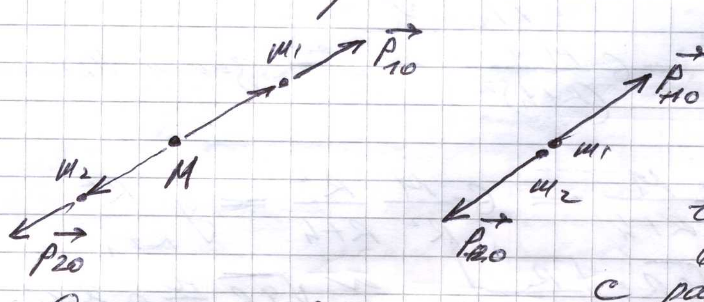
Лекции 9 и 10 Применение законов сохранения импульса и энергии к анализу распадов и столкновений нерелятивистских частиц.

§1. Распад покоящейся частицы массы M на две частицы масс m_1 и m_2.

Рассмотрим, применяя законы сохранения импульса и энергии, распад частицы массы M, которая покоится, на две нерелятивистские частицы масс m_1 и m_2.



Очевидно, в силу закона сохранения импульса

$$\vec{P}_{10}+\vec{P}_{20}=0,$$

$$\vec{P}_{10}=-\vec{P}_{20}$$

частицы разлетаются в противоположные стороны с равными по модулю импульсами.

Считая продукты распада нерелятивистскими частицами, движущимися со скоростями $|\vec{V}_{10}|, |\vec{V}_{20}| \ll c$, много меньшими скорости света, выпишем закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}_{-вн0}=\mathcal{E}_{+вн10}+\mathcal{E}_{+вн20}+\vec{P}_{+10}^{\,2}\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right),$$

здесь для кинетических энергий образовавшихся частиц использовались выражения нерелятивистской механики Ньютона:

$$K_{+10}=\frac{\vec{P}_{+10}^{\,2}}{2m_1}=\frac{m_1\vec{V}_{+10}^{\,2}}{2},\quad K_{+20}=\frac{m_2\vec{V}_{+20}^{\,2}}{2}=\frac{\vec{P}_{+20}^{\,2}}{2m_2}=\frac{\vec{P}_{+10}^{\,2}}{2m_2}$$

поэтому продукты распада охарактеризованы, как нерелятивистские частицы.

Поясним применяемые обозначения:

$\vec{P}_{+10}$, $\vec{P}_{+20}$ — импульсы образовавшихся в результате распада частиц

$\vec{P}_{+10}$ — «+» — после распада; «0» — в системе центра инерции, где суммарный импульс двух частиц равен нулю

$\mathcal{E}_{-вн0}$ — внутренняя энергия родительской частицы массы M, смысл её прояснится после рассмотрения специальной теории относительности (СТО) — механики Эйнштейна больших скоростей.

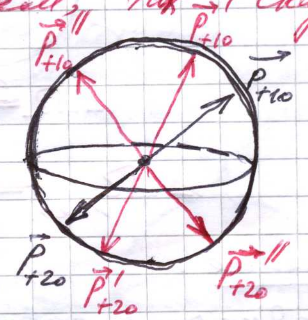
$\mathcal{E}_{+вн10}$, $\mathcal{E}_{+вн20}$ — внутренние энергии продуктов распада.

Из закона сохранения энергии получаем следующее важное заключение:

$$|\vec{P}_{+10}|^2=|\vec{P}_{+20}|^2=\frac{\mathcal{E}_{-вн0}-\mathcal{E}_{+вн10}-\mathcal{E}_{+вн20}}{\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}}=Const,$$

$$|\vec{v}_{+10}|=\frac{|\vec{P}_{+10}|}{m_1}=Const_1,\quad |\vec{v}_{+20}|=\frac{|\vec{P}_{+20}|}{m_2}=Const_2$$

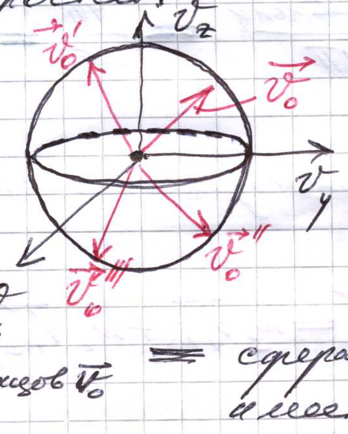
Смысл сформулированного заключения состоит в том, что при рассмотрении распадов тождественных частиц массы M импульсы продуктов распада могут быть произвольно направленными, но модуль их от распада к распаду сохраняет постоянное значение, так как это показано на рисунке, имеем, так сказать, „ёжик" импульсов продуктов распада:



Если следить за скоростью одного из продуктов распада, например, частицы m_1, скоростью $\vec{v}_{+10}$, то модуль этой скорости при рассмотрении большого числа распадов тождественных частиц M также сохраняет постоянное значение. Частица m_1 в СЦИ-системе может равновероятно вылететь в любом направлении, но концы векторов скорости этой частицы лежат на сфере радиуса v_0.

