью ρ и радиуса r в вязкой жидкости плотностью ρ_0, если сила сопротивления $F = \beta v$, v - скорость шарика, β - постоянная. Начальная скорость шарика равнялась нулю.



8. На наклонную плоскость составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска *1* и *2*. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками – соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$. Найти: а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; б) значения угла α, при которых не будет скольжения.

9. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол ϑ отклонения нити в крайнем положении.

10. Платформа массы m_0 начинает двигаться горизонтально под действием постоянной силы $\vec{F}$. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ *кг/с*. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Вариант № 17

1. Материальная точка движется по прямой линии. Закон движения имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, $A = 2\ м$, $B = -3\ м/с$, $C = 1\ м/с^2$, $D = 5\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени. Определить координату x, скорость v, и ускорение a, которые будет иметь точка в момент времени $t = 5\ с$. Какой путь пройдет точка за это время? Построить графики зависимости $x(t), v(t)\ и\ a(t)$ в интервале от $t = 0$ с до $t = 10$ с.

2. При прямолинейном движении материальной точки зависимость ускорения от времени имеет вид $a(t) = A + Bt$, где $A = 1 м/с^2$, $B = -2\ м/с^3$. Найти зависимость скорости и координаты от времени, если в начальный момент времени $x_0 = 2\ м,$ $v_0 = -1\ м/с$. Найти путь, который пройдет точка за $t = 3\ с$.

3. Тело брошено под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 30\ м/с$. Найти дальность s и время полета t_n, а также максимальную высоту подъема тела h. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения, а также радиус кривизны траектории ρ в момент времени $t = t_n/3$.

4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a - положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость угла поворота и угловой скорости от времени.

6. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2\ м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэро-

стат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивления воздуха нет.

7. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

8. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

9. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,62 м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса R = 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью k = 0,2. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

10. Ракета поднимается без начальной скорости вертикально вверх в однородном поле сил тяжести. Начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 Скорость газовой струи относительно ракеты равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t.

Задание 2

Вариант № 1

1. Два маховика в виде дисков одинаковых радиусов и масс были раскручены до скорости вращения 480 об/мин и предоставлены самим себе. Под действием сил трения валов о подшипники первый остановился через 80 с, а второй сделал 240 оборотов до остановки. У какого маховика момент сил трения валов о подшипники был больше и во сколько раз?

2. Груз массой 700 кг падает с высоты 5 м для забивки сваи массой 300 кг. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая входит в грунт на глубину 4 см. Удар между грузом и сваей считать абсолютно неупругим.

3. Горизонтальная балка опирается своими концами на две опоры. Одну из опор быстро выбивают. Определить силу давления балки на другую опору сразу после удаления первой. Масса балки m. Балку считать однородным стержнем.

4. Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

5. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $\nu = 10$ мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

6. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^3 - b/r^2$, где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

7. Два одинаковых шара претерпевают центральный удар. До удара второй шар неподвижен, первый движется со скоростью v_0 ($v_0 \ll c$). Характер удара таков, что потеря энергии составляет m-ю часть той, которая имела бы место при абсолютно неупругом ударе. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара. Исследовать случаи: а) m = 1, б) m = 0.

8. Найти тензор инерции тонкой прямоугольной пластины массы M со сторонами a и b относительно осей, проходящих через центр масс пластины. Оси x и y параллельны сторонам пластины, ось z перпендикулярна плоскости пластины.

9. Вычислить момент импульса Земли M_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса M, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли – окружностью.

10. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, как будет двигаться небольшое тело, если его уронить в узкий канал, просверленный вдоль земной оси.

11. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы, называемой мюоном, τ = 2,2 мкс. Определить время жизни t мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь l = 30 км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найти скорость мюона v.

12. При какой скорости частицы v ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

13. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы массой $m = 0{,}4\ M$ каждая. Найти скорость v, с которой движутся эти частицы.

14. Два протона с энергией E = 50 ГэВ каждый движутся в системе K навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотрев этот процесс в системе K', в которой один из протонов неподвижен, определить энергию E' другого протона. Энергия покоя протона E_0 = 938 МэВ.

15. Частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найти зависимость от времени импульса $\vec{p}$ и скорости $\vec{v}$ частицы.

Вариант № 2

1. Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

2. Шар массой 20 г, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 ($v_1 << c$), столкнулся с неподвижным шаром массой 40 г. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю δ своей кинетической энергии первый шар передал второму?

3. Насадка электромиксера, имеющая форму диска радиусом R = 3 см и массой m = 100 г, раскручена до угловой скорости ω_0 = 60 об/мин в вязкой жидкости. После выключения миксера вращение насадки тормозится моментом сил вязкого трения, зависящим от угловой скорости $M_c = \alpha + \beta \cdot \omega$, где α = $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н·м, β = $1 \cdot 10^{-5}$ Н·м·с. Через сколько времени вращение прекратится? Сколько оборотов сделает при этом насадка?

4. Прямой круглый однородный конус имеет массу m и радиус основания R. Найти момент инерции I конуса относительно его оси.

5. Деревянный шарик массой m = 0,1 кг падает с высоты h_1 = 2 м. Коэффициент восстановления скорости при ударе шарика о пол k = 0,5. Найти высоту h_2, на которую поднимается шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

6. Планета Марс имеет два спутника – Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r = 0{,}95 \cdot 10^4$ км от центра масс Марса, второй – на расстоянии $r = 2{,}4 \cdot 10^4$ км. Найти периоды обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

7. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала проволоки равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии l от его центра.

8. Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

9. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа,

если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 2,94 до I_2 = 0,98 кг·м^2? Какую работу при этом совершит человек? Считать платформу однородным диском.

10. На широте φ = 45^o из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии l = 100 м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

11. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

12. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией T = 10 ГэВ. Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

13. Солнце излучает поток энергии P = 3,9·10^{26} Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в два раза? Излучение Солнца считать постоянным.

14. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра масс была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями T = 25 ГэВ?

15. Неподвижная частица с массой m распадается на три частицы с массами m_1, m_2, m_3. Найти наибольшую полную энергию, которую может иметь, например, частица m_1.

Вариант № 3

1. Металлический шарик массой 5 г падает с высоты 1 м на горизонтальную поверхность стола и, отразившись от нее, поднимается на высоту 0,8 м.

Определить среднюю силу удара, если соприкосновение шарика со столом длилось 0,01 с.

2. Человек, масса которого 70 кг, прыгает с неподвижной тележки со скоростью 7 м/с. Определить силу трения тележки о землю, если тележка после толчка остановилась через 5 с. Перед прыжком тележка была неподвижна относительно земли.

3. Найти тензор инерции тонкого диска относительно осей, проходящих через его центр. Масса диска m, радиус диска R.

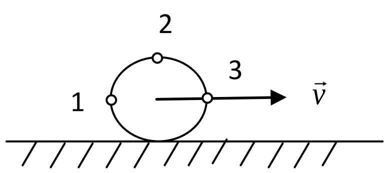
4. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{\min} = 183$ км, а максимальное удаление - $h_{\max} = 244$ км. Найти период обращения спутника вокруг Земли.

5. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) – одинакового радиуса $R = 6$ см и одинаковой массы $m = 0{,}5$ кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции I_1 и I_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости $h = 0{,}5$ м, угол наклона плоскости $\alpha = 30^{\circ}$, начальная скорость каждого цилиндра $v_0 = 0$.

6. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса $L = 73{,}5$ кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через время $t_2 = 20$ с после начала движения.

7. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена касательная сила $F = 19{,}6$ Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через время 5 с после начала действия силы?

8. Цилиндр катится без скольжения с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найти скорости и ускорения точек 1, 2 и 3 (см. рисунок).



9. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^{12} - b/r^6$ (потенциал Леннард-Джонса), где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1,5 0, 0) в точку (0, 2, 2).

10. Шар массы *m*, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), ударяется о неподвижный шар такой же массы. После абсолютно упругого нецентрального удара шары разлетаются под углами α и β к направлению движения первого шара. Доказать, что угол разлета шаров $\alpha + \beta = \pi/2$

11. В системе K', относительно которой стержень покоится, он имеет длину l' = 1 м и образует с осью x' угол $\alpha' = 45^o$. Определить в системе *K* длину стержня l и угол α, который образует стержень с осью *x*. Относительная скорость систем равна *u* = 0,5 *c*.

