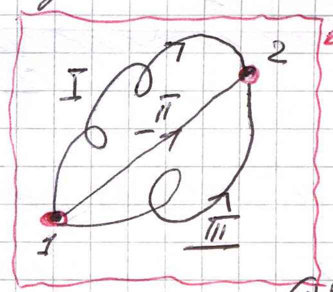
Лекция 8. Потенциальные силовые поля. Связь силы с потенциальной энергией. Закон сохранения энергии в механике.

§1. Примеры потенциальных силовых полей. Потенциальная энергия.

Среди силовых полей особую роль в механике, да и во всей физике, играют потенциальные силовые поля. Дадим соответствующее абстрактное определение.

Определение.

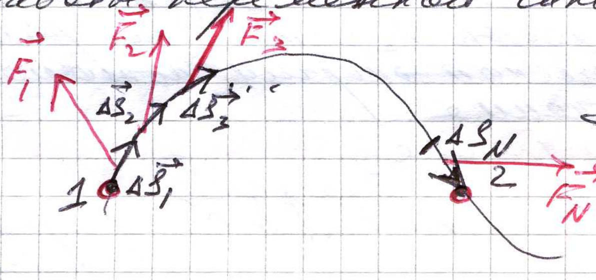


Область пространства с силовым полем

Силовое поле называется потенциальным, если работа сил поля при перемещении из одной точки пространства в другую, в данном силовом поле, не зависит от формы пути для любых начальной и конечной точек, т.е.

$$A^{(I)}_{1\to 2} = \int_{(\cdot)1(I)}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r = \int_{(\cdot)1(II)}^{(\cdot)2} \vec F\cdot d\vec r = \ldots = \mathrm{Const.}$$

В приведенном определении используется понятие работы переменной силы:

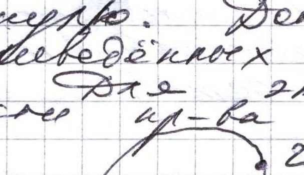


$$A_{1\to 2} = \lim_{\max|\Delta \vec S_k|\to 0} \sum \vec F_k \cdot \Delta \vec S_k = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F\cdot d\vec S = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F d\vec r$$

Работа переменной силы даётся криволинейным интегралом от элементарных работ вдоль траектории перемещения частицы.

Приведенное определение потенциальности силового поля, очевидно, эквивалентно следующему определению: сил. поле потенциально, если работа сил поля при перемещении пробной частицы вдоль любой замкнутой траектории равна нулю. Докажем справедливость эквивалентности приведённых определений.

Для этого через произвольные две точки области пр-ва с силовым полем, проведём замкнутую кривую, состоящую из двух частей: $I_{12} + II_{21}$.



Имеем для работы сил поля вдоль указанной замкнутой траектории:

по второму определению → $$A_{1\circlearrowleft 2} = A^{(I)}_{1\to 2} + A^{(II)}_{2\to 1} = \oint_{\vec r_2}^{\vec r_2} \vec F d\vec r =$$

(*) $$= \int_{\vec r_1 (I)}^{\vec r_2} \vec F d\vec r + \int_{\vec r_2 (II)}^{\vec r_1} \vec F d\vec r = \int_{\vec r_1 (I)}^{\vec r_2} \vec F d\vec r - \int_{\vec r_1 (II)}^{\vec r_2} \vec F d\vec r = 0$$

С др. стороны, по первому определению

$$\int_{\vec r_1 (I)}^{\vec r_2} \vec F d\vec r = \int_{\vec r_1 (II)}^{\vec r_2} \vec F d\vec r \qquad (**)$$

Внимательно рассматривая (*) и (**), заключаем, что

$$\oint \vec F d\vec r = 0 \xleftrightarrow[\text{только тогда, когда}]{\text{тогда и}} \int_{1(I)}^{2} \vec F d\vec r = \int_{1(II)}^{2} \vec F \cdot d\vec r$$

Подчеркнем, что $\int_{(\cdot)2(II)}^{(\cdot)1} \vec F d\vec r = -\int_{(\cdot)1(II)}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r$ (NB) — осознайте, по какой причине!

