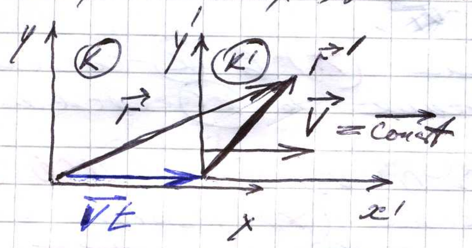
Лекция 1. Принцип относительности Галилея. Работа, мощность и энергия в механике. Потенциальные силовые поля.

§1. Принцип относительности Галилея.

Как уже обсуждалось в предыдущих лекциях, первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта. Если есть одна такая система, то любая другая, движущаяся относительно первой с постоянной скоростью также является инерциальной. Все инерциальные системы в отношении описания механических явлений эквивалентны.



$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \\ t = t'. \end{cases}$$

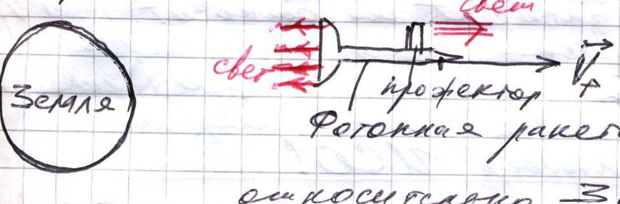
Преобразования Галилея связывают описание явлений в различных ИСО.

Из преобразований Галилея немедленно получаются следующие следствия.

1° **Закон сложения скоростей:**

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d(\vec{V}t)}{dt} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Замечание Сформулированный закон сложения скоростей имеет место при малых скоростях, много меньших скорости света, т.е. $|\vec{v}| \ll c$, $|\vec{v}'| \ll c$, $|\vec{V}| \ll c$.



$$V_{света/З} = V_{света/p} + V_p \simeq$$
$$\simeq c + c_{прожектора} = 2c$$

Скорость света, выпущенная относительно Земли, оказывается равной 2c.

Опыт же показывает, что скорость света относительно любых ИСО равна $c \simeq 300000$ км/с, двух c быть никак не может

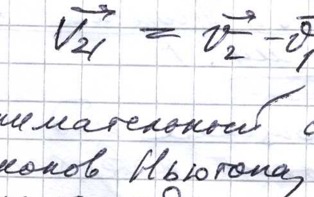
2° Инвариантность ускорений, относительных расстояний и относительных скоростей:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \underbrace{\frac{d^2(\vec{V}t)}{dt^2}}_{=0} = \vec{a}' = \vec{inv}$$

$$\vec{r_{21}} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (\vec{r_2}' + \vec{V}t) - (\vec{r_1}' + \vec{V}t) = \vec{r_2}' - \vec{r_1}' = \vec{inv}$$

$$\vec{V_{21}} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v}_{2/1} = (\vec{v_2}' + \vec{V}) - (\vec{v_1}' + \vec{V}) = \vec{v_2}' - \vec{v_1}' = \vec{inv}$$

Внимательный анализ основных законов механики, т.е. законов Ньютона показывает, что их форма не изменяется при переходе из одной ИСО в другую.



(A) Действительно, если тело покоится в (K), то в (K') оно равномерно и прямолинейно движется, т.к. тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения во всех ИСО.

Ⓑ Относительно третьего закона Ньютона можно сде[лать] следующее заключение:

$$(*) \quad \vec F_{12}(\vec r_1-\vec r_2, \vec v_1-\vec v_2) = -\vec F_{21}(\vec r_2-\vec r_1, \vec v_2-\vec v_1) \text{ — в ИСО } (K)$$

В последнем равенстве учтена зависимость сил от радиус-векторов относительных расстояний и относительных скоростей, но эти относительные величины не изменяются при преобразованиях Галилея, т.е.

