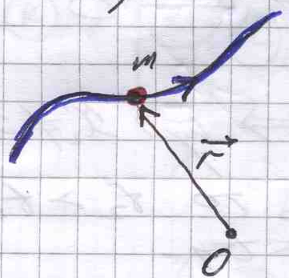
Лекция 14–15

§1. Четырёхинтервал между двумя точечными событиями

В предыд. лекции было дано определение точечного события, как четырёх координат



$$x = (ct, \vec r),$$

временной ct и трёх пространственных $\vec r = (x, y, z)$.

Например: мат. точка массы m в момент времени t имеет положение $\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$(ct, \vec r(t))$ — событие, относящееся к мат. точке в момент t в положении $\vec r(t)$.

Определим важное понятие четырёхинтервала между двумя событиями (ct_2, x_2, y_2, z_2) и (ct_1, x_1, y_1, z_1).

Определение: четырёхинтервалом s_{12}^2 (квадратом четырёхинтервала) между двумя точечными событиями $(ct_2, \vec r_2)$ и $(ct_1, \vec r_1)$ называется величина

$$s_{12}^2 \overset{def}{=} c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec r_2 - \vec r_1)^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

Четырёхинтервал замечателен тем, что он является инвариантом преобразований Лоренца, т. е. не изменяется при переходе из одной ИСО (K) в другую ИСО (K'):

в (K') $\quad s_{12}'^2 = c^2(t_2'-t_1')^2 - (x_2'-x_1')^2 - (y_2'-y_1')^2 - (z_2'-z_1')^2$

вычислен $\quad = c^2(t_2-t_1) - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 =$

в (K) $\quad s_{12}^2 = inv$

Докажем это утверждение непосредственным вычислением, используя преобразования Лоренца для координат и времени событий:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\longrightarrow s_{12}'^2 = c^2\gamma^2\left(t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)\right)^2 - \gamma^2\left(x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)\right)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

$$= c^2\cancel{\gamma^2}(t_2-t_1)^2\cancel{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} - \cancel{\gamma^2}(x_2-x_1)^2\cancel{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 = s_{12}^2 = inv \ \blacksquare$$

§2. Типы четырёхинтервалов.

Из определения четырёхинтервала очевидно, что его квадрат может принимать любые по знаку значения, положительное, равное нулю и отрицательное. Соответственно различным знакам s_{12}^2 вводят различные типы интервалов:

1) $s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\vec r_2 - \vec r_1)^2 > 0$ — времени-подобный интервал.

для времени-подобных интервалов

$$c^2(t_2-t_1)^2 > (\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2$$

события $(ct_1, \vec{r}_1)$ и $(ct_2, \vec{r}_2)$ можно связать в данном случае сигналом, распростр. со скоростью $|\vec{V}| < c$ так, что $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2 = \vec{V}^2(t_2-t_1)^2 < c^2(t_2-t_1)^2$.

2) Свето-подобный интервал соответствует

$$S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2 = 0$$

В данном случае $c^2(t_2-t_1)^2 = (\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2$ и события $(ct_1, \vec{r}_1)$ и $(ct_2, \vec{r}_2)$ могут быть связаны световым сигналом.

3) $S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2 < 0$ – пространственно-подобный интервал

В данном случае $c^2(t_2-t_1)^2 < (\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2$ и, очевидно, что события $(ct_1, \vec{r}_1)$ и $(ct_2, \vec{r}_2)$ никаким физическим сигналом с $|\vec{V}| \leq c$ связаны быть не могут. Как говорят, между событиями не может быть в данном случае установлена причинно-следственная связь. В то же время для других знаков $S_{12}^2 > 0$ и $S_{12}^2 = 0$ такая связь м. быть установлена.

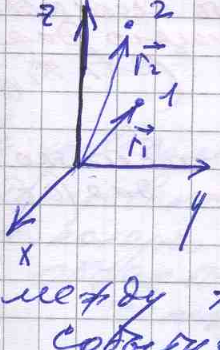
§3. Понятие о геометрии пространства-времени Минковского. Причинно-следственная структура событий в пространстве-времени Минковского.