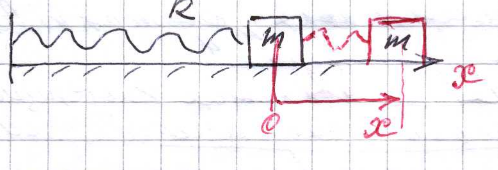
Приведем примеры потенциальных силовых полей и вычислим соответствующие потенциальные энергии частиц (пробных тел, материальных тел, ...) в этих полях. При этом будем пользоваться следующим определением потенциальной энергии:

Так как криволин. интеграл от сил потенц. поля не зависит от формы пути, то его, по определению, полагают равным минус приращению потенциальной энергии

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F(\vec r) d\vec r \stackrel{def}{=} -(U_2 - U_1) = -(U(\vec r_2) - U(\vec r_1)) \qquad (*)$$

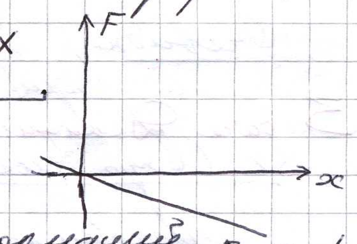
def — символ, означающий — по определению.

Пример 1 Потенциальное силовое поле упругих деформаций пружины.



$F_{упр} = -kx$

одномерное силовое поле



$F_{упр} = -kx$

Вычислим работу силового поля упругих деформаций пружины с коэффициентом жёсткости k при растяжении пружины от x_1 до x_2:

$$A_{1\to2}^{(упр. сила)} = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) = -(U_2-U_1) = -(U(x_2)-U(x_1)) \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), получаем выражение для потенциальной энергии пружины, растянутой на величину x:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Продемонстрированное вычисление показывает, что $A^{упр. силы}_{1\to2}$ не зависит от "формы пути", способа деформаций пружины от x_1 до x_2, т.е. данное поле является потенциальным.

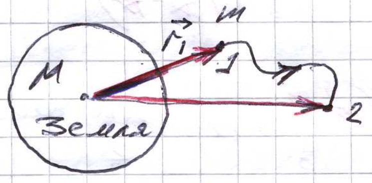
Пример 2 Потенциальное силовое однородное поле тяжести

$\Delta y = \Delta s \sin\alpha$ $\quad \alpha = \pi - \beta$ $\quad \beta = (\widehat{\Delta \vec s, m\vec g})$

$$A_{1\to2} = m\vec g \cdot \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} d\vec s = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -(mgy_2 - mgy_1) \qquad (**)$$

$\to$ $U(y) = mgy$, т.к. $\vec g \cdot d\vec s = g\,ds\cos\beta = -g\,ds\cos\alpha = -g\,dy$

Пример 3 Потенциальный характер реального силового поля тяготения.

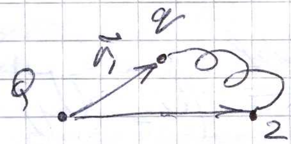


$$A_{1\to2}^{\text{поля тягот.}} = -GmM\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\frac{\vec r\, d\vec r}{r^3} = -GmM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \stackrel{def}{=} -(U(r_2)-U(r_1))$$

$\Rightarrow$ $\boxed{U(r) = -G\frac{mM}{r}}$ — потенциальная энергия гравитац. вз-я массы m с M.

NB Полученная пот. энергия отрицательна!

Пример 4 Потенциальный характер силового поля точечных зарядов.



$$A_{1\to2}^{\text{Кулон}} = kQq\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\frac{\vec r\, d\vec r}{r^3} = kQq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_{r_1}^{r_2} = -\left(k\frac{Qq}{r_2}-k\frac{Qq}{r_1}\right)$$

Выкладки в примерах 3 и 4 аналогичны.

$$\boxed{U(r)=k\frac{Qq}{r}}$$

Очевидно, при $Qq>0$ имеем поля „отталкивания", а при $Qq<0$ — поля „притяжения".

Задача. Докажите, что сила „трения" не является потенциальной силой.

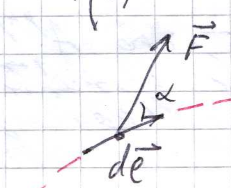
§2. Связь силы с потенциальной энергией.

Исходим из выражения, определяющего работу в потенциальном сил. поле

$$A_{1\to2}^{\text{потенц. поле}} = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r = -(U_2-U_1)$$

В пределе (·)2 → (·)1 :

$$\lim_{\vec r_2\to\vec r_1}\left(\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\, d\vec r = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\vec F\, d\vec l\right) = \vec F\, d\vec l = F_l\, dl = -dU$$

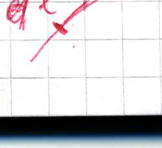


$$\vec F\cdot d\vec l = |\vec F||d\vec l|\cos\alpha = -dU = F_l\, dl$$

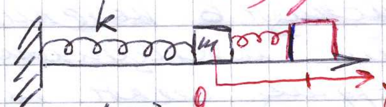
$|F|\cos\alpha = F_l$ — проекция силы $\vec F$ на направление $\vec l$

$\Rightarrow$ $F_l\, dl = -dU$.