12. С какой скоростью должна лететь частица относительно системы отсчета *K* для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta\tau$ был в 10 раз меньше промежутка Δt, отсчитанного по часам системы *K*?

13. При какой скорости *v* погрешность при вычислении импульса по ньютоновской формуле *p* = *m v* не превышает 1 %?

14. Две одинаковые частицы массы *m* каждая летят навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью *v*. Столкнувшись, частицы сливаются в одну частицу. Какова масса *M* образовавшейся частицы? Найти *M* для *v*, равной: 0,1 *c*; 0,5 *c*; 0,999 *c*.

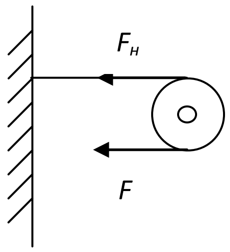
15. Какова энергия отдачи (в электрон-вольтах) для ядра с массой 10^{-26} кг после испускания гамма-луча с энергией в 1 МэВ?

Вариант № 4

1. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90^o имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась че-

рез время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить: 1) среднюю силу сопротивления стенки F_c и расстояние l, на которое пуля проникла; 2) с какой скоростью v_k пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.

2. Сплошной диск радиусом 20 см вращается под действием постоянной касательной силы 40 Н. Кроме того, на него действует момент сил трения 2 Н·м, и угловое ускорение его равно 30 рад/с^2. Определить массу диска.



3. Однородный цилиндр массой m = 1 кг и радиусом R = 0,1 м способен вращаться относительно горизонтальной оси, совпадающей с его осью. К поверхности цилиндра прикреплена резинка, другой конец которой закреплен на стене. В начальный момент времени резинка не натянута. Цилиндр начинают вращать, прикладывая касательную силу F = 100 Н, так что резинка наматывается на него. Сила натяжения резинки зависит от ее удлинения $F_н = k \cdot \Delta l$, где k = 100 Н/м. Определить зависимость угловой скорости от угла поворота. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

4. Шарик массой m = 0,1 кг, двигающийся со скоростью v_1 = 2 м/с, сталкивается с таким же покоящимся шариком. Прицельный параметр столкновения шаров $b = 0{,}7 \cdot R$, где R = 2 см – радиус шаров. Определить скорости шаров после столкновения в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс. Удар абсолютно упругий.

5. Определить момент инерции тонкой пластины, имеющей форму равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, относительно оси, проходящей через центр масс треугольника перпендикулярно плоскости пластины.

6. Имеется очень тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы M. В центре полусферы находится частица массы m. Найти модуль F силы, с которой слой действует на частицу.

7. Гладкий однородный стержень АВ массы M и длины l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной

вертикальной оси, проходящей через его конец А. Из точки А начинает скользить по стержню небольшая муфта массы m. Найти скорость v' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца В.

8. Какую наименьшую работу надо совершить, чтобы доставить космический корабль массы $m = 2 \cdot 10^3$ кг с поверхности Земли на Луну? Сопротивление воздуха не учитывать.

9. Столб высоты $h = 3$ м и массы $m = 50$ кг падает из вертикального положения на Землю. Определить модуль момента импульса L столба относительно точки опоры и скорость v верхнего конца столба в момент удара о Землю.

10. Доказать, что потенциальная энергия тела произвольной формы, находящегося вблизи поверхности Земли, равна mgh, где m – масса тела, h – высота центра масс тела над уровнем, принятым за нулевой.

11. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

12. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составила 95 % скорости света?

13. При делении ядра урана ${}^{235}_{92}U$ освобождается энергия $\Delta E = 200$ МэВ. Найти изменение массы Δm при делении одного моля урана.

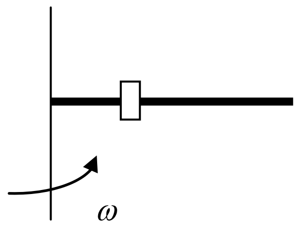
14. Импульс тела массы m равен $p = m\,c$. Чему равна кинетическая энергия T тела?

15. Частица массы m движется вдоль оси x K-системы отсчета по закону $x = \sqrt{d^2 + c^2 t^2}$, где d – некоторая постоянная, c – скорость света, t – время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

Вариант № 5

1. Легкая нить с прикрепленным к ней грузом массой 2 кг намотана на сплошной вал радиусом 10 см. При разматывании нити груз опускается с ускорением 0,5 м/с^2. Определить массу и момент инерции вала.

2. Маховик, момент инерции которого I = 1,2 кг$\cdot$м^2, раскручивают при помощи веревки, намотанной на его ось, радиус которой r = 2 см. Сила натяжения веревки убывает пропорционально угловой скорости маховика $F_н = \alpha - \beta \cdot \omega$, где α = 10 Н, β = 0,1 Н$\cdot$с. Найти зависимость угловой скорости от времени. До какой максимальной скорости раскрутится маховик? Найти закон вращения маховика.



3. Гладкий однородный стержень массой m = 1 кг и длиной 1 м способен вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов. На него надета небольшая муфта массой m_1 = 0,5 кг, которая находится на расстоянии $l/3$ от оси вращения. Стержню толчком сообщают угловую скорость $\omega_0 = 6$ рад/с. Определить угловую скорость стержня в момент времени, когда муфта достигнет конца стержня. Найти скорость муфты в этот момент.

4. Найти период обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось ее эллиптической орбиты превышает большую полуось земной орбиты на 0,24$\cdot$10^8 км.

5. Во сколько раз кинетическая энергия искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии?

6. Гироскоп в виде однородного диска радиуса R = 8 см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω = 3$\cdot$10^2 рад/с. Угловая скорость прецессии гироскопа Ω = 1 рад/с. Определить расстояние l от точки опоры до центра масс гироскопа. Моментом инерции оси гироскопа пренебречь.

7. Лестница длины l =5 м и массы m =11,2 кг прислонена к гладкой стене под углом α = 70° к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом k = 0,29. Найти: а) силу, с которой лестница давит на стену, б) предельное значение угла α_0, при котором лестница начинает скользить.

8. Частица массы m находится в силовом поле вида $\vec{F} = -\left(\alpha / r^2\right)\vec{e}_r$ (α - положительная константа, r – модуль, а $\vec{e}_r$ - орт радиус-вектора частицы). Частицу поместили в точку с радиус-вектором $\vec{r}_0$ и сообщили ей начальную скорость $\vec{v}_0$, перпендикулярную к $\vec{r}_0$. По какой траектории будет двигаться частица?

9. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a\left(x/y - y/z\right)$, где a – константа. Найти: а) силу, действующую на частицу, б) работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

10. Снаряд, летящий со скоростью v = 500 м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в 1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

11. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью 10 $с^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня, Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения теперь проходит через конец стержня. Найти угловую скорость во втором случае.

12. Два события произошли в K-системе отсчета в мировых точках с координатами x_1 = 5 м, x_2 = 3 м; y_1 =4 м, y_2 = 2 м; $z_1 = z_2$ =0; t_1 = 10 нс, t_2 = 20 нс. Можно ли найти систему отсчета, в которой оба события происходят : а) в один момент времени; б) в одной точке пространства? Могут ли эти события быть причинно связаны друг с другом?

13. Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения часов 240 000 км/с?

14. Определить периметр квадрата со стороной a, движущегося со скоростью c/2 вдоль одной из своих сторон.

15. Найти скорость частицы, кинетическая энергия которой 500 МэВ и импульс 865 МэВ/c, где с – скорость света.

Вариант № 6

1. Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

2. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой ν = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

3. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^3 - b/r^2$, где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

4. Два маховика в виде дисков одинаковых радиусов и масс были раскручены до скорости вращения 480 об/мин и предоставлены самим себе. Под действием сил трения валов о подшипники первый остановился через 80 с, а второй сделал 240 оборотов до остановки. У какого маховика момент сил трения валов о подшипники был больше и во сколько раз?