$\vec{v}_{+10} \xrightarrow[\text{краткости}]{\text{для}} \vec{v}_0$ — скорость первого продукта распада m_1 в СЦИ, системе покоя родительской частицы M

$ГМТ_{\text{концов } \vec{v}_0}$ — геометрическое место точек концов $\vec{v}_0$ образует сферу радиуса $|\vec{v}_0|$ в пространстве скоростей:



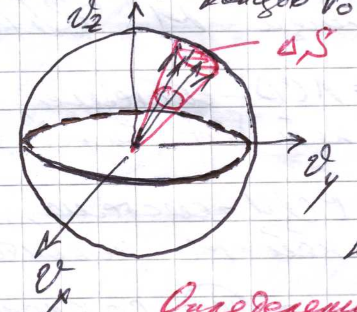
$\vec{v}_0, \vec{v}'_0, \vec{v}''_0, \vec{v}'''_0$ — скорости продукта распада m_1 в различных экземплярах распада тождественных частиц M.

$|\vec{v}_0| = |\vec{v}'_0| = |\vec{v}''_0| = \ldots = const = |\vec{v}_0|$.

$ГМТ_{\text{концов } \vec{v}_0}$ = сфера в пр-ве скоростей, её уравнение имеет вид:

$$v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2.$$

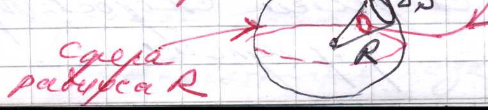
Все направления вылета продукта распада m_1 мы будем считать равновероятными. Можно легко подсчитать вероятность вылета продукта распада в площадку ΔS сферы $ГМТ_{\text{концов } \vec{v}_0}$:



$$w_{\Delta S} = \frac{\Delta S}{S_{сф}} = \frac{\Delta\Omega R^2}{4\pi R^2} = \frac{\Delta\Omega v_0^2}{4\pi v_0^2} = \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

Площадке ΔS на сфере соотв. телесный угол $\Delta\Omega$

Определение $\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{R^2}$ — элемент телесного (объемного) угла

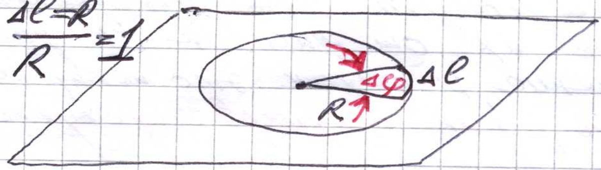


$$\Delta\Omega_{полн} = \frac{S_{сф}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Линейный угол в радианах (на плоскости)

Телесный угол (в пространстве)

$1\,рад = \frac{\Delta l = R}{R} = 1$



$$\Delta\varphi \stackrel{def}{=} \frac{\Delta l}{R}$$

$$\Delta\varphi_{полн.} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

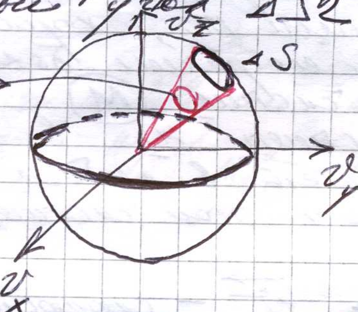
$$\Delta\Omega \stackrel{def}{=} \frac{\Delta S}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Delta\Omega_{полн.} = \frac{S_{сф}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2}$$

Применение:

Вероятность вылета продукта распада m_1 в телесный угол $\Delta\Omega$:

$$\frac{\Delta S}{R^2} = \Delta\Omega$$



$$\Delta W_{\Delta\Omega} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega_{полн}} =$$

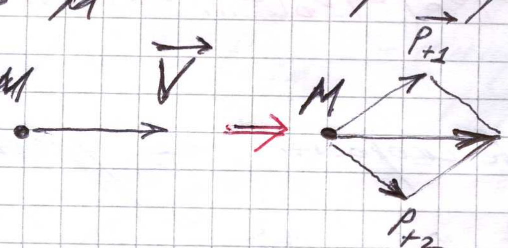
$$\Delta W_{в\,\Delta S} = \Delta W_{в\,\Delta\Omega} = \frac{\Delta S}{S_{сф}} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega_{полн}} = \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

Вероятность вылета продукта куда угодно, очевидно, равна единице!

$$\Delta W(\text{куда угодно}) = \frac{\Delta\Omega_{полн}}{4\pi} = \frac{4\pi}{4\pi} = 1$$

§2. Распад движущейся частицы.