$\Rightarrow$ $\boxed{F_l = -\frac{\partial U}{\partial l}}$



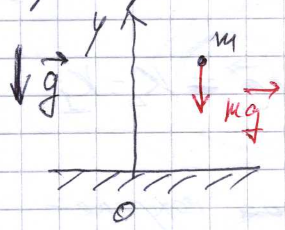
Проверяем формулу $F_\ell = -\dfrac{\partial U}{\partial \ell} = |\vec F|\cos\alpha$ для случаев (полей), рассмотренных в разделе 1.

Пример 1  Поле упругих деформаций

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

Обратно: $F_x = -kx = -\dfrac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -kx\,dx \rightarrow U(x) = \int kx\,dx = \dfrac{kx^2}{2} + C$

Пример 2 Однородное поле тяжести



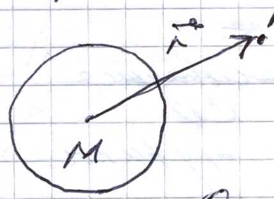
В одну сторону: $U(y) = mgy \Rightarrow F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} = -mg$

И обратно: $-mg = -\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{dU}{dy} \Rightarrow dU = mg\,dy$

$$\Rightarrow U(y) = \int mg\,dy = mgy + C$$

Из рассмотренных примеров видно, что потенциальная энергия пробного тела определяется с точностью до константы, которую выбирают из соображений удобства. В последних рассмотренных примерах её выбирают равной нулю.

Пример 3 Реальное поле тяготения



$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \Rightarrow F_r = -\frac{dU}{dr} = -G\frac{Mm}{r^2},$$

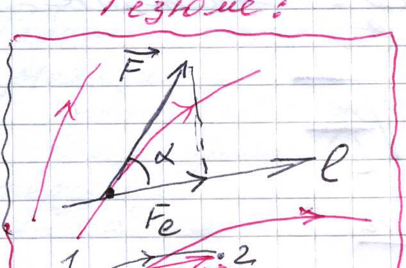
$$\vec F = G\frac{Mm}{r^3}\vec r.$$

Обратно: известна $F_r = -G\dfrac{Mm}{r^2} = -\dfrac{dU}{dr}$, определяем $U(r)$

$$dU = G\frac{Mm}{r^2}dr \Rightarrow U(r) = \int \frac{GMm\,dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r} + C$$

Если потребовать, чтобы $U(r)\big|_{r\to\infty} \to 0$, то $C = 0$.

Резюме:



Область пространства с потенциальным силовым полем

$$F_\ell = -\frac{\partial U}{\partial \ell} = F\cos\alpha = F\cos(\widehat{\vec F, \vec \ell})$$

В частности

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$A_{1\to 2} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F\,d\vec\ell = -(U_2 - U_1)$$

Пишут кратко:

$$\vec F = -\vec\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$$

$$A_{1\to 2}\Big|_{\Delta\vec\ell = \Delta\vec s \to 0} \Longrightarrow \vec F\,d\vec\ell = -dU = F_\ell\,d\ell$$

$$F_\ell = -\frac{\partial U}{\partial \ell}$$

Краткое изложение связи силы с потенциальной энергией

Если кинетическая энергия является энергией движущегося тела, то потенциальная энергия есть энергия положения, зависит от взаимного расположения взаимодействующих тел. В случае движения частиц в потенциальных силовых полях сохраняется полная механическая энергия.

§3. Закон сохранения полной механической энергии.

Рассмотрим движение частицы в потенциальном силовом поле, причем, кроме потенциальной силы со стороны поля, никакие другие силы на частицу не действуют: отсутствует трение и т. д. Результирующая сила, действующая в рассматриваемом случае на частицу является потенциальной. Используя теорему о приращении кинетич. энергии и выражение для работы потенциальной силы, получим

$$A^{пот.силы}_{1\to 2} = \int\limits_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec{F}_{потенц.}\cdot d\vec{l} \overset{def}{=} -(U_2-U_1) = \int\limits_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec{F}_{рез}\, d\vec{l} = K_2-K_1$$

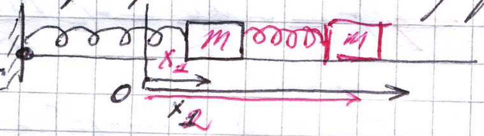
Из последнего соотношения получаем закон сохранения полной механической энергии:

$$-(U_2-U_1) = K_2-K_1 = -U_2+U_1$$

$$\Rightarrow \quad K_1+U_1 = K_2+U_2$$

Приведем примеры

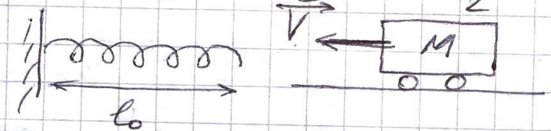
① Масса, прикреплённая к упругой пружине