5. Груз массой 700 кг падает с высоты 5 м для забивки сваи массой 300 кг. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая входит в грунт на глубину 4 см. Удар между грузом и сваей считать абсолютно неупругим.

6. Горизонтальная балка опирается своими концами на две опоры. Одну из опор быстро выбивают. Определить силу давления балки на другую опору сразу после удаления первой. Масса балки m. Балку считать однородным стержнем.

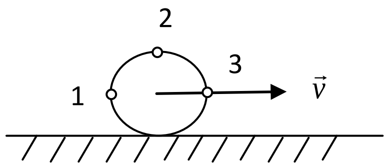
7. Два одинаковых шара претерпевают центральный удар. До удара второй шар неподвижен, первый движется со скоростью v_0 ($v_0 << c$). Характер удара таков, что потеря энергии составляет m-ю часть той, которая имела бы место

при абсолютно неупругом ударе. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара. Исследовать случаи: а) m = 1, б) m = 0.

8. Найти тензор инерции тонкой прямоугольной пластины массы M со сторонами a и b относительно осей, проходящих через центр масс пластины. Оси x и y параллельны сторонам пластины, ось z перпендикулярна плоскости пластины.

9. Вычислить момент импульса Земли M_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса M, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли – окружностью.

10. Цилиндр катится без скольжения с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найти скорости и ускорения точек 1, 2 и 3 (см. рисунок).



11. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы, называемой мюоном, τ = 2,2 мкс. Определить время жизни t мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь l = 30 км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найти скорость мюона v.

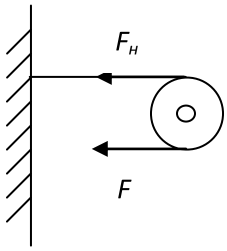
12. При какой скорости частицы v ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

13. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы массой $m = 0{,}4\ M$ каждая. Найти скорость v, с которой движутся эти частицы.

14. Два протона с энергией E = 50 ГэВ каждый движутся в системе K навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотрев этот процесс в системе K', в которой один из протонов неподвижен, определить энергию E' другого протона. Энергия покоя протона E_0 = 938 МэВ.

15. Частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найти зависимость от времени импульса $\vec{p}$ и скорости $\vec{v}$ частицы.

Вариант № 7



1. Однородный цилиндр массой m = 1 кг и радиусом R = 0,1 м способен вращаться относительно горизонтальной оси, совпадающей с его осью. К поверхности цилиндра прикреплена резинка, другой конец которой закреплен на стене. В начальный момент времени резинка не натянута. Цилиндр начинают вращать, прикладывая касательную силу F = 100 Н, так что резинка наматывается на него. Сила натяжения резинки зависит от ее удлинения $F_н = k \cdot \Delta l$, где k = 100 Н/м. Определить зависимость угловой скорости от угла поворота. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

2. Металлический шарик массой 5 г падает с высоты 1 м на горизонтальную поверхность стола и, отразившись от нее, поднимается на высоту 0,8 м. Определить среднюю силу удара, если соприкосновение шарика со столом длилось 0,01 с.

3. Человек, масса которого 70 кг, прыгает с неподвижной тележки со скоростью 7 м/с. Определить силу трения тележки о землю, если тележка после толчка остановилась через 5 с. Перед прыжком тележка была неподвижна относительно земли.

4. Прямой круглый однородный конус имеет массу m и радиус основания R. Найти момент инерции I конуса относительно его оси.

5. Деревянный шарик массой m = 0,1 кг падает с высоты h_1 = 2 м. Коэффициент восстановления скорости при ударе шарика о пол k = 0,5. Найти высоту h_2, на которую поднимается шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

6. Планета Марс имеет два спутника – Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r = 0{,}95 \cdot 10^4$ км от центра масс Марса, второй – на расстоянии $r = 2{,}4 \cdot 10^4$ км. Найти периоды обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

7. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала проволоки равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает ма-

териальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии l от его центра.

8. К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через время 5 с после начала действия силы?

9. Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

10. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 2,94 до I_2 = 0,98 кг$\cdot$м^2? Какую работу при этом совершит человек? Считать платформу однородным диском.

11. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

12. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией T = 10 ГэВ. Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

13. Солнце излучает поток энергии P = 3,9$\cdot$10^{26} Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в два раза? Излучение Солнца считать постоянным.

14. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра масс была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями T = 25 ГэВ?

15. Неподвижная частица с массой m распадается на три частицы с массами m_1, m_2, m_3. Найти наибольшую полную энергию, которую может иметь, например, частица m_1.

Вариант № 8

1. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{\min} = 183$ км, а максимальное удаление - $h_{\max} = 244$ км. Найти период обращения спутника вокруг Земли.

2. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) – одинакового радиуса R = 6 см и одинаковой массы m = 0,5 кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции I_1 и I_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, угол наклона плоскости α = 30°, начальная скорость каждого цилиндра v_0 = 0.

3. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L = 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через время t_2 = 20 с после начала движения.

4. Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

5. Шар массой 20 г, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 ($v_1 << c$), столкнулся с неподвижным шаром массой 40 г. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю δ своей кинетической энергии первый шар передал второму?

6. Найти тензор инерции тонкого диска относительно осей, проходящих через его центр. Масса диска m, радиус диска R.

7. На широте φ = 45° из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии l =

100 м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

8. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, как будет двигаться небольшое тело, если его уронить в узкий канал, просверленный вдоль земной оси.

9. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^{12} - b/r^{6}$ (потенциал Леннард-Джонса), где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1,5 0, 0) в точку (0, 2, 2).

10. Шар массы m, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), ударяется о неподвижный шар такой же массы. После абсолютно упругого нецентрального удара шары разлетаются под углами α и β к направлению движения первого шара. Доказать, что угол разлета шаров $\alpha + \beta = \pi/2$

11. В системе K', относительно которой стержень покоится, он имеет длину l' = 1 м и образует с осью x' угол $\alpha' = 45^{o}$. Определить в системе K длину стержня l и угол α, который образует стержень с осью x. Относительная скорость систем равна u = 0,5 c.

12. С какой скоростью должна лететь частица относительно системы отсчета K для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta\tau$ был в 10 раз меньше промежутка Δt, отсчитанного по часам системы K?

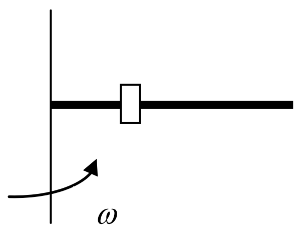
13. При какой скорости v погрешность при вычислении импульса по ньютоновской формуле $p = m\,v$ не превышает 1 %?

14. Две одинаковые частицы массы m каждая летят навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v. Столкнувшись, частицы сливаются в одну частицу. Какова масса M образовавшейся частицы? Найти M для v, равной: 0,1 c; 0,5 c; 0,999 c.

15. Какова энергия отдачи (в электрон-вольтах) для ядра с массой 10^{-26} кг после испускания гамма-луча с энергией в 1 МэВ?

Вариант № 9

1. Определить момент инерции тонкой пластины, имеющей форму равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, относительно оси, проходящей через центр масс треугольника перпендикулярно плоскости пластины.
2. Насадка электромиксера, имеющая форму диска радиусом R = 3 см и массой m = 100 г, раскручена до угловой скорости ω_0 = 60 об/мин в вязкой жидкости. После выключения миксера вращение насадки тормозится моментом сил вязкого трения, зависящим от угловой скорости $M_c = \alpha + \beta \cdot \omega$, где α = $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н·м, β = $1 \cdot 10^{-5}$ Н·м·с. Через сколько времени вращение прекратится? Сколько оборотов сделает при этом насадка?
3. Имеется очень тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы M. В центре полусферы находится частица массы m. Найти модуль F силы, с которой слой действует на частицу.
4. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90° имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась через время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить: 1) среднюю силу сопротивления стенки F_c и расстояние l, на которое пуля проникла; 2) с какой скоростью v_k пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.
5. Сплошной диск радиусом 20 см вращается под действием постоянной касательной силы 40 Н. Кроме того, на него действует момент сил трения 2 Н·м, и угловое ускорение его равно 30 рад/с^2. Определить массу диска.
6. Шарик массой m = 0,1 кг, двигающийся со скоростью v_1 = 2 м/с, сталкивается с таким же покоящимся шариком. Прицельный параметр столкновения шаров $b = 0{,}7 \cdot R$, где R = 2 см – радиус шаров. Определить скорости шаров после столкновения в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс. Удар абсолютно упругий.