Рассмотрим теперь распад движущейся частицы массы M

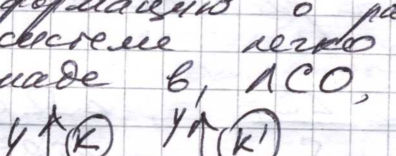


$$M\vec V = m_1 \vec V_{+1} + m_2 \vec V_{+2}$$

Закон сохр. импульса в данном случае

Частицы m_1 и m_2 из-за $M\vec V \neq 0$ уже вылетают под некоторым углом друг другу.

Информацию о распаде неподв. частицы M в СЦИ системе легко "пересчитать" в информацию о распаде в ЛСО, где частица M движется.



$K \equiv$ ЛСО-система, в ней M движется с $\vec V$

$K' \equiv$ СЦИ-система, в ней M покоится

K' движется относит. K со скоростью $\vec V$.

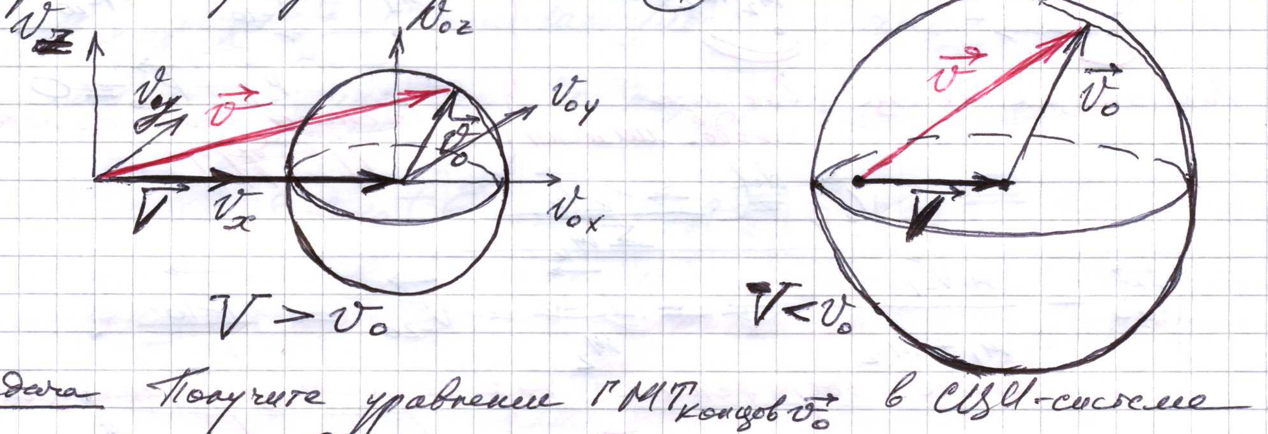
Согласно закону сложения скоростей скорость $\vec v$ продукта распада m_1 в K даётся формулой:

$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{V}$ ← скорость частицы (M)

← скорость продукта распада (M₁) в СЦИ-системе покоя M

скорость продукта распада в ЛСО-системе

В соответствии с приведенным законом сложения скоростей можно нарисовать следующие диаграммы для скоростей продукта распада (M₁):



Задача. Получите уравнение ГМТ концов $\vec{v_0}$ в СЦИ-системе

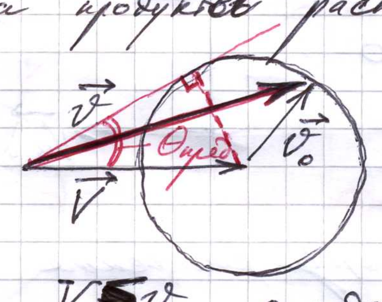
Ответ: $v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = |\vec{v_0}|^2$ — ур-е сферы

Задача. Получите уравнение ГМТ концов $\vec{v}$ в ЛСО-системе.

Указание: $\vec{v_0} = \vec{v} - \vec{V} = (v_x - V, v_y, v_z)$

Ответ: $(v_x - V)^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2$ — уравнение смещенной на V сферы

Очевидно, при $V > v_0$ существует предельный угол вылета продуктов распада в ЛСО:



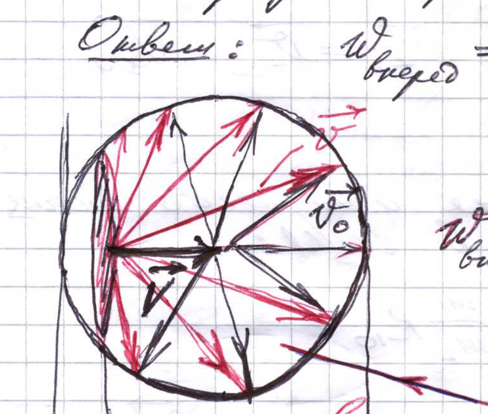
Задача

Определите $\theta_{пред}$

Ответ: $\sin\theta_{пред} = \frac{v_0}{V}$.

Задача. При $V < v_0$ определите вероятности вылета продуктов распада "вперёд", "назад".