$$\vec r_1-\vec r_2 = \vec r_1'-\vec r_2', \quad \vec v_1-\vec v_2 = \vec v_1'-\vec v_2';$$

$$\vec r_2-\vec r_1 = \vec r_2'-\vec r_1', \quad \vec v_2-\vec v_1 = \vec v_2'-\vec v_1',$$

поэтому 3-ий закон Ньютона (*) в (K)-системе переходит в следующее выражение в (K') системе:

$$(**) \quad \vec F_{12}(\vec r_1'-\vec r_2', \vec v_1'-\vec v_2') = -\vec F_{21}(\vec r_2'-\vec r_1', \vec v_2'-\vec v_1') \text{ — в ИСО } (K')$$

т.е. выполнение 3-го закона (*) Ньютона в (K) влечёт за собой выполнение 3-го закона (**) Ньютона в (K') системе, причем, форма закона не изменяется.

Ⓑ Такое же заключение можно сделать и по поводу второго закона Ньютона:

$$\vec r_\alpha-\vec r_\beta = \vec r_\alpha'-\vec r_\beta'$$

$$\underbrace{m_\alpha \ddot{\vec r}_\alpha = \sum_\beta \vec F_{\alpha\beta}(\vec r_\alpha-\vec r_\beta, \vec v_\alpha-\vec v_\beta)}_{\text{в (K)-ИСО}} \Longleftrightarrow \underbrace{m_\alpha \ddot{\vec r}_\alpha' = \sum_\beta \vec F_{\alpha\beta}(\vec r_\alpha'-\vec r_\beta', \vec v_\alpha'-\vec v_\beta')}_{\text{в (K')-ИСО}}$$

$$\vec v_\alpha-\vec v_\beta = \vec v_\alpha'-\vec v_\beta'$$

$$\vec a_\alpha = \ddot{\vec r}_\alpha = \ddot{\vec r}_\alpha' = \vec a_\alpha'$$

Обычно силы вз-я тел зависят от относит. $\vec r$ и $\vec v$

Форма второго закона Ньютона также не изменяется!

Приведенные наблюдения и подобные им приводят к заключению о том, что все законы механики выглядят одинаково в любых ИСО!

Принцип относительности Галилея: Все законы механики выглядят одинаково в любых ИСО.

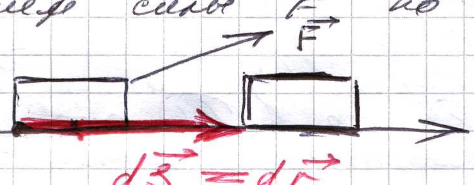
Важнейший принцип Ньютоновской механики малых скоростей

Более общим принципом, справедливым для любых скоростей является

Принцип относительности Эйнштейна: Все законы физики выглядят одинаково в любых ИСО

§2. Элементарная работа. Мощность. Теорема о приращении кинетической энергии.

Рассмотрим мат. тело, перемещающееся под действием силы $\vec F$ по горизонтальной поверхности:



Определение

Элементарная работа силы $\vec F$ при перемещении $d\vec S = d\vec r$:

$$dA = \vec F\cdot d\vec S = \vec F\cdot d\vec r = |\vec F||d\vec S|\cos\alpha$$

Работа может быть положительной, отрицательной и равной нулю, очевидно:

$$dA > 0, \text{ при } \alpha < 90^\circ \quad | \quad dA = 0, \text{ при } \alpha = 90^\circ \quad | \quad dA < 0, \text{ при } \alpha > 90^\circ.$$

Единица работы в системе СИ — Джоуль

$$1\ Дж = 1\ Н \cdot 1\ м$$ — работа силы 1Н на пути 1м.

Из определения элементарной работы следует определение мощности.

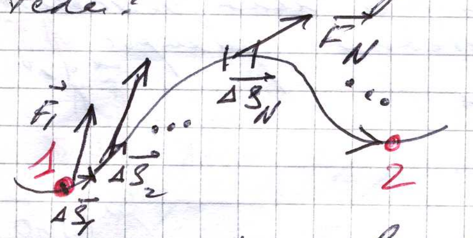
$[N] = \frac{ML^2}{T^3}$; $1\ Ватт = 1\ \frac{Дж}{с}$

$$N = P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\alpha$$

Мощность — это работа силы за одну секунду

$$\boxed{N = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$ — выражение для мгновенной мощности.