7. Гладкий однородный стержень массой m = 1 кг и длиной 1 м способен вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов. На него надета небольшая муфта массой m_1 = 0,5 кг, которая находится на расстоянии $l/3$ от оси вращения. Стержню толчком сообщают угловую скорость $\omega_0 = 6$ рад/с. Определить угловую скорость стержня в момент времени, когда муфта достигнет конца стержня. Найти скорость муфты в этот момент.

8. Какую наименьшую работу надо совершить, чтобы доставить космический корабль массы $m = 2 \cdot 10^3$ кг с поверхности Земли на Луну? Сопротивление воздуха не учитывать.

9. Столб высоты h = 3 м и массы m = 50 кг падает из вертикального положения на Землю. Определить модуль момента импульса L столба относительно точки опоры и скорость v верхнего конца столба в момент удара о Землю.

10. Доказать, что потенциальная энергия тела произвольной формы, находящегося вблизи поверхности Земли, равна mgh, где m – масса тела, h – высота центра масс тела над уровнем, принятым за нулевой.

11. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

12. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составила 95 % скорости света?

13. При делении ядра урана $^{235}_{92}U$ освобождается энергия ΔE = 200 МэВ. Найти изменение массы Δm при делении одного моля урана.

14. Импульс тела массы m равен $p = m\,c$. Чему равна кинетическая энергия T тела?

15. Частица массы m движется вдоль оси x K-системы отсчета по закону $x = \sqrt{d^2 + c^2 t^2}$, где d – некоторая постоянная, c – скорость света, t – время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

Вариант № 10

1. Во сколько раз кинетическая энергия искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии?

2. Гладкий однородный стержень АВ массы M и длины l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец А. Из точки А начинает скользить по стержню небольшая муфта массы m. Найти скорость v' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца В.

3. Гироскоп в виде однородного диска радиуса R = 8 см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω = $3 \cdot 10^2$ рад/с. Угловая скорость прецессии гироскопа Ω = 1 рад/с. Определить расстояние l от точки опоры до центра масс гироскопа. Моментом инерции оси гироскопа пренебречь.

4. Легкая нить с прикрепленным к ней грузом массой 2 кг намотана на сплошной вал радиусом 10 см. При разматывании нити груз опускается с ускорением 0,5 м/с^2. Определить массу и момент инерции вала.

5. Маховик, момент инерции которого I = 1,2 кг$\cdot$м^2, раскручивают при помощи веревки, намотанной на его ось, радиус которой r = 2 см. Сила натяжения веревки убывает пропорционально угловой скорости маховика $F_н = \alpha - \beta \cdot \omega$, где α = 10 Н, β = 0,1 Н$\cdot$с. Найти зависимость угловой скорости от времени. До какой максимальной скорости раскрутится маховик? Найти закон вращения маховика.

6. Найти период обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось ее эллиптической орбиты превышает большую полуось земной орбиты на $0{,}24 \cdot 10^8$ км.

7. Лестница длины l =5 м и массы m =11,2 кг прислонена к гладкой стене под углом α = 70^о к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом k = 0,29. Найти: а) силу, с которой лестница давит на стену, б) предельное значение угла α_0, при котором лестница начинает скользить.

8. Частица массы m находится в силовом поле вида $\vec{F} = -(\alpha/r^2)\vec{e}_r$ (α - положительная константа, r – модуль, а $\vec{e}_r$ - орт радиус-вектора частицы). Частицу поместили в точку с радиус-вектором $\vec{r}_0$ и сообщили ей начальную скорость $\vec{v}_0$, перпендикулярную к $\vec{r}_0$. По какой траектории будет двигаться частица?

9. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a(x/y - y/z)$, где a – константа. Найти: а) силу, действующую на частицу, б) работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

10. Снаряд, летящий со скоростью v = 500 м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в 1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

11. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью 10 $с^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня, Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения теперь проходит через конец стержня. Найти угловую скорость во втором случае.

12. Два события произошли в K-системе отсчета в мировых точках с координатами x_1 = 5 м, x_2 = 3 м; y_1 =4 м, y_2 = 2 м; z_1 = z_2 =0; t_1 = 10 нс, t_2 = 20 нс. Можно ли найти систему отсчета, в которой оба события происходят : а) в один момент времени; б) в одной точке пространства? Могут ли эти события быть причинно связаны друг с другом?

13. Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения часов 240 000 км/с?

14. Определить периметр квадрата со стороной a, движущегося со скоростью c/2 вдоль одной из своих сторон.

15. Найти скорость частицы, кинетическая энергия которой 500 МэВ и импульс 865 МэВ/c, где с – скорость света.

Вариант № 11

1. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой ν = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

2. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^3 - b/r^2$, где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

3. Два одинаковых шара претерпевают центральный удар. До удара второй шар неподвижен, первый движется со скоростью v_0 ($v_0 << c$). Характер удара таков, что потеря энергии составляет m-ю часть той, которая имела бы место при абсолютно неупругом ударе. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара. Исследовать случаи: а) m = 1, б) m = 0.

4. Два маховика в виде дисков одинаковых радиусов и масс были раскручены до скорости вращения 480 об/мин и предоставлены самим себе. Под действием сил трения валов о подшипники первый остановился через 80 с, а второй сделал 240 оборотов до остановки. У какого маховика момент сил трения валов о подшипники был больше и во сколько раз?

5. Груз массой 700 кг падает с высоты 5 м для забивки сваи массой 300 кг. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая входит в грунт на глубину 4 см. Удар между грузом и сваей считать абсолютно неупругим.

6. Горизонтальная балка опирается своими концами на две опоры. Одну из опор быстро выбивают. Определить силу давления балки на другую опору сразу после удаления первой. Масса балки m. Балку считать однородным стержнем.

7. Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

8. Найти тензор инерции тонкой прямоугольной пластины массы M со сторонами a и b относительно осей, проходящих через центр масс пластины. Оси x и y параллельны сторонам пластины, ось z перпендикулярна плоскости пластины.

9. Вычислить момент импульса Земли M_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса M, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли – окружностью.

10. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, как будет двигаться небольшое тело, если его уронить в узкий канал, просверленный вдоль земной оси.

11. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

12. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией T = 10 ГэВ. Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

13. Солнце излучает поток энергии P = $3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в два раза? Излучение Солнца считать постоянным.

14. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра масс была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями T = 25 ГэВ?

15. Неподвижная частица с массой m распадается на три частицы с массами m_1, m_2, m_3. Найти наибольшую полную энергию, которую может иметь, например, частица m_1.

Вариант № 12

1. Насадка электромиксера, имеющая форму диска радиусом R = 3 см и массой m = 100 г, раскручена до угловой скорости ω_0 = 60 об/мин в вязкой жидкости. После выключения миксера вращение насадки тормозится моментом сил вязкого трения, зависящим от угловой скорости $M_c = \alpha + \beta \cdot \omega$, где α = $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н·м, β = $1 \cdot 10^{-5}$ Н·м·с. Через сколько времени вращение прекратится? Сколько оборотов сделает при этом насадка?

2. Прямой круглый однородный конус имеет массу m и радиус основания R. Найти момент инерции I конуса относительно его оси.

3. Деревянный шарик массой m = 0,1 кг падает с высоты h_1 = 2 м. Коэффициент восстановления скорости при ударе шарика о пол k = 0,5. Найти высоту h_2, на которую поднимается шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

4. Планета Марс имеет два спутника – Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии r = $0{,}95 \cdot 10^4$ км от центра масс Марса, второй – на расстоянии r = $2{,}4 \cdot 10^4$ км. Найти периоды обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

5. Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

6. Шар массой 20 г, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 ($v_1 << c$), столкнулся с неподвижным шаром массой 40 г. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю δ своей кинетической энергии первый шар передал второму?

7. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала проволоки равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии l от его центра.

8. Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

9. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 2,94 до I_2 = 0,98 кг·м^2? Какую работу при этом совершит человек? Считать платформу однородным диском.

10. На широте φ = 45^o из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии l = 100 м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

11. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы, называемой мюоном, τ = 2,2 мкс. Определить время жизни t мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь l = 30 км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найти скорость мюона v.

12. При какой скорости частицы v ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

13. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы массой $m = 0{,}4\ M$ каждая. Найти скорость v, с которой движутся эти частицы.

14. Два протона с энергией E = 50 ГэВ каждый движутся в системе K навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотрев этот процесс в системе K', в которой один из протонов неподвижен, определить энергию E' другого протона. Энергия покоя протона E_0 = 938 МэВ.

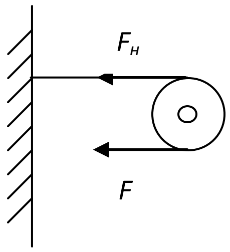
15. Частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найти зависимость от времени импульса $\vec{p}$ и скорости $\vec{v}$ частицы.

Вариант № 13

1. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) – одинакового радиуса R = 6 см и одинаковой массы m = 0,5 кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции I_1 и I_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, угол наклона плоскости α = 30°, начальная скорость каждого цилиндра v_0 = 0.

2. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L = 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через время t_2 = 20 с после начала движения.

3. Однородный цилиндр массой m = 1 кг и радиусом R = 0,1 м способен вращаться относительно горизонтальной оси, совпадающей с его осью. К поверхности цилиндра прикреплена резинка, другой конец которой закреплен на стене. В начальный момент времени резинка не натянута. Цилиндр начинают вращать, прикладывая касательную силу F = 100 Н, так что резинка наматывается на него. Сила натяжения резинки зависит от ее удлинения $F_н = k \cdot \Delta l$, где k = 100 Н/м. Определить зависимость угловой скорости от угла поворота. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.



4. К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через время 5 с после начала действия силы?

5. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^{12} - b/r^6$ (потенциал Леннард-Джонса), где a и b – положительные константы. Найти силу, действую-

щую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1,5 0, 0) в точку (0, 2, 2).

6. Металлический шарик массой 5 г падает с высоты 1 м на горизонтальную поверхность стола и, отразившись от нее, поднимается на высоту 0,8 м. Определить среднюю силу удара, если соприкосновение шарика со столом длилось 0,01 с.

7. Человек, масса которого 70 кг, прыгает с неподвижной тележки со скоростью 7 м/с. Определить силу трения тележки о землю, если тележка после толчка остановилась через 5 с. Перед прыжком тележка была неподвижна относительно земли.

8. Найти тензор инерции тонкого диска относительно осей, проходящих через его центр. Масса диска m, радиус диска R.

9. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{\min}$ = 183 км, а максимальное удаление - $h_{\max}$ = 244 км. Найти период обращения спутника вокруг Земли.

10. Шар массы m, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), ударяется о неподвижный шар такой же массы. После абсолютно упругого нецентрального удара шары разлетаются под углами α и β к направлению движения первого шара. Доказать, что угол разлета шаров $\alpha + \beta = \pi/2$.

11. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

12. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составила 95 % скорости света?

13. При делении ядра урана ${}^{235}_{92}U$ освобождается энергия ΔE = 200 МэВ. Найти изменение массы Δm при делении одного моля урана.

14. Импульс тела массы m равен $p = m\,c$. Чему равна кинетическая энергия T тела?

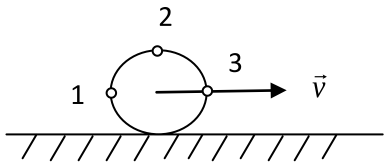
15. Частица массы m движется вдоль оси x K-системы отсчета по закону $x = \sqrt{d^2 + c^2 t^2}$, где d – некоторая постоянная, c – скорость света, t – время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

Вариант № 14

1. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90° имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась через время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить: 1) среднюю силу сопротивления стенки F_c и расстояние l, на которое пуля проникла; 2) с какой скоростью v_k пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.

2. Сплошной диск радиусом 20 см вращается под действием постоянной касательной силы 40 Н. Кроме того, на него действует момент сил трения 2 Н·м, и угловое ускорение его равно 30 рад/с^2. Определить массу диска.

3. Цилиндр катится без скольжения с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найти скорости и ускорения точек 1, 2 и 3 (см. рисунок).



4. Шарик массой m = 0,1 кг, двигающийся со скоростью v_1 = 2 м/с, сталкивается с таким же покоящимся шариком. Прицельный параметр столкновения шаров $b = 0{,}7 \cdot R$, где R = 2 см – радиус шаров. Определить скорости шаров после столкновения в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс. Удар абсолютно упругий.

5. Определить момент инерции тонкой пластины, имеющей форму равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, относительно оси, проходящей через центр масс треугольника перпендикулярно плоскости пластины.

6. Имеется очень тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы M. В центре полусферы находится частица массы m. Найти модуль F силы, с которой слой действует на частицу.

7. Гладкий однородный стержень АВ массы M и длины l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной

вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массы m. Найти скорость v' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

8. Какую наименьшую работу надо совершить, чтобы доставить космический корабль массы $m = 2 \cdot 10^3$ кг с поверхности Земли на Луну? Сопротивление воздуха не учитывать.

9. Столб высоты $h = 3$ м и массы $m = 50$ кг падает из вертикального положения на Землю. Определить модуль момента импульса L столба относительно точки опоры и скорость v верхнего конца столба в момент удара о Землю.

10. Доказать, что потенциальная энергия тела произвольной формы, находящегося вблизи поверхности Земли, равна mgh, где m – масса тела, h – высота центра масс тела над уровнем, принятым за нулевой.

11. В системе K', относительно которой стержень покоится, он имеет длину $l' = 1$ м и образует с осью x' угол $\alpha' = 45^o$. Определить в системе K длину стержня l и угол α, который образует стержень с осью x. Относительная скорость систем равна $u = 0,5\,c$.

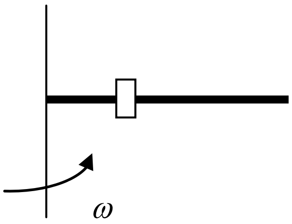
12. С какой скоростью должна лететь частица относительно системы отсчета K для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta\tau$ был в 10 раз меньше промежутка Δt, отсчитанного по часам системы K?

13. При какой скорости v погрешность при вычислении импульса по ньютоновской формуле $p = m\,v$ не превышает 1 %?

14. Две одинаковые частицы массы m каждая летят навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v. Столкнувшись, частицы сливаются в одну частицу. Какова масса M образовавшейся частицы? Найти M для v, равной: 0,1 c; 0,5 c; 0,999 c.

15. Какова энергия отдачи (в электрон-вольтах) для ядра с массой 10^{-26} кг после испускания гамма-луча с энергией в 1 МэВ?

Вариант № 15



1. Гладкий однородный стержень массой m = 1 кг и длиной 1 м способен вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов. На него надета небольшая муфта массой m_1 = 0,5 кг, которая находится на расстоянии $l/3$ от оси вращения. Стержню толчком сообщают угловую скорость $\omega_0 = 6$ рад/с. Определить угловую скорость стержня в момент времени, когда муфта достигнет конца стержня. Найти скорость муфты в этот момент.

2. Найти период обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось ее эллиптической орбиты превышает большую полуось земной орбиты на $0{,}24 \cdot 10^8$ км.

3. Во сколько раз кинетическая энергия искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии?

4. Гироскоп в виде однородного диска радиуса R = 8 см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 3 \cdot 10^2$ рад/с. Угловая скорость прецессии гироскопа Ω = 1 рад/с. Определить расстояние l от точки опоры до центра масс гироскопа. Моментом инерции оси гироскопа пренебречь.