Ответ: $w_{вперёд} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V}{v_0}\right)$, $w_{назад} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V}{v_0}\right)$



Указание:

$$w_{вперёд} = \frac{S_{шапочки\ c\ (v_0+V)}}{S_{сф}} = \frac{2\pi v_0 (v_0 + V)}{4\pi v_0^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V}{v_0}\right)$$

На рисунке показаны возможные направления вылета продукта распада в направлении „вперёд"

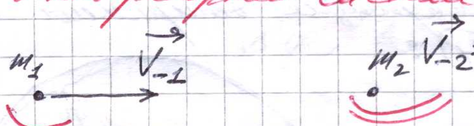
$v_0 + V$ — размер "шапочки" — соотв. вылетам вперёд" — в переднюю часть сферы.

$v_0 - V$ — размер „шапочки", соотв. вылетам назад

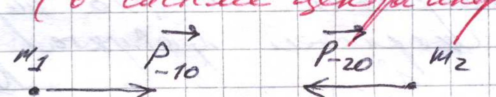
§3. Импульсные диаграммы для упругих (и неупругих) столкновений частиц в СЦИ

Существуют следующие постановки задач о столкновении частиц:

В ЛСО-системе (в лабораторной системе отсчёта) | В СЦИ-системе (в системе центра инерции)



Налетающая частица; Частица неподв. мишень



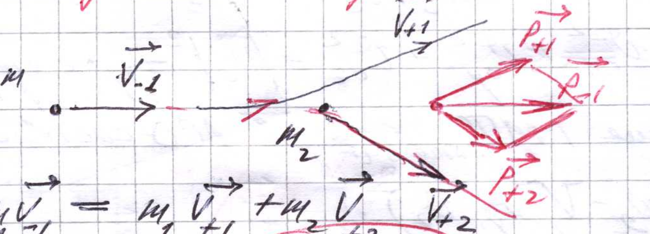
$\vec P_{-10}+\vec P_{-20}=0$

Частицы движутся навстречу друг другу

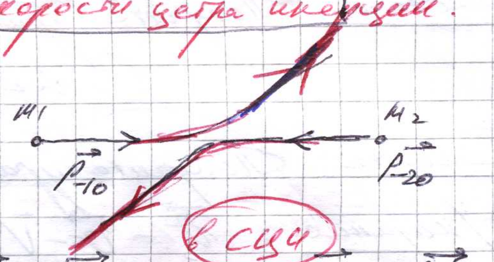
$$\vec V_{ц.и} \overset{def}{=} \frac{\sum m_k \vec V_k}{\sum m_k}$$

$$\boxed{\vec V_{ц.и} = \frac{m_1 \vec V_{-1}}{m_1+m_2} = -\frac{\vec P_{-20}}{m_2} = -\vec \vartheta_{-20} = \frac{\vec P_{-10}}{m_2}}$$

Различные выражения для скорости центра инерции.



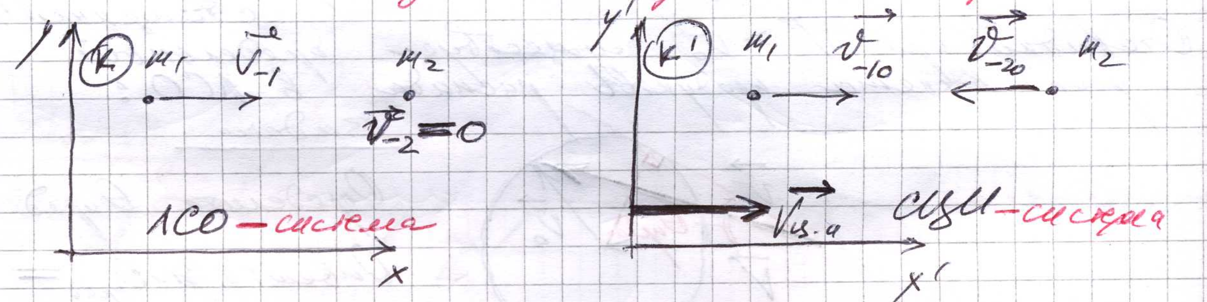
$m_1\vec V_{-1} = m_1\vec V_{+1} + m_2\vec V_{+2}$ в ЛСО



в СЦИ

$\vec P_{-10}+\vec P_{-20}=0=\vec P_{+10}+\vec P_{+20}$

Так выглядят законы сохранение импульса



Имеем согласно закону сложения скоростей:

$$\vec\vartheta_{-1} = \vec\vartheta_{-10} + \vec V_{ц.и}, \quad \vec\vartheta_{+1} = \vec\vartheta_{+10} + \vec V_{ц.и}$$

$$\vec\vartheta_{-2} = \vec\vartheta_{-20} + \vec V_{ц.и} = \vec\vartheta_{-20} - \frac{\vec P_{-20}}{m_2} = 0, \quad \vec\vartheta_{+2} = \vec\vartheta_{+20} + \vec V_{ц.и}$$

$$\vec\vartheta = \vec\vartheta_0 + \vec V$$

Отсюда получаем выражение для импульсов частиц в ЛСО через импульсы частиц в СЦИ:

$$\vec P_{-1} = m_1\vec\vartheta_{-10} + m_1\frac{\vec P_{-10}}{m_2} = \vec P_{-10} + \frac{m_1}{m_2}\vec P_{-10}$$

$$\vec P_{+1} = \vec P_{+10} + \frac{m_1}{m_2}\vec P_{-10}, \quad \vec P_{-2} = 0, \quad \vec P_{+2} = \vec P_{+20} + \vec P_{-10} = \vec P_{-10} - \vec P_{+10}$$