Очень важным для формулировки законов физики является установление геометрии пространства, более общо, геометрии пространства-времени, которая должна быть положена в основу описания физических явлений. Этот вопрос решается опытным путём.

Для Ньютоновской физики малых скоростей оказалось достаточным использование геометрии Евклида. При переходе к большим скоростям $V \lesssim c$ материальных тел потребовалось введение новой геометрии, геометрии пространства-времени. Такая геометрия, вскоре после первых же работ Эйнштейна по СТО, была введена немецким математиком Германом Минковским, провозгласившим, что время и пространство не отделены друг от друга, а образуют единое пространство-время.

$V \ll c$, Механика Ньютона

Геометрия Евклида

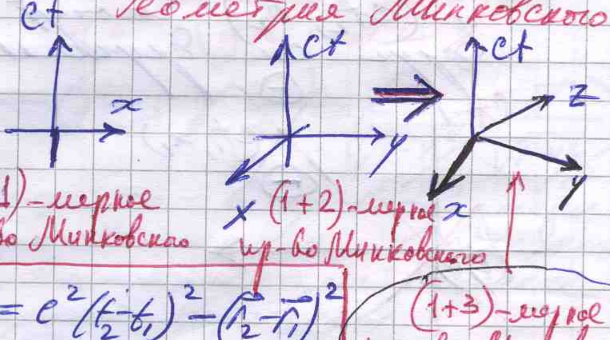


$$\boxed{\vec{r}_{21}^{\,2} = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

квадраты „расстояний" между точками, событиями, задают геометрию Евклида и Минковского.

$V \lesssim c$, Механика СТО

Геометрия Минковского



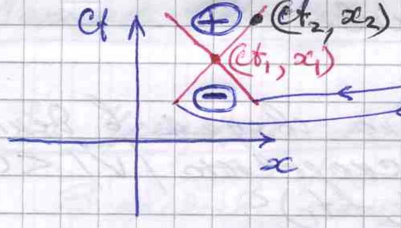
(1+1)-мерное пр-во Минковского

(1+2)-мерное пр-во Минковского

(1+3)-мерное пр-во Минковского

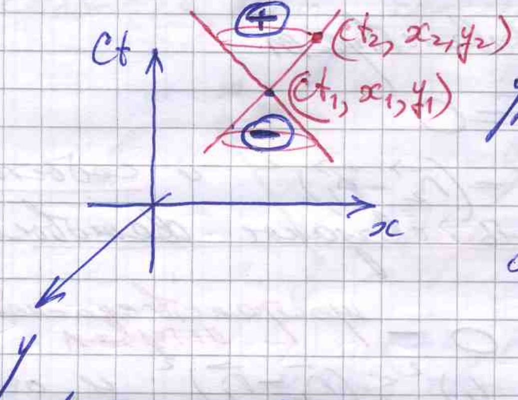
$$\boxed{S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2}$$

трудно изобразить!



уравнение $S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 = 0$,

т.е. $c(t_2-t_1) = \pm(x_2-x_1)$ — задает световой конус с вершиной в точке (ct_1, x_1) нижней ⊖ и верхней ⊕ полами.



уравнение $S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\bar{r}_2-\bar{r}_1)^2 = 0$,

т.е.

$$c(t_2-t_1) = \pm\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

задает световой конус в (1+2)-мерном пр-ве Минковского с нижней ⊖ и верхней ⊕ полами.

Любое событие из нижней полы светового конуса может быть причинно-следственно связано с событиями в верхней поле конуса через событие в вершине конуса (ct_1, x_1) или (ct_1, x_1, y_1), (ct_1, x_1, y_1, z_1).