Сила может изменяться вдоль траектории движения тела:



Работа переменной силы при движении тела вдоль траектории даётся суммой элементарных работ на достаточно малых перемещениях $\Delta\vec{S}_k$:

$$A_{1\to2} = \lim_{\max|\Delta\vec{S}_k| \to 0} \sum \Delta\vec{S}_k \cdot \vec{F}_k = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Работа силы, изменяющейся вдоль криволинейной траектории, даётся интегралом от элементарных работ, совершаемых при бесконечно малых перемещениях $d\vec{S}$:

$$\boxed{A_{1\to2} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec{F} \cdot d\vec{S}}$$

Вычислим работу результирующей силы при некотором конечном перемещении тела:

$$A_{1\to2}^{(рез.силы)} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec{F}_{рез} \cdot d\vec{r} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} m\vec{a} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

Можно легко доказать, что

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt}$$

В самом деле:

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = v_x \cdot \dot{v}_x + v_y \cdot \dot{v}_y + v_z \cdot \dot{v}_z = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$$

С др. стороны:

$$\vec{v}^2 = v^2 \Longrightarrow \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt}$$

Поэтому

$$A_{1\to2}^{(рез.силы)} = \int_{v_1}^{v_2} m\, dv\, v = \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Т.о., доказано утверждение:

$$A^{рез.\ силы}_{1\to 2} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{рез} \cdot d\vec s = \int_{V_1}^{V_2} m V\, dV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

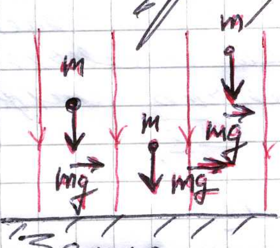
работа результир. силы равна приращению кинетической энергии тела

Опр-е $K = \frac{m\vec V^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$ — кин. энергия — энергия движения

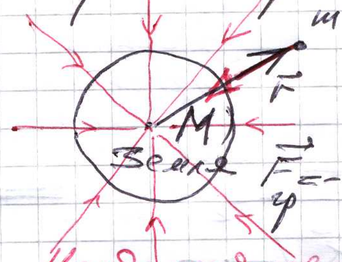
$[K] = \frac{M\cdot L^2}{T^2}$, 1 Дж = 1 Н·м — единица кин. энергии.

§3. Потенциальные силовые поля.

Определение Говорят, что в некоторой области пр-ва существует силовое поле, если в каждой точке этой области задан вектор силы данного поля, действующей на „пробную частицу". Приведём примеры.

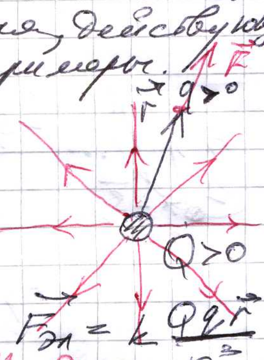


Однородное поле тяжести



$\vec F_{гр} = -G\frac{Mm\vec r}{r^3}$

Неоднородное поле тяжести, т.е. тяготения



$\vec F_{эл} = k\frac{Qq\vec r}{r^3}$

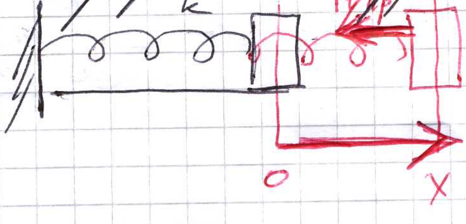
Неоднор. эл. поле заряда

И. определить напряжённости указ. полей:

$\vec g = \frac{m\vec g}{m} = \frac{\vec F_m}{m} = Const$ $\quad \vec g(\vec r) = \frac{\vec F_{гр}}{m} = -\frac{GM\vec r}{r^3}$ $\quad \vec E(\vec r) = \frac{\vec F_q}{q} = k\frac{Q\vec r}{r^3}$

Силовые поля удобно характеризовать силовыми линиями, касательные к которым в любой их точке задают направление напряжённости поля.