Далее привлечём также и закон сохранения энергии, в СЦИ системе он имеет вид:

(*) $$\mathcal{E}_{-вн10} + \mathcal{E}_{-вн20} + \vec P_{-10}^2\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right) = \mathcal{E}_{+1вн0} + \mathcal{E}_{+2вн0} + \vec P_{+10}^2\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)$$

В последней формуле для каждой из сталкивающихся частиц использована формула для её полной энергии

$$E_{\pm 10} = E_{\pm 10\,внутр} + \frac{\vec{P}_{\pm 10}^{\,2}}{2m_1}, \quad E_{\pm 20} = E_{\pm 20\,внутр} + \frac{\vec{P}_{\pm 20}^{\,2}}{2m_2}$$

Полная энергия частицы складывается из её внутренней энергии и кинетической энергии $mV^2/2 = \vec{P}^2/2m$. Смысл внутренней энергии частицы выясняется в рамках СТО (специальной теории относительности) и атомной физики. Сталкивающиеся частицы считаются нерелятивистскими.

Различают упругие и неупругие столкновения.

Определение. Величина

$$E_{-вн10} + E_{-вн20} - E_{+вн10} - E_{+вн20} = Q \quad (**)$$

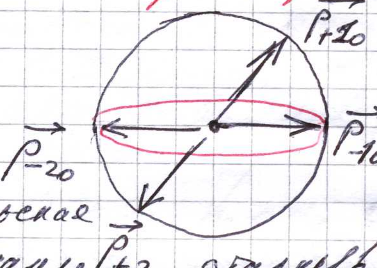
называется тепловой энергией реакции столкновения частиц. (А) Если $Q = 0$, то столкновение частиц — упругое. При $Q \neq 0$, столкновение частиц — неупругое.

(Б) $Q > 0$ — реакция столкновения идёт с выделением тепла — экзотермическая реакция. Кинетич. энергия образовавшихся частиц больше кинетич. эн. исходных.

(В) $Q < 0$ — реакция столкновения частиц идёт с поглощением тепла — эндотермическая реакция. Кинетич. энергия образовавшихся частиц меньше кин. эн. исходных.

В силу закона сохранения (*) и определения (**) величины Q заключаем, что

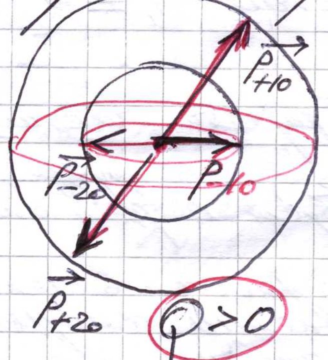
(А) Для упругих столкновений с $Q = 0$ $|\vec{P}_{+10}| = |\vec{P}_{-10}|$ — импульсы сталкивающихся в СЦИ частиц не изменяют своей величины, они лишь поворачиваются на некоторый угол:



Импульсная диаграмма сталкив. частиц в СЦИ

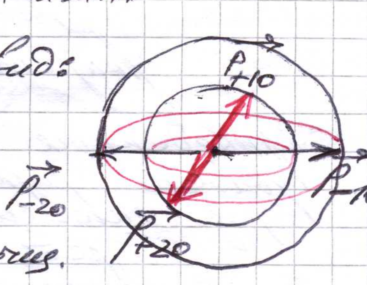
Траектории сталкив. частиц в СЦИ

(Б) $Q > 0$ — неупругое столкновение "с выделением тепла". В силу (*) и (**) $|\vec{P}_{-10}| < |\vec{P}_{+10}|$ и импульсная диаграмма принимает вид:



$Q > 0$

(В) $Q < 0$ — неупругое столкновение "с поглощением тепла". В силу (*) и (**) $|\vec{P}_{-10}| > |\vec{P}_{+10}|$ и имп. диаграмма примет следующий вид:



Под "тепловой" энергией в ядерных реакциях понимают обычно кинетическую энергию частиц.

§4. Импульсные диаграммы для упр. и неупр. столкнов. в ЛСО

Для решения задач на столкновение частиц очень удобно использовать импульсные диаграммы, на которых показывают импульсы всех сталкивающихся частиц до столкновения и импульсы частиц после столкновения.

Покажем как строятся импульсные диаграммы для упругих и неупругих столкновений частиц в ЛСО-системе, т.е. в лабораторной системе отсчёта.