5. Лестница длины l =5 м и массы m =11,2 кг прислонена к гладкой стене под углом $\alpha = 70^{o}$ к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом k = 0,29. Найти: а) силу, с которой лестница давит на стену, б) предельное значение угла α_0, при котором лестница начинает скользить.

6. Легкая нить с прикрепленным к ней грузом массой 2 кг намотана на сплошной вал радиусом 10 см. При разматывании нити груз опускается с ускорением 0,5 м/с^2. Определить массу и момент инерции вала.

7. Маховик, момент инерции которого I = 1,2 кг$\cdot$м^2, раскручивают при помощи веревки, намотанной на его ось, радиус которой r = 2 см. Сила натяжения веревки убывает пропорционально угловой скорости маховика $F_н = \alpha - \beta \cdot \omega$,

где α = 10 Н, β = 0,1 Н·с. Найти зависимость угловой скорости от времени. До какой максимальной скорости раскрутится маховик? Найти закон вращения маховика.

8. Частица массы m находится в силовом поле вида $\vec{F} = -\left(\alpha/r^2\right)\vec{e}_r$ (α - положительная константа, r – модуль, а $\vec{e}_r$ - орт радиус-вектора частицы). Частицу поместили в точку с радиус-вектором $\vec{r}_0$ и сообщили ей начальную скорость $\vec{v}_0$, перпендикулярную к $\vec{r}_0$. По какой траектории будет двигаться частица?

9. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a\left(x/y - y/z\right)$, где a – константа. Найти: а) силу, действующую на частицу, б) работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

10. Снаряд, летящий со скоростью v = 500 м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в 1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

11. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы, называемой мюоном, τ = 2,2 мкс. Определить время жизни t мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь l = 30 км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найти скорость мюона v.

12. При какой скорости частицы v ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

13. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы массой m = *0,4 M* каждая. Найти скорость v, с которой движутся эти частицы.

14. Два протона с энергией E = 50 ГэВ каждый движутся в системе K навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотрев этот процесс в системе K', в которой один из протонов неподвижен, определить энергию E' другого протона. Энергия покоя протона E_0 = 938 МэВ.

15. Частица массой m начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найти зависимость от времени импульса $\vec{p}$ и скорости $\vec{v}$ частицы.

Вариант № 16

1. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид $U = a/r^3 - b/r^2$, где a и b – положительные константы. Найти силу, действующую на частицу и работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).
2. Два одинаковых шара претерпевают центральный удар. До удара второй шар неподвижен, первый движется со скоростью v_0 ($v_0 << c$). Характер удара таков, что потеря энергии составляет m-ю часть той, которая имела бы место при абсолютно неупругом ударе. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара. Исследовать случаи: а) m = 1, б) m = 0.
3. Два маховика в виде дисков одинаковых радиусов и масс были раскручены до скорости вращения 480 об/мин и предоставлены самим себе. Под действием сил трения валов о подшипники первый остановился через 80 с, а второй сделал 240 оборотов до остановки. У какого маховика момент сил трения валов о подшипники был больше и во сколько раз?
4. Груз массой 700 кг падает с высоты 5 м для забивки сваи массой 300 кг. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая входит в грунт на глубину 4 см. Удар между грузом и сваей считать абсолютно неупругим.
5. Горизонтальная балка опирается своими концами на две опоры. Одну из опор быстро выбивают. Определить силу давления балки на другую опору сразу после удаления первой. Масса балки m. Балку считать однородным стержнем.
6. Доказать, что потенциальная энергия тела произвольной формы, находящегося вблизи поверхности Земли, равна mgh, где m – масса тела, h – высота центра масс тела над уровнем, принятым за нулевой.

7. Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

8. Найти тензор инерции тонкой прямоугольной пластины массы M со сторонами a и b относительно осей, проходящих через центр масс пластины. Оси x и y параллельны сторонам пластины, ось z перпендикулярна плоскости пластины.

9. Вычислить момент импульса Земли M_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса M, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли – окружностью.

10. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, как будет двигаться небольшое тело, если его уронить в узкий канал, просверленный вдоль земной оси.

11. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью 10 $с^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня, Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения теперь проходит через конец стержня. Найти угловую скорость во втором случае.

12. Два события произошли в K-системе отсчета в мировых точках с координатами x_1 = 5 м, x_2 = 3 м; y_1 =4 м, y_2 = 2 м; z_1 = z_2 =0; t_1 = 10 нс, t_2 = 20 нс. Можно ли найти систему отсчета, в которой оба события происходят : а) в один момент времени; б) в одной точке пространства? Могут ли эти события быть причинно связаны друг с другом?

13. Во сколько раз замедляется ход времени при скорости движения часов 240 000 км/с?

14. Определить периметр квадрата со стороной a, движущегося со скоростью $c/2$ вдоль одной из своих сторон.

15. Найти скорость частицы, кинетическая энергия которой 500 МэВ и импульс 865 МэВ/c, где с – скорость света.

Вариант № 17

1. Металлический шарик массой 5 г падает с высоты 1 м на горизонтальную поверхность стола и, отразившись от нее, поднимается на высоту 0,8 м. Определить среднюю силу удара, если соприкосновение шарика со столом длилось 0,01 с.

2. Человек, масса которого 70 кг, прыгает с неподвижной тележки со скоростью 7 м/с. Определить силу трения тележки о землю, если тележка после толчка остановилась через 5 с. Перед прыжком тележка была неподвижна относительно земли.

3. Найти тензор инерции тонкого диска относительно осей, проходящих через его центр. Масса диска m, радиус диска R.

4. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{\min}$ = 183 км, а максимальное удаление - $h_{\max}$ = 244 км. Найти период обращения спутника вокруг Земли.

5. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой ν = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

6. Планета Марс имеет два спутника – Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r = 0{,}95 \cdot 10^4$ км от центра масс Марса, второй – на расстоянии $r = 2{,}4 \cdot 10^4$ км. Найти периоды обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

7. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала проволоки равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии l от его центра.

8. Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

9. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 2,94 до I_2 = 0,98 кг$\cdot$м^2? Какую работу при этом совершит человек? Считать платформу однородным диском.

10. На широте φ = 45° из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии l = 100 м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

11. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

12. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией T = 10 ГэВ. Какую долю скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

13. Солнце излучает поток энергии P = 3,9$\cdot$10^{26} Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в два раза? Излучение Солнца считать постоянным.

14. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра масс была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями T = 25 ГэВ?

15. Неподвижная частица с массой m распадается на три частицы с массами m_1, m_2, m_3. Найти наибольшую полную энергию, которую может иметь, например, частица m_1.

Задание 3

Вариант №1.

1. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре t_1 = 7° С было p_1 = 100 кПа. При нагревании бутылки пробка вылетела. До какой температуры t_2 нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке p = 130 кПа?
2. Масса m = 12 г азота находится в закрытом сосуде объемом V = 2 л при температуре t = 10° С. После нагревания давление в сосуде стало равным p = 1,33 МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу при нагревании?
3. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, за цикл получает от нагревателя количество теплоты Q_1 = 2,512 кДж. Температура нагревателя T_1 = 400 К, температура холодильника T_2 = 300 К. Найти работу A, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику за один цикл.
4. Энтропия 1 г азота при температуре 25° С и давлении $1 \cdot 10^5$ Па равна S_1 = 6,84 Дж/(г·К). Определить энтропию 2 г азота при температуре 100° С и давлении $2 \cdot 10^5$ Па.
5. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью C. Кривая, изображающая политропический процесс, называется политропой. Найти уравнение политропы для идеального газа, теплоемкость C_V которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: 1) $C = C_V$, 2) $C = C_P$, 3) $C = 0$, 4) $C = \infty$.

Вариант №2.

1. Каким должен быть наименьший объем V баллона, вмещающего массу m = 6,4 кг кислорода, если его стенки при температуре t = 20° С выдерживают давление p = 15,7 МПа?

2. В сосуде объемом $V = 2$ л находится азот при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при p = const объем увеличился вдвое; б) при V = const давление увеличилось вдвое?

3. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73{,}5$ кДж, Температура нагревателя $t_1 = 100^{\circ}$ С, температура холодильника $t_2 = 0^{\circ}$ С. Найти кпд цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отданное за один цикл холодильнику.