(1+1)-случай (1+2)-случай (1+3)-случай

Итак, (1+3)-мерное пространство-время состоит из точечных событий (ct, x, y, z). Между любыми двумя событиями (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2) может быть установлена или не установлена причинно-следственная связь, зависит это от значения четырёхинтервала между событиями

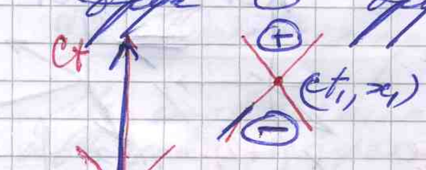
$$S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\bar{r}_2-\bar{r}_1)^2 \geq 0$$ — события могут быть причинно-следств. связаны

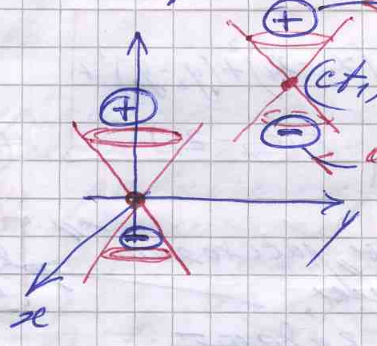
$$S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\bar{r}_2-\bar{r}_1)^2 < 0$$ — события не могут быть причинно-следств. образом связаны друг с другом.

Уравнение светового конуса в (1+3)-мерном пр-ве-времени имеет вид:

$$S_{12}^2 = 0 \Longrightarrow c^2(t_2-t_1)^2 = (\bar{r}_2-\bar{r}_1)^2$$

Выбирая вершину конуса, совпадающую с первым событием $(ct_1, \bar{r}_1)$, легко сообразить, что для событий $(ct_2, \bar{r}_2)$ лежащих в нижней поле ⊖ конуса и верхней поле ⊕ конуса $S^2 \geq 0$, и на самом конусе $S_{12}^2 = 0$, события $(ct_1, \bar{r}_1)$ и $(ct_2, \bar{r}_2)$ могут быть причинно-следственно связаны друг с другом





← область абсолютно будущего для (ct_1, x_1, y_1)

← область абсолютно прошлого для (ct_1, x_1, y_1)

§4. Собственное время и четырёхскорость

Используя квадрат четырёхинтервала между событиями, можно ввести так называемое собственное время

$$S_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2 \xrightarrow{\text{устремим (с) 2}} dS^2 = c^2dt^2-d\vec{r}^{\,2}$$

к (с) 1
сближаем события
в пр-ве Минковского,

при этом $t_2-t_1 \Rightarrow dt$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1 \Rightarrow d\vec{r}$

<u>Определение</u> Бесконечно малый интервал собственного времени $d\tau$ определяется через соответствующий интервал времени dt в ЛСО посредством формулы

$$d\tau \overset{def}{=} \frac{dS}{c} = dt\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \frac{dS}{c} - inv \qquad \text{NB}$$

Собств. время   Время в ЛСО
„Clock of arm"

$$d\tau < dt$$

Последняя формула (NB) как раз и соответствует эффекту замедления времени в СТО.

При движении материальной точки в трёхмерном пр-ве с течением времени получается непрерывная последовательность событий для данной точки в пространстве-времени Минковского, образующая мировую линию частицы в пространстве-времени Минковского.

По аналогии с определением скорости в обычном пространстве трёх измерений можно ввести понятие скорости изменения координат событий в пространстве Минковского.

$|\vec{v}| < c$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$ $|\vec{v}| \leq c$

Механика Ньютона   Механика СТО

dt – скаляр $d\tau = dt\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} = dt/\gamma$ $d\tau = \frac{dS}{c} = inv$ = скаляр в СТО

$\vec{r}(t)$ – 3х вектор положения мат. частицы

$x(\tau) = (ct, \vec{r})$ – 4х вектор события в пр-ве-времени Минковского

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{\vec{r}}$$

$$u = \frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = (\gamma c, \gamma\vec{v}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right)$$

Из проведенного рассмотрения видно, что в пр-ве-времени Минковского, поскольку оно четырёхмерное, необходимо и полезно вводить соответствующие геометрические объекты, например скалярные величины, четырёхвекторы и т. д.

$x = (ct, x, y, z)$ – 4х вектор события $u = \frac{dx}{d\tau} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ – 4х вектор скорости

§5. Четырёхвекторы пространства-времени Минковского.

Выражение для квадрата четырёхинтервала наводит на соображение о том, как должна быть устроена геометрия пространства Минковского.