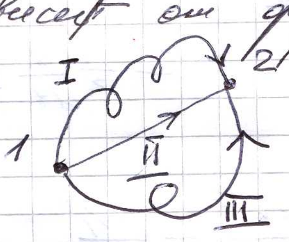
Еще один важный пример — силовое поле упругих деформаций пружины:



$F_{упр} = -kx = F_{упр}(x)$

Силовое поле упругих деформаций пружины

Среди всех силовых полей выделяется класс замечательных силовых полей, в которых работа по перемещению пробного тела из одной точки в другую не зависит от формы пути:



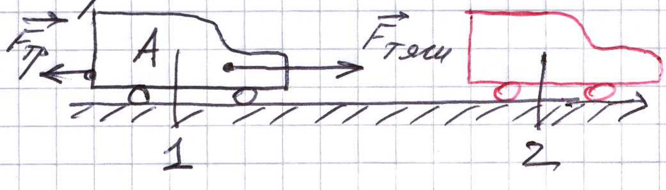
$$A^{(I)}_{1\to 2} = \int_{(\cdot)1(I)}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r = \int_{(\cdot)1(II)}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r = \int_{(\cdot)1(III)}^{(\cdot)2} \vec F d\vec r = \dots$$

Указанные силовые поля называются потенциальными

§ 4. Несколько задач на применение $A_{1\to 2}^{рез.сил} = K_2 - K_1$

Задача 1. На автомобиль, перемещающийся по шоссе, действует сила тяги $F_{тяги}$ и сила трения $F_{тр}$. Исходя из теоремы о приращении кинетической энергии, вычислите работу силы тяги при перемещении автомобиля из положения со скоростью V_1 в положение со скоростью V_2.

Решение



Векторная диаграмма сил

$F_{рез\,x} = F_{тяги} - F_{тр}$

$$\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{рез}\, d\vec r = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тяги}\, d\vec r + \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тр}\, d\vec r = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тяги}\cdot d\vec r = \frac{m\vec V_2^2}{2} - \frac{m\vec V_1^2}{2} - \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тр}\cdot d\vec r} \quad (\bigstar)$$

Последнее соотношение может быть проинтерпретировано следующим образом: работа силы тяги автомобиля при перемещении его из положения 1 (со скоростью V_1) в положение 2 (со скоростью V_2) идёт на увеличение, т.е. приращение кинетической энергии автомобиля и работу против сил трения.

Работа против сил трения

$$Q_{\text{выделяемое тепло}} = -\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тр}\, d\vec r > 0,$$ т.к. $\vec F_{тр} \uparrow\downarrow \vec r$ направлена противоположно $d\vec r$.

Полагая в последней формуле $(\bigstar)$ $\vec F_{тяги} = 0$, получим соотношение:

$$\boxed{K_1 = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} - \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec F_{тр}\cdot d\vec r,}$$

которое также имеет прозрачную интерпретацию, а именно в отсутствие силы тяги автомобиль двигается по инерции и его первоначальный запас $K_1 = \frac{mV_1^2}{2}$ кинетической энергии расходуется, до тех пор пока автомобиль не остановится, на работу против сил трения, что-то остаётся и на долю кинетической энергии $K_2 = mV_2^2/2$.

Задача 2. На применение закона сложения скоростей. Скорость течения реки $V_р$ больше скорости моторной лодки $V_{л/р}$ относительно реки в $n = V_р / V_{л/р} > 1$ раз.

Определите угол, под которым лодка должна пересекать реку, чтобы её снесло течением как можно меньше.

Указание: используйте следующую векторную диаграмму.