Пружина растягивается из положения CO нерастянутой пружины.

$$\frac{mV_1^2}{2}+\frac{kx_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2}+\frac{kx_2^2}{2}.$$

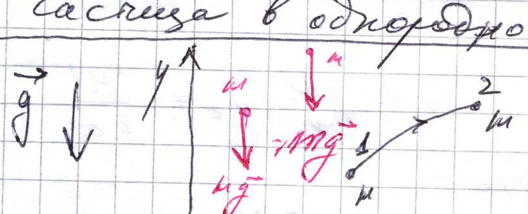
Задача



На нерастянутую пружину длиной l_0 наезжает вагон с массой M и сцепляется с пружиной. Определите максимальное сжатие пружины Δl.

Ответ: $\dfrac{MV_0^2}{2} = \dfrac{k\Delta l^2}{2} \Rightarrow \Delta l = V_0\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

② Частица в однородном поле тяжести



$$K_1+U_1 = \frac{mV_1^2}{2}+mgy_1 = \frac{mV_2^2}{2}+mgy_2$$

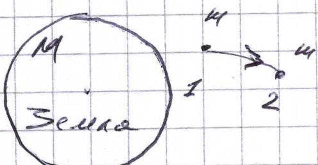
Задача ⓐ На какую максим. высоту поднимется брошенное с начальной скоростью V_0 тело массы m в однородном поле тяжести?

$$E_0=K_0=\frac{mV_0^2}{2} = mgy_{max}=U \Rightarrow H_{max}=y_{max}=\sqrt{\frac{V_0^2}{g}}$$

ⓑ Обратно: какую скорость будет иметь тело массы m, свободно падающее с высоты H?

$$E_0 = mgH = \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow V_0=\sqrt{2gH}$$

③ Частица (тело) массы m в поле тяготения Земли.



$$E_1 = \frac{m\bar{V}_1^2}{2} - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{mV_2^2}{2} - G\frac{Mm}{r_2}$$

Задача. Вычислите Ⓐ первую и Ⓑ вторую космические скорости.

Решение:

Ⓐ Первая космическая скорость соответствует полёту космического корабля по некот. орбите вокруг Земли:

$$\frac{mV^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \text{— 2-ой закон Ньютона}$$

$$\Rightarrow V^2 = G\frac{M}{R+h} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{R+h} = g\frac{R^2}{R+h}$$

$$V = \sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{R}{R+h}}\Big|_{h \ll R} \simeq \sqrt{gR} \simeq 8 \text{ км/с}$$

Ⓑ Вторая космическая скорость соответствует скорости, которую необходимо сообщить космическому кораблю, чтобы он покинул пределы Солнечной системы.

Имеем в данном случае:

$$\frac{mV_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{mV_\infty^2}{2}\Big|_{V_\infty = 0} - G\frac{Mm}{r}\Big|_{r\to\infty} \simeq 0$$

$$g\Big|_{h=0} = \frac{|\vec{F}|}{m} = G\frac{M}{R^2}$$

ускорение своб. падения вблизи Земли.

$$\Rightarrow V_0^2 = 2\frac{GM}{R}, \quad V_0 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{R^2}R} = \sqrt{2gR} \simeq 11{,}2 \text{ км/с}$$

То, что сила трения не является потенциальной силой, доказывается очень просто:

$$\oint \vec{F}_{тр}\cdot d\vec{r} < 0, \quad \text{т.к.} \quad \vec{F}_{тр} \uparrow\downarrow d\vec{r}$$

Работа силы трения вдоль любого замкнутого контура меньше нуля. Работа же потенциальной силы вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

Еще задача на применение закона сохранения энергии.

Задача

Тело соскальзывает с горки высотой H и останавливается у подножия горки. Какую работу необходимо совершить, чтобы двигаясь по той же траектории, поднять тело на высоту H в исходное, перед соскальзыванием, положение.

Если помимо потенциальной силы на тело действуют силы трения, то закон сохранения полной механической энергии принимает следующий вид:

$$\underbrace{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}_{\text{в отсутствие трения}} \Longrightarrow \underbrace{K_1 + U_1 = K_2 + U_2 + \Delta A_{\text{против сил трения}}}_{\text{с учетом сил трения}}$$

$$\Delta A_{\text{против сил тр}} = \Delta Q \quad \text{— кол-во выделяемого тепла.}$$