$|\vec{V}| \ll c$, Мех. Ньютона $\qquad\qquad$ $|\vec{V}| \lesssim c$, Мех. СТО Эйнштейна

$\vec{r}_{12}^{\,2} = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$ $\qquad$ $s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2$

определяет геом. Евклида $\qquad\qquad$ Определяет геом. Минковского

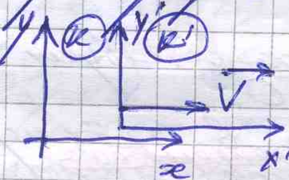
$\vec{r}_{12}^{\,2} = (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \Leftarrow$ Скал. произведения $\Rightarrow s_{12}^2 = (x_2-x_1)\cdot(x_2-x_1)$

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ $\qquad$ $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$; $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ $\qquad$ $A\cdot B = A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B}$

<u>Определение</u> $A\cdot B \overset{def}{=} A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B}$ – скалярное произведение $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ четырехвекторов A и B.

Докажем, что таким образом введенное скалярное произведение действительно является инвариантом преобразований Лоренца.



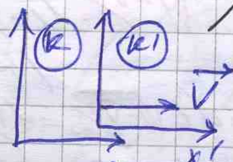
$$A_0' = \gamma(A_0 - \beta A_1),\quad A_1' = \gamma(A_1 - \beta A_0),\quad A_2' = A_2,\ A_3' = A_3 \Longrightarrow$$

$$A\cdot B = A_0'B_0' - \vec{A}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2(A_0-\beta A_1)(B_0-\beta B_1) - \gamma^2(A_1-\beta A_0)(B_1-\beta B_0) - A_2B_2 - A_3B_3 =$$

$$= \gamma^2(A_0B_0)(1-\beta^2) - \gamma^2 A_1B_1(1-\beta^2) - A_2B_2 - A_3B_3$$

$$= A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 = inv$$

<u>Определение</u> Совокупность четырёх величин (A_0, A_1, A_2, A_3) называется 4-х вектором, если при переходе от одной ИСО K в другую ИСО K' эти величины преобразуются как 4-х вектор события (x_0, x_1, x_2, x_3), т. е.



$$\begin{cases} A_0' = \gamma(A_0 - \beta A_1), \\ A_1' = \gamma(A_1 - \beta A_0), \\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3. \end{cases}$$

преобразуется как

$$x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1),\quad x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0),\quad x_2' = x_2,\ x_3' = x_3.$$

Как уже было отмечено, скалярное произведение двух 4-х векторов $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ и $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$, задаваемое формулой

$$A\cdot B = (A, B) \overset{def}{=} A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 = inv,$$

является инвариантом преобразований Лоренца, т.е. является скалярной величиной.

Собственное $d\tau$ время также выражается через скалярное произведение $dx\cdot dx = (dx_0)^2 - d\vec{x}^{\,2}$:

$$d\tau \overset{def}{=} \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{dx\cdot dx}}{c} = dt\sqrt{1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}} = inv$$

§6. Векторы четырёхскорости и четырёхимпульса. Релятивистские импульс и энергия микрочастиц.

По аналогии с механикой Ньютона введем $4^х$-векторы скорости и импульса релятивистских частиц ($|\vec{V}| \leq c$).

$|\vec{V}| << c$, Механика Ньютона $\qquad$ $|\vec{V}| \leq c$, Механика СТО, Эйнштейна.

Лаб. время: dt — скаляр $\longleftrightarrow$ $d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}$ — скаляр в СТО

$$= \frac{dt}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}$$

$\vec{r}(t)$ — $3^х$ вектор положения частицы $\longleftrightarrow$ $x(\tau) = (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ — $4^х$-вектор положения частицы.

$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ $\longleftrightarrow$ $u = \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = (\gamma c, \gamma\vec{V})$

m — скаляр $\longleftrightarrow$ m — скаляр

$\vec{P}_{ньют} = \vec{P}_{нерел} = m\vec{V}$ $\longleftrightarrow$ $P_{рел} = mu = m\frac{dx}{d\tau} = (m\gamma c, m\gamma\vec{V})$

Поясним смысл различных компонент $p = (mc\gamma, m\gamma\vec{V})$ $4^х$ импульса релятивистской частицы.