При этом будем исходить из полученных выше формул для импульсов частиц в ЛСО

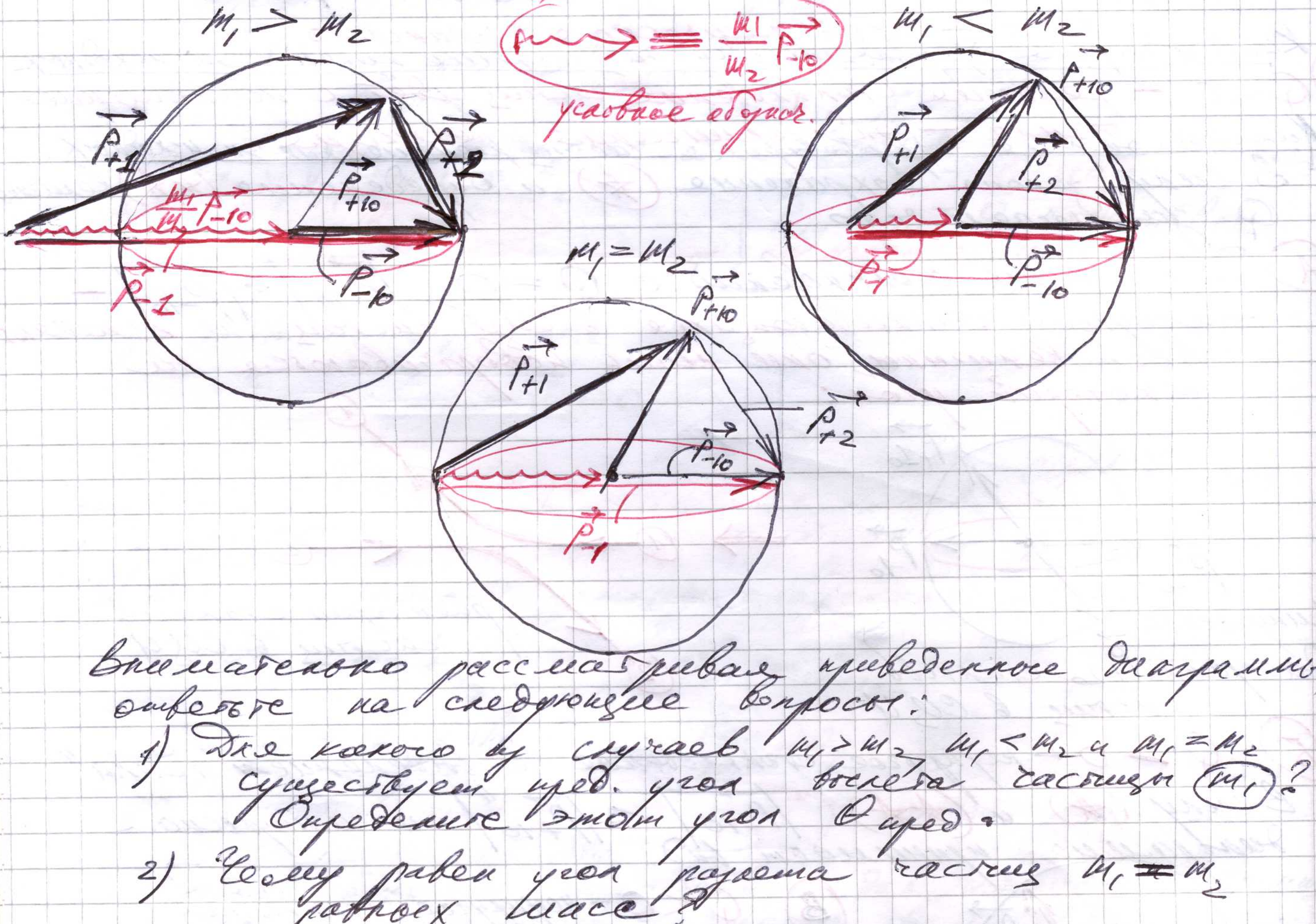
$$\vec{p}_{-1} = \vec{p}_{-10} + \frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{-10}, \qquad \vec{p}_{+1} = \vec{p}_{+10} + \frac{m_1}{m_2}\vec{p}_{-10}$$

$$\vec{p}_{-2} = 0, \qquad \vec{p}_{+2} = \vec{p}_{+20} + \vec{p}_{-10} = \vec{p}_{-10} - \vec{p}_{+10},$$

выраженных через соответствующие импульсы в СЦ

$Q = 0$ – упругие столкновения

$$|\vec{p}_{-10}| = |\vec{p}_{-20}| = |\vec{p}_{+10}| = |\vec{p}_{+20}|$$



Внимательно рассматривая приведенные диаграммы ответьте на следующие вопросы:

1) Для какого из случаев $m_1 > m_2$, $m_1 < m_2$ и $m_1 = m_2$ существует пред. угол вылета частицы m_1? Определите этот угол $\theta_{пред}$.