4. Найти приращение энтропии $\Delta S_м$ моля одноатомного идеального газа при нагревании его от 0 до 273° С в случае, если нагревание происходит: а) при постоянном объеме, б) при постоянном давлении.

5. Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат x-компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

Вариант №3.

1. В баллоне находилась масса $m_1 = 10$ кг газа при давлении $p_1 = 10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2{,}5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.

2. На нагревание массы $m = 40$ г кислорода от температуры $t_1 = 16^{\circ}$ С до $t_2 = 40^{\circ}$ С затрачено количество теплоты $Q = 628$ Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

3. Тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6{,}28$ кДж. Найти кпд цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

4. Идеальный газ, расширяясь изотермически (при $T = 400$ К), совершает работу $A = 800$ Дж. Что происходит при этом с энтропией газа?

5. Вычислить скорость $v_{1/2}$ теплового движения молекулы газа, определяемую условием, что половина молекул движется со скоростью, меньшей, чем $v_{1/2}$, а другая половина – со скоростью, большей, чем $v_{1/2}$.

Вариант №4.

1. Найти массу m воздуха, заполняющего аудиторию высотой h = 5 м и площадью пола S = 200 м^2. Давление воздуха p = 100 кПа, температура помещения t = 17^o С. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль.
2. Для нагревания некоторой массы газа на Δt_1 = 50^o С при p = const необходимо затратить количество теплоты Q_1 = 670 Дж. Если эту же массу газа охладить на Δt_2 = 100^o С при V = const, то выделяется количество теплоты Q_2 = 1005 Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?
3. Тепловая машина работает по циклу Карно. Рабочим телом является воздух, который при давлении p_1 = 708 кПа и температуре t_1 =127^o С занимает объем V_1 = 2 л. После изотермического расширения воздух занял объем V_2 = 5 л; после адиабатического расширения объем стал равным V_3 = 8 л. Найти: а) координаты пересечения изотерм и адиабат; б) работу A, совершаемую на каждом участке цикла; в) полную работу A, совершаемую за весь цикл; г) кпд цикла.
4. В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при температуре T = 350 К, тело совершает работу A = 80 Дж, а внутренняя энергия тела получает приращение ΔU = 7,5 Дж. Что происходит с энтропией тела?
5. Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.

Вариант №5.

1. Во сколько раз плотность ρ_1 воздуха, заполняющего помещение зимой (t_1 = 7^o С), больше его плотности ρ_2 летом (t_2 = 37^o С)? Давление газа считать постоянным.

2. В закрытом сосуде объемом $V = 2$ л находится масса m азота и масса m аргона при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь на $\Delta t = 100^{o}$ С?

3. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 37$ кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой $t_2 = -10^{o}$ С и передает тепло телу с температурой $t_1 = 17^{o}$ С. Найти кпд цикла, количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданное более горячему телу за один цикл.

4. В результате нагревания массы $m = 22$ г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2\ T_1$, а энтропия увеличилась на $\Delta S = 4{,}19$ Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

5. Найти для газообразного азота при $T = 300$ К отношение числа молекул с компонентами скорости вдоль оси x в интервале $300 \pm 0{,}31$ м/с к числу молекул с компонентами скорости вдоль той же оси в интервале $500 \pm 0{,}51$ м/с.

Вариант №6.

1. Посередине откачанного и запаянного с обоих концов капилляра, расположенного горизонтально, находится столбик ртути длиной $l = 20$ см. Если капилляр поставить вертикально, то столбик ртути переместится на $\Delta l = 10$ см. До какого давления p_0 был откачан капилляр? Длина капилляра $L = 1$ м.

2. В результате обратимого изотермического (при $T = 300$ К) расширения 531 г азота (N_2) давление газа уменьшается от $p_1 = 20 \cdot 10^5$ Па до $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па. Определить: а) работу A, совершаемую газом при расширении, б) получаемое газом количество теплоты Q.

3. Паровая машина мощностью $P = 14{,}7$ кВт потребляет за время $t = 1$ ч работы массу $m = 8{,}1$ кг угля с удельной теплотой сгорания $q = 33$ МДж/кг. Температура котла $t_1 = 200^{o}$ С, температура холодильника $t_2 = 58^{o}$ С. Найти фак-

тический кпд машины и сравнить его с кпд идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.

4. Приращение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно ΔS = 4,19 кДж/К. Разность температур между двумя изотермами ΔT = 100 К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

5. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении плотность 1 г/л.

Вариант №7.

1. Каков должен быть вес P оболочки детского воздушного шарика, наполненного водородом, чтобы результирующая подъемная сила шарика F = 0, т.е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Воздух и водород находятся при нормальных условиях. Давление внутри шарика равно внешнему давлению. Радиус шарика r = 12,5 см.

2. 1 м^3 водорода при 0^o С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим невесомым поршнем. Атмосферное давление 730 мм рт. ст. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание водорода до 300^o С?

3. Идеальный газ (γ известно) совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изохорические – при объемах V_1 и V_2 (V_2 в e раз больше, чем V_1). Найти кпд цикла.

4. Гелий массы m = 1,7 г адиабатически расширили в 3 раза и затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

5. В длинном вертикальном сосуде находится газ, состоящий из двух сортов молекул с массами m_1 и m_2, причем $m_2 > m_1$. Концентрации этих молекул у дна сосуда равны соответственно n_1 и n_2, причем $n_2 > n_1$. Считая, что по всей

высоте поддерживается одна и та же температура T и ускорение свободного падения равно g, найти высоту h, на которой концентрации этих сортов молекул будут одинаковы.

Вариант №8.

1. В закрытом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится масса $m_1 = 1{,}6$ кг кислорода и масса $m_2 = 0{,}9$ кг воды. Найти давление p в сосуде при температуре $t = 500^o$ C, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.
2. Какое количество тепла Q потребовалось подвести к молю одноатомного газа при его изобарическом обратимом нагревании, если в процессе нагревания газ совершил внешнюю работу $A = 10$ Дж?
3. Идеальный газ (γ известно) совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изобар. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изобарические – при давлениях p_1 и p_2 (p_2 в e раз больше, чем p_1). Найти кпд цикла.
4. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}30$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в 2 раза, а давление уменьшилось в 3 раза.
5. Во сколько раз средняя длина свободного пробега молекул азота, находящегося при нормальных условиях, больше среднего расстояния между его молекулами?

Вариант №9.

1. В сосуде 1 объемом $V_1 = 3$ л находится газ под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. В сосуде 2 объемом $V_2 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0{,}1$ МПа. Температура газа в обоих сосудах одинакова. Под каким давлением p будет находиться газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой? Объемом трубки пренебречь.

2. В сосуде емкостью V = 10 л находится кислород O_2 под давлением P_0 = 1 атм. Стенки сосуда могут выдержать давление до P_1 = 10 атм. Какое максимальное количество тепла Q можно сообщить газу?

3. У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя в 1,6 раза больше температуры холодильника. За один цикл машина производит работу A = 12 кДж. Какая работа за цикл затрачивается на изотермическое сжатие рабочего вещества?

4. Процесс расширения двух молей аргона происходит так, что давление газа увеличивается прямо пропорционально его объему. Найти приращение энтропии газа при увеличении его объема в 2 раза.

5. Как изменится коэффициент диффузии и вязкость идеального газа, если его объем увеличить в n раз: а) изотермически; б) изобарически?

Вариант №10.

1. Закрытый сосуд объемом V = 2 л наполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным p = 0,14 МПа. Какая масса m эфира была введена в сосуд?

2. Чему равно отношение $\gamma = C_p / C_v$ для аргона, если при нагревании 1 кг аргона на 2° С при постоянном давлении 760 мм рт. ст. требуется 250 кал, а при охлаждении его от 100 до 0° С при давлении 10 атм в постоянном объеме 5 л выделяется 500 кал?

3. В каком случае кпд цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

4. Идеальный газ, расширяясь изотермически (при T = 400 К), совершает работу A = 800 Дж. Что происходит при этом с энтропией газа?