<u>Определение</u> $\vec{P}_{рел} = m\gamma\vec{V} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}$ — трёхмерный импульс релятив. частицы

Очевидно: $\vec{P}_{рел}\Big|_{|\vec{V}|<<c} \longrightarrow m\vec{V} = \vec{P}_{нерел}$, как и должно быть, при малых скоростях, получается импульс $m\vec{V}$.

<u>Определение</u> $\mathcal{E}_{рел} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}$ — энергия релятив. частицы

при малых скоростях $\left(1-\vec{V}^2/c^2\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{\vec{V}^2}{2c^2}$, NB $(1-x)^\alpha\Big|_{x<<1} \simeq 1-\alpha x$

$$\mathcal{E}_{рел} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}\Bigg|_{\vec{V}^2<<c^2} \longrightarrow mc^2\left(1+\frac{\vec{V}^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{m\vec{V}^2}{2}$$

<u>Определение</u> $\mathcal{E}_{покоя} = \mathcal{E}_{рел}\Big|_{|\vec{V}|=0} = mc^2$ — энергия покоя. $\qquad$ $K_{нерел}$ — кинетич. эн. нерел. ч.

Далее, в силу определения скалярного произведения $4^х$ векторов:

$$u^2 = u_0^2 - \vec{u}^2 \xrightarrow[\vec{u} = \gamma\vec{V}]{u_0 = \gamma c} \gamma^2 c^2\left(1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}\right) = c^2 = inv$$

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \xrightarrow[\vec{p} = \gamma m\vec{V}]{p_0 = \gamma mc} \gamma^2 m^2 c^2\left(1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}\right) = m^2c^2 = inv$$

<u>Определение</u> $p = (p_0, \vec{P}_{рел}) = \left(\frac{\mathcal{E}_{рел}}{c} = p_0, \vec{P}_{рел} = \gamma m\vec{V}\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_{рел}}{c}, \vec{P}_{рел}\right)$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = \frac{\mathcal{E}^2_{рел}}{c^2} - \vec{P}^2_{рел} \Longrightarrow \mathcal{E}_{рел} = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$$

Для безмассовых частиц с $m = 0$, $|\vec{V}| = c$

$$\mathcal{E}_{рел} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}\Bigg|_{\substack{m=0 \\ |\vec{V}|=c}} = \frac{0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{0\cdot c^2}{0}, \text{ но } \mathcal{E}_{рел} = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}\Big|_{m=0} = $$

$$= |\vec{p}|c.$$

Итак, релятивистские импульс и энергия микрочастиц задаются следующими формулами:

$m \neq 0$
Частицы с массой

$$\mathcal{E}_{рел} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{\vec{P}_{рел}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$$

$$\vec{P}_{рел} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$m = 0$
Безмассовые частицы

$$\mathcal{E}_{рел} = |\vec{P}_{рел}|\cdot c$$

$\vec{P}_{рел}$, для фотона $|\vec{P}_{ф}| = \frac{h\nu}{c}$

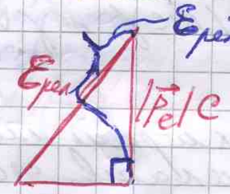
$h \cong 10^{-34}\cdot 6{,}62$ Дж·с, ν – частота
$c \cong 3\cdot 10^{8}$ м/с

Кинетическая энергия определяется следующим образом

$$K_{рел} = \mathcal{E}_{рел} - \mathcal{E}_{покоя} \qquad\qquad K_{рел} = \mathcal{E}_{рел}$$

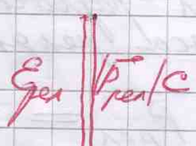
$$\mathcal{E}_{покоя} = mc^2 \qquad\qquad \mathcal{E}_{покоя} = 0$$

$\mathcal{E}_{рел} - mc^2 = K_{рел}$



Релятивистский треугольник

при $m = 0$ $\longrightarrow$ вырождается в отрезок



$mc^2 = 0$

Безмассовые частицы движутся со скоростью света, состояния покоя для них не бывает.