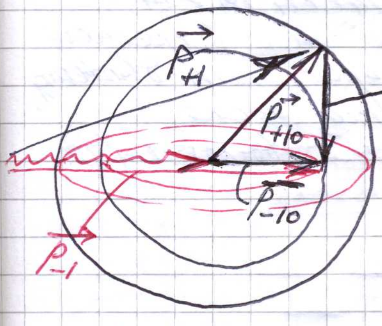
2) Чему равен угол разлета частиц $m_1 = m_2$ равных масс?

3) Что можно сказать об углах разлета частиц при $m_1 > m_2$ и $m_1 < m_2$, какой из указанных случаев соответствует острый или тупой угол разлета.

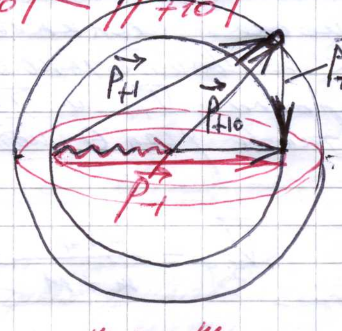
Приведённые диаграммы дают возможность в целом увидеть различные варианты направлений импульсов разлетающихся при столкновениях частиц, т.е. обозреть все случаи возможных направлений вылетающих частиц. С диаграммами очень удобно решать конкретные задачи.

$Q > 0$ — неупругие столкновения

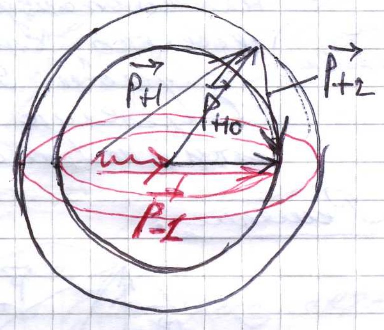
$|\vec{P}_{-10}| < |\vec{P}_{+10}|$



$m_1 > m_2$



$m_1 = m_2$



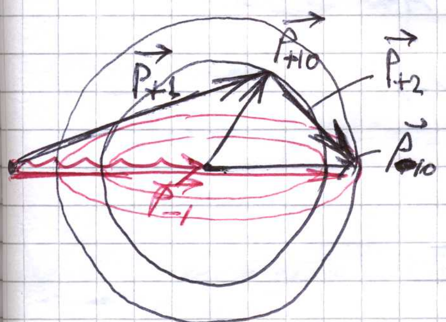
$m_1 < m_2$

$Q < 0$ — неупругие столкновения

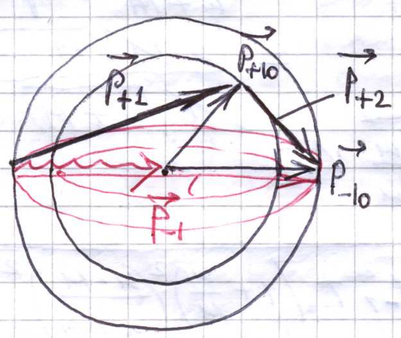
$|\vec{P}_{-10}| > |\vec{P}_{+10}|$

$\rightsquigarrow = \frac{m_1}{m_2}\vec{P}_{-10}$

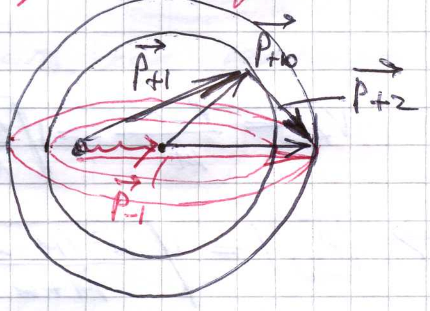
условное обозначение.



$m_1 > m_2$



$m_1 = m_2$



$m_1 < m_2$

По поводу показанных импульсных диаграмм для неупругих столкновений можно сформулировать ряд упражнений и задач.

Задача 1. Используя формулы для импульсов ЛСО, выраженных через импульсы в СЦИ, покажите, как строятся импульсные диаграммы для указанных выше случаев

(1) $Q > 0$, $m_1 > m_2$; (2) $Q > 0$, $m_1 = m_2$ (3) $Q > 0$, $m_1 < m_2$

(4) $Q < 0$, $m_1 > m_2$; (5) $Q < 0$, $m_1 = m_2$ (6) $Q < 0$, $m_1 < m_2$.

Задача 2 $m_1 = m_2$, острым или тупым будет угол разлета частиц при $Q > 0$, $Q < 0$?

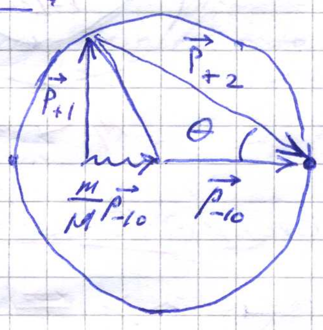
Используя приведенные выше диаграммы можно компактно обозреть все возможные случаи расположения импульсов частиц, возникающих после столкновения. С построенными диаграммами удобно решать разнообразные задачи на неупругие столкновения нерелятивистских частиц.