5. Зная вязкость гелия при нормальных условиях, вычислить эффективный диаметр его атома.

Вариант №11.

1. В сосуде объемом V = 0,5 л находится масса m = 1 г парообразного йода (I_2). При температуре t = 1000° С давление в сосуде p_c = 93,3 кПа. Найти степень диссоциации α молекул йода на атомы. Молярная масса молекул йода μ = 0,254 кг/моль.

2. Масса m = 12 г азота находится в закрытом сосуде объемом V = 2 л при температуре t = 10° С. После нагревания давление в сосуде стало равным p = 1,33 МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу при нагревании?

3. Водород совершает цикл Карно. Найти кпд цикла, если при адиабатическом расширении: а) объем газа увеличивается в 2 раза; б) давление уменьшается в 2 раза.

4. В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при температуре T = 350 К, тело совершает работу A = 80 Дж, а внутренняя энергия тела получает приращение ΔU = 7,5 Дж. Что происходит с энтропией тела?

5. Теплопроводность гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

Вариант №12.

1. В воздухе содержится 23,6 % кислорода и 76,4 % азота (по массе) при давлении p = 100 кПа и температуре t = 13° С. Найти плотность ρ воздуха и парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота.

2. В сосуде объемом V = 2 л находится азот при давлении p = 0,1 МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при p = const объем увеличился вдвое; б) при V = const давление увеличилось вдвое?

3. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти кпд такого цикла, если температура T газа

возрастает в n раз как при изохорическом нагреве, так и при изобарическом расширении.

4. В результате нагревания массы m = 22 г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до T_2 = 1,2 T_1, а энтропия увеличилась на ΔS = 4,19 Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

5. Пространство между двумя большими горизонтальными пластинами заполнено гелием. Расстояние между пластинами 50 мм. Нижняя пластина поддерживается при температуре 290 К, верхняя – при 330 К. Давление газа близко к нормальному. Найти плотность потока тепла.

Вариант №13.

1. В сосуде находится масса m_1 = 10 г углекислого газа и масса m_2 = 15 г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре t = 27° С и давлении p = 150 кПа.

2. На нагревание массы m = 40 г кислорода от температуры t_1 =16° С до t_2 = 40° С затрачено количество теплоты Q = 628 Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

3. Тепловая машина работает по циклу Карно. Рабочим телом является воздух, который при давлении p_1 = 708 кПа и температуре t_1 =127° С занимает объем V_1 = 2 л. После изотермического расширения воздух занял объем V_2 = 5 л; после адиабатического расширения объем стал равным V_3 = 8 л. Найти: а) координаты пересечения изотерм и адиабат; б) работу A, совершаемую на каждом участке цикла; в) полную работу A, совершаемую за весь цикл; г) кпд цикла.

4. Приращение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно ΔS = 4,19 кДж/К. Разность температур между двумя изотермами ΔT = 100 К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

5. Вычислить с помощью распределения Максвелла $\varphi(v_x)$ число молекул газа, падающих в единицу времени на единичную площадку, если концентрация молекул n, температура газа T и масса каждой молекулы m_0.

Вариант №14.

1. Для получения хорошего вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать стенки сосуда при откачке для удаления адсорбированного газа. Насколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом r = 10 см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд? Площадь поперечного сечения молекул $s_0 = 10^{-19}$ м^2. Температура газа в сосуде t = 300^o С. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным.

2. Для нагревания некоторой массы газа на Δt_1 = 50^o С при p = const необходимо затратить количество теплоты Q_1 = 670 Дж. Если эту же массу газа охладить на Δt_2 = 100^o С при V = const, то выделяется количество теплоты Q_2 = 1005 Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

3. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу A = 37 кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой t_2 = -10^o С и передает тепло телу с температурой t_1 = 17^o С. Найти кпд цикла, количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданное более горячему телу за один цикл.

4. Гелий массы m = 1,7 г адиабатически расширили в 3 раза и затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

5. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью C. Кривая, изображающая политропический процесс, называется политропой. Найти уравнение политропы для идеального газа, теплоемкость C_V которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: 1) $C = C_V$, 2) $C = C_P$, 3) $C = 0$, 4) $C = \infty$.

Вариант №15.

1. В сосуде находится количество ν_1 = 10^{-7} моль кислорода и масса m_2 = 10^{-6} г азота. Температура смеси t = 100° С, давление в сосуде p = 133 мПа. Найти объем V сосуда, парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда.
2. В закрытом сосуде объемом V = 2 л находится масса m азота и масса m аргона при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь на Δt = 100° С?
3. Паровая машина мощностью P = 14,7 кВт потребляет за время t = 1 ч работы массу m = 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания q = 33 МДж/кг. Температура котла t_1 = 200° С, температура холодильника t_2 = 58° С. Найти фактический кпд машины и сравнить его с кпд идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.
4. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты γ = 1,30, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в 2 раза, а давление уменьшилось в 3 раза.
5. Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат x-компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

Вариант №16.

1. Ротационный насос захватывает за один оборот объем газа v и выталкивает его в атмосферу. Сколько оборотов n должен сделать насос, чтобы понизить давление воздуха в сосуде объемом V от значения p_0 до p?
2. В результате обратимого изотермического (при T = 300 К) расширения 531 г азота (N_2) давление газа уменьшается от p_1 = $20 \cdot 10^5$ Па до p_2 = $2 \cdot 10^5$ Па.

Определить: а) работу A, совершаемую газом при расширении, б) получаемое газом количество теплоты Q.

3. Идеальный газ (γ известно) совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), изохорические – при объемах V_1 и V_2 (V_2 в e раз больше, чем V_1). Найти кпд цикла.

4. Процесс расширения двух молей аргона происходит так, что давление газа увеличивается прямо пропорционально его объему. Найти приращение энтропии газа при увеличении его объема в 2 раза.

5. Вычислить скорость $v_{1/2}$ теплового движения молекулы газа, определяемую условием, что половина молекул движется со скоростью, меньшей, чем $v_{1/2}$, а другая половина – со скоростью, большей, чем $v_{1/2}$.

Вариант №17.

1. В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндре находится массивный поршень, по обе стороны которого – по одному молю воздуха. При T = 300 К отношение верхнего объема к нижнему равно 4,0. При какой температуре это отношение станет равным 3,0? Трение не учитывать.

2. 1 м^3 водорода при 0^o С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим невесомым поршнем. Атмосферное давление 730 мм рт. ст. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание водорода до 300^o С?

3. В каком случае кпд цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

4. Найти приращение энтропии $\Delta S_м$ моля одноатомного идеального газа при нагревании его от 0 до 273^o С в случае, если нагревание происходит: а) при постоянном объеме, б) при постоянном давлении.

5. Найти для газообразного азота при $T = 300$ К отношение числа молекул с компонентами скорости вдоль оси x в интервале $300 \pm 0{,}31$ м/с к числу молекул с компонентами скорости вдоль той же оси в интервале $500 \pm 0{,}51$ м/с.

Список использованных источников

1. Е.И Бутиков, А.С. Кондратьев. Физика. Книга 1. Механика. М.: Физматлит, 1994. 368 с.
2. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. Спб.: Издательство «Лань», 2004. 416 с.
3. В.С. Волькенштейн. Сборник задач по общему курсу физики. Спб.: СпецЛит, 2002. 327 с.
4. И.В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике. М.: ООО «Издательство Астрель», 2001. 318 с.
5. В.М. Гладской, П.И. Самойленко. Физика. Сборник задач с решениями. М.: Дрофа, 2004. 288 с.
6. А.С. Кондратьев, В.М. Уздин. Физика. Сборник задач. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
7. М.П. Шаскольская, И.А. Эльцин. Сборник избранных задач по физике. М.: Наука, 1986. 208 с.
8. Л.П. Баканина, В.Е. Белонучкин, С.М. Козел, Н.Н. Колачевский, Г.И. Косоуров, И.П. Мазанько. Сборник задач по физике. М.: Наука, 1975. 415 с.
9. И.И. Воробьев, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко, А.М. Трубачев, В.Г. Харитонов. Задачи по физике. М.: Наука, 1988. 416 с.

Оглавление