При распадах и столкновениях релятивистских частиц выполняются законы сохранения импульса и энергии

(*) $\mathcal{E}_{a-} + \mathcal{E}_{b-} + \mathcal{E}_{c-} + \ldots = \mathcal{E}_{A+} + \mathcal{E}_{B+} + \mathcal{E}_{C+} + \ldots$

(**) $\vec{P}_{a-} + \vec{P}_{b-} + \vec{P}_{c-} + \ldots = \vec{P}_{A+} + \vec{P}_{B+} + \vec{P}_{C+} + \ldots$

Помня о том что 4х-вектор импульса $P = \left(\frac{\mathcal{E}_{рел}}{c}, \vec{P}_{рел}\right)$ законы (*), (**) можно записать в виде одной строчки:

(***) $P_{a-} + P_{b-} + P_{c-} + \ldots = P_{A+} + P_{B+} + P_{C+} + \ldots$

Последнее уравнение содержит в себе как (*) так и (**)

Покажем как решаются задачи о распадах и столкновениях релятивистских частиц с использованием четырёхимпульсов.

Задача Покоящаяся релятивистская частица массы M распадается на две частицы масс m_1 и m_2. Определите энергии и импульсы продуктов распада.

Решение: Имеем по закону (***) сохранения четырёхимпульса

$$P_M = P_1 + P_2$$

Ясно, что 4ˣ-импульсы всех частиц задаются формулами:

$$P_M = \left(\frac{\mathcal{E}_M}{c}, \vec{P}_M = 0\right) = \left(\frac{Mc^2}{c}, \vec{0}\right) = (Mc, \vec{0})$$

$$P_1 = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, \vec{P_1}\right), \quad P_2 = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c}, \vec{P_2}\right), \text{ причем } |\vec{P_2}| = |\vec{P_1}|.$$

$$\vec{P_2} = -\vec{P_1}$$

Можно непосредственно использовать само ур-е $P_M = P_1 + P_2$, содержащее 4ˣ-импульсы частиц, и работать с этим уравнением чисто алгебраически. Например, так

$$P_M - P_1 = P_2 \Rightarrow P_M^2 + P_1^2 - 2P_M P_1 = P_2^2,$$

учтем, что $P_M^2 = M^2c^2$, $P_1^2 = m_1^2c^2$, $P_2^2 = m_2c^2$, кроме того

$$P_M \cdot P_1 = M \cdot \mathcal{E}_1$$

$$\Rightarrow M^2c^2 + m_1^2c^2 - 2M\mathcal{E}_1 = m_2c^2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{M^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2M}$$

Можно поступить по другому:

$$P_M - P_2 = P_1 \Rightarrow P_M^2 + P_2^2 - 2P_M P_2 = P_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^2c^2 + m_2^2c^2 - 2M\mathcal{E}_2 = m_1^2c^2 \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{M^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2M}$$

Зная энергии $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, легко рассчитать и импульсы частиц:

$$\mathcal{E}_1^2 = \vec{P}_1^2c^2 + m_1^2c^4 \Rightarrow \vec{P}_1^2 = \frac{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2c^4}{c^2} = \vec{P}_2^2.$$

Задача: Выразить $|\vec{P}_{рел}|$ через $K_{рел}$ и, наоборот, $K_{рел}$ через $|\vec{P}_{рел}|$

Решение:

$$K_{рел} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{P}_{рел}^2c^2} - mc^2 \Rightarrow m^2c^4 + \vec{P}_{рел}^2c^2 = (K_{рел} + mc^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{рел}^2c^2 = (K_{рел} + mc^2)^2 - m^2c^4 = K_{рел}(K_{рел} + 2mc^2)$$

$$\Rightarrow |\vec{P}_{рел}| = \frac{1}{c}\sqrt{K_{рел}(K_{рел} + 2mc^2)}$$

Об использовании атомных единиц энергии – эВ – электрон-вольтов

$$1\,эВ = qU = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл\cdot1\,В = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Дж$$