Задача 1

(Упругое столкновение)

Частица массы m со скоростью $\vec{V}_{-1}$ налетает на покоящуюся частицу мишени массы $M > m$. Известно, что после столкновения m вылетает под углом $90°$ к первоначальному направлению движения. Определите скорости $\vec{V}_{+1}$ и $\vec{V}_{+2}$ частиц после столкновения, а также угол θ, под которым вылетает M.

Решение:



$$\vec{V}_{ц.и} = \frac{m\vec{V}_{-1}}{m+M} = \frac{\vec{P}_{-10}}{M}$$

$$\Rightarrow P_{-10} = \frac{Mm}{m+M} V_{-1}$$

$$\Rightarrow |\vec{P}_{+1}| = \sqrt{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)^2 V_{-1}^2 - \frac{m^2}{M^2}\left(\frac{mM}{M+m}\right)^2 V_{-1}^2} = \frac{m\cdot M}{m+M} V_{-1}\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}} = \frac{m\cdot \cancel{M}\sqrt{M-m}}{\cancel{M}\sqrt{m+M}} V_{-1}$$

$$V_{+1} = \frac{P_{+1}}{m} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\, V_{-1}$$

$$\Rightarrow |\vec{P}_{+2}| = \sqrt{\frac{m^2(M-m)}{M+m} V_{-1}^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)^2\left(\frac{m\cdot M}{m+M}\right)^2 V_{-1}^2}$$

$$= mV_{-1}\sqrt{\frac{M-m}{M+m} + \frac{M^2}{M^2}} = mV_{-1}\sqrt{\frac{2M}{M+m}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{P}_{+1}|}{|\vec{P}_{+2}|} = \cancel{m}\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\,\frac{\cancel{V_{-1}}}{\cancel{mV_{-1}}}\sqrt{\frac{m+M}{2M}} = \sqrt{\frac{M-m}{2M}}$$

Задача 2

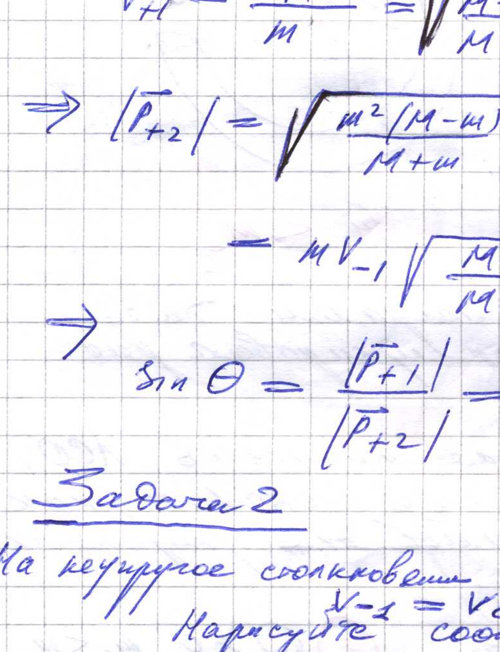
Частица m неупруго сталкивается с частицей $M > m$.

На неупругое столкновение. Известно, что $\frac{|\vec{P}_{+10}|}{|\vec{P}_{-10}|} = \eta = 1{,}5$

$V_{-1} = V_0$, $V_{-2} = 0$

Нарисуйте соотв. диаграмму столкновений.

Определите скорости $\vec{V}_{+1}$ и V_{+2} после столкнов., если m вылетает под углом $90°$.



Решение

Результаты данной задачи при $\eta = 1$ должны переходить в результаты предыд. задачи для упругого столкновения

$$P_{-10} = \frac{Mm}{m+M} V_{-1}$$

$$P_{+10} = \eta P_{-10} = \eta \frac{Mm}{m+M} V_{-1}$$

$$\rightarrow |\vec{P}_{+1}| = \sqrt{\eta^2\frac{(Mm)^2}{(m+M)^2} V_{-1}^2 - \left(\frac{m}{M}\right)^2\left(\frac{mM}{M+m}\right)^2 V_{-1}^2} = V_{-1}\frac{m\cdot M}{m+M}\sqrt{\eta^2 - \frac{m^2}{M^2}}$$

$$|\vec{P}_{+2}| = \sqrt{\cancel{\eta^2}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)^2 V_{-1}^2\left(\eta^2 - \frac{m^2}{M^2}\right) + \left(\frac{m}{M}+1\right)^2\left(\frac{mM}{m+M}\right)^2 V_{-1}^2} =$$

$$= \frac{mM}{m+M} V_{-1}\sqrt{\eta^2 - \frac{m^2}{M^2} + \left(1+\frac{m}{M}\right)^2}$$