Лекция 12, 13 Постулаты специальной теории относительности. Вывод преобразований Лоренца. Следствия преобразований Лоренца.

§1. Постулаты специальной теории относительности. Основные кинематические эффекты СТО.

Нерелятивистская механика Ньютона – малые скорости $V \ll C$

Релятивистская механика Эйнштейна – большие скорости $V \lesssim C$

Принцип относительности Галилея: Законы механики выглядят одинаково в любых инерциальных системах отсчёта

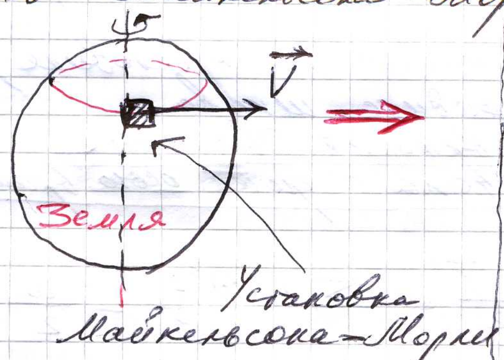
Принцип относительности Эйнштейна:

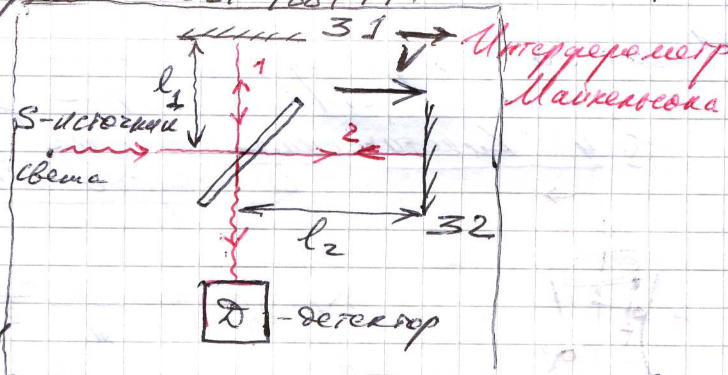
1. Законы физики выглядят одинаково в любых инерциальных системах отсчёта
2. Скорость света во всех ИСО имеет одно и то же значение и не зависит от направления распространения

Постулаты СТО (Специальной теории относительности) ⟹

А. Эйнштейн, 1905 год

В отношении 2 представляет интерес анализ экспериментов Майкельсона-Морли 1881–1887 гг.





В эксперименте выяснялось влияние скорости движения Земли на скорость распространения света. Измерялась разница времён τ_1 и τ_2 распространения света поперек скорости $\vec{V}$ и вдоль скорости $\vec{V}$:

А) плечо l_2 ориентировано по $\vec{V}$

$$\Delta\tau^{(1)} = \tau_1 - \tau_2 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{2l_2}{c(1-V^2/c^2)}$$

Б) плечо l_1 ориентировано по $\vec{V}$, после поворота интерферометра на 90°

$$\Delta\tau^{(2)} = \tau_1' - \tau_2' = \frac{2l_1}{c(1-V^2/c^2)} - \frac{2l_2}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Разность времен $\Delta\tau^{(1)}$ и $\Delta\tau^{(2)}$ проявляет себя в смещении интерференционных полос:

$$\Delta n = \frac{c\left(\Delta\tau^{(2)} - \Delta\tau^{(1)}\right)}{\lambda} = \frac{2(l_1+l_2)}{\lambda(1-V^2/c^2)} - \frac{2(l_1+l_2)}{\lambda\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

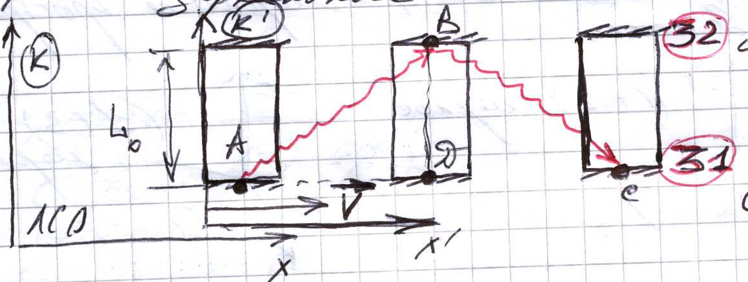
Для размеров $l_1, l_2 \sim 10$ м и типичных скоростей V, характерных для широт, где выполнялся эксперимент, оценка Δn давала значение $\Delta n \cong 0{,}4$, т.е. сдвиг картины почти на половину полосы! Эксперименты М.-М. этого не обнаружили.

Задача. Получите формулы (А) и (Б), оцените Δn для $l_1 = l_2 \sim 10$ м, $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, на широте города Новосибирска.

Подробности об эксперименте М.-М. — смотрите в учебниках.

Кратко обсудим основные кинематические эффекты СТО.

• Эффект замедления времени движущихся часов, используя зеркальные часы



Часы покоятся в (K') и ориентированы $\perp \vec{V}$.

$\triangle ABD$: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, т.е.

$$c^2\frac{\tau^2}{4} = \left(V\frac{\tau}{2}\right)^2 + L_0^2$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2L_0}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

здесь $\tau_0 = \frac{2L_0}{c}$ — время движения св. сигнала в системе часов от З1 → З2 → З1

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}}$$

Эффект замедления времени: промежутку времени τ_0 в (K') соотв. $\tau > \tau_0$ в (K)!

• Эффект сокращения размеров движущихся тел, используя зеркальные движущиеся часы. Часы покоятся в (K').

Подсчитаем период колебаний τ часов в (K), используя часы, ориентированные поперёк — (А), и вдоль — (Б), направления движения (K') с $\vec{V}$:

(А) $\tau = \dfrac{2L_0}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}$, (Б) $\tau = \dfrac{L}{c-V} + \dfrac{L}{c+V} = \dfrac{2L}{c(1-V^2/c^2)}$

Приравнивая последние выражения друг другу находим связь между L, размером движущихся в (K) часов, и L_0, размером покоящихся в (K') часов:

$$L = L_0\sqrt{1-V^2/c^2}, \Rightarrow L < L_0 \,!$$

Размеры движущихся тел в направлении продольном движению — сокращаются.

• Легко сообразить, что поперечные размеры движущихся тел не изменяются. В самом деле:

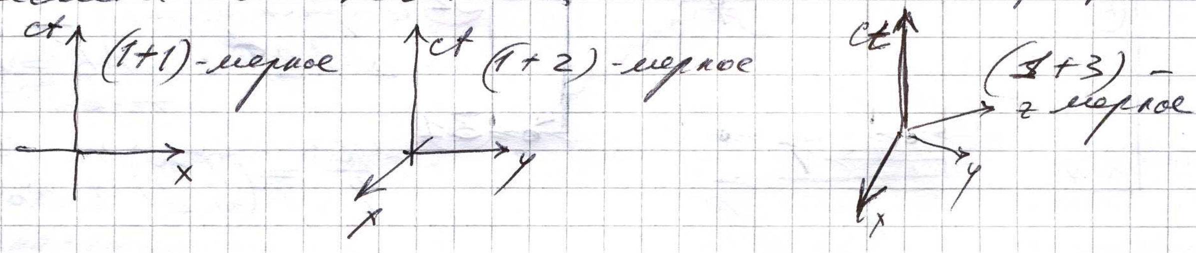
$$L'_\perp = kL_\perp, \quad L_\perp = kL'_\perp \Rightarrow L_\perp = k^2 L_\perp, \quad k = \pm 1 \rightarrow k = 1$$

§2. Точечное событие в пространстве-времени Минковского. Вывод преобразований Лоренца.