Задача: Вычислите энергию покоя электрона в эВ'ах

Решение: $m_e \simeq 9{,}1\cdot10^{-31}\,кг$, $c \simeq 3\cdot10^8\,м/с$

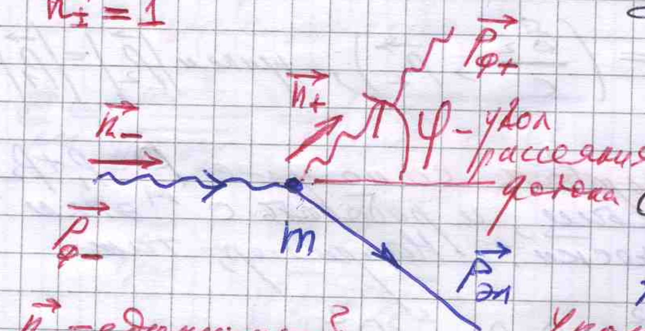
$$\mathcal{E}_{покоя} = m_e c^2 = 9{,}1\cdot10^{-31}\,кг\cdot9\cdot10^{16}\,м^2/с^2 = 81{,}9\cdot10^{-15}\,Дж$$

$$= \frac{81{,}9\cdot10^{-15}}{1{,}6\cdot10^{-19}} \simeq 50\cdot10^4\,эВ = 0{,}5\cdot10^6\,эВ =$$

$$= 0{,}5\,МэВ$$

Задача. Используя закон сохранения $4^х$-импульса, описать явление рассеяния фотона на покоящемся электроне, т.е. описать Комптон-Эффект.

$\vec{n}_\pm^2 = 1$



Дано: на покоящийся электрон с массой m падает фотон с частотой ν_-

Определите частоту ν_+ рассеянного фотона.

$\vec{n}_-$ – единичный вектор первоначального направления движения фотона.

$\vec{n}_+$ – единичный вектор напр. движ. фотона после рассеяния на электроне

Указание: $4^х$ импульсы фотона задаются формулами:

$$P_{\phi\pm} = \left(\frac{\mathcal{E}_{\phi\pm}}{c}, \vec{P}_{\phi\pm}\right) = \left(\frac{h\nu_\pm}{c}, \frac{h\nu}{c}\vec{n}_\pm\right)$$

$$\mathcal{E}_\phi = h\nu$$

$$\mathcal{E}_\phi = c|\vec{P}_\phi|$$

Решение

Вычислим $4^х$-импульсы всех участвующих в реакции частиц

$$P_{\phi-} = \left(\frac{h\nu_-}{c}, \frac{h\nu_-}{c}\vec{n}_-\right), \quad P_{\phi+} = \left(\frac{h\nu_+}{c}, \frac{h\nu_+}{c}\vec{n}_+\right)$$

$$P_{e-} = (mc, \vec{0}), \quad P_{e+} = \left(\frac{\mathcal{E}_{\phi+}}{c}, \vec{P}_{e+}\right)$$

Законы сохранения энергии и импульса выписываются одновременно в виде закона сохранения $4^х$-импульса:

$$P_{e-} + P_{\phi-} = P_{e+} + P_{\phi+}$$ → удобно переписать иначе

⟹ $P_{e-} - P_{e+} = P_{\phi+} - P_{\phi-}$ → Возводим обе части последнего равенства в квадрат:

$$P_{e-}^2 + P_{e+}^2 - 2P_{e-}P_{+} = P_{\phi-}^2 + P_{\phi+}^2 - 2P_{\phi-}P_{\phi+} \Longrightarrow$$

→ Вспоминаем чему равны квадраты 4-импульсов всех частиц, а также нужное их скалярное произв.:

$$P_{e-}^2 = P_{e+}^2 = m_e^2c^2, \quad P_{\phi-}^2 = P_{\phi+}^2 = 0$$

$$P_{e-}\cdot P_{e+} = m_e\mathcal{E}_{e+}, \quad P_{\phi-}P_{\phi+} = \frac{h^2\nu_-\nu_+}{c^2}(-\vec{n}_-\cdot\vec{n}_+ + 1)$$

$$\vec{n}_-\cdot\vec{n}_+ = |\vec{n}_-||\vec{n}_+|\cos(\widehat{\vec{n}_-, \vec{n}_+}) = \cos\varphi;$$

→ $2m_e^2c^2 - 2m_e\mathcal{E}_{e+} = -2\frac{h^2\nu_-\nu_+}{c^2}(1-\cos\varphi)$;

⟹ учтем, что $\mathcal{E}_{e+} = \mathcal{E}_{e-} + \mathcal{E}_{\phi-} - \mathcal{E}_{\phi+} = mc^2 + h(\nu_- - \nu_+)$

⟹ $\cancel{2m_e^2c^2} - 2m_e(\cancel{m_ec^2} + h(\nu_- - \nu_+)) = +2\frac{h^2\nu_-\nu_+}{c^2}(\cos\varphi - 1)$

⟹ $\nu_+ - \nu_- = +\frac{\nu_-\nu_+h}{c^2m_e}(\cos\varphi - 1) \Rightarrow \nu_+\left(1 + \frac{2h\nu_-}{m_ec^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = \nu_-$

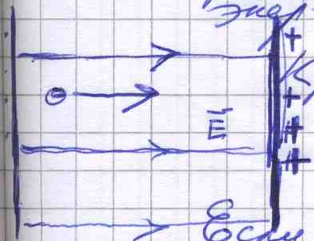
→ $\nu_+ = \frac{\nu_-}{1 + (2h\nu_-/m_ec^2)\sin^2\varphi/2}$ или $\lambda_+ = \lambda_- + \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ ■

Задача А. Электрон ускоряется разностью потенциалов 1) $U = 1В$, 2) $10^3 В$, 3) $10^6 В$.

В каком из перечисленных случаев после ускорения электрическим полем (из состояния покоя) электрон будет релятивистским? $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг

Б. То же, что и в пункте А., проделать для протона, $m_p = 1830\, m_e$.

Решение: Частица будет релятивистской, если её скорость сравнима со скоростью света. Другой критерий релятивизма выражается в терминах кинетической энергии частицы:



$$K_{рел} = \mathcal{E}_{рел} - \mathcal{E}_{покоя} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

Если $K_{рел}$ сравнима с $\mathcal{E}_{покоя} = mc^2$, то частица будет релятивистской.

Пролетая разность потенциалов U, частица приобретает кинетическую энергию (из состояния покоя)

$$K_{рел} = qU$$

В расчетах с микрочастицами, типа элементарных, удобно использовать атомные единицы энергии, т.е. электронвольты:

$$1\,эВ = |q_{эл}|\cdot U = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,Кл \cdot 1\,В = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,Дж$$

Энергия покоя электрона, вычисленная в эВ-ах, имеет следующее значение

$$\mathcal{E}_{покоя\,эл} = m_e \cdot c^2 = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,кг \cdot 9\cdot 10^{16}\,м^2/с^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}} \simeq 0{,}5\,МэВ, \quad 1\,МэВ = 10^6\,эВ$$

В случае А.1 имеем:

$K_{эл} = |q|U = 1\,эВ \ll \mathcal{E}_{покоя\,эл} \simeq 0{,}5\,МэВ$ — частица нерелятивистская.

Импульс электрона в данном случае может быть рассчитан по формулам Ньютоновской механики:

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = K = qU \Rightarrow |\vec{p}_{эл}| = \sqrt{2mqU}$$ — досчитайте в СИ и в эВах

В случае А.3 имеем:

$K_{эл} = |q|U = 10^6\,эВ = 1\,МэВ$, $\mathcal{E}_{покоя} = 0{,}5\,МэВ$ $\Rightarrow$ частица-релятив.

Для расчетов $|\vec{p}_e|$ в данном случае необходимо использовать формулы релятивистской механики:

$$K_{рел} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \Rightarrow |\vec{p}_{рел}| = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2mc^2)}$$

Числовое значение удобно получать в данном случае в эВах/c:

$$|\vec{p}_{эл}| = \frac{1}{c}\sqrt{1\,МэВ(1\,МэВ + 2\cdot 0{,}5\,МэВ)} \simeq 1{,}41\,\frac{МэВ}{c}$$

Каким будет электрон в случае А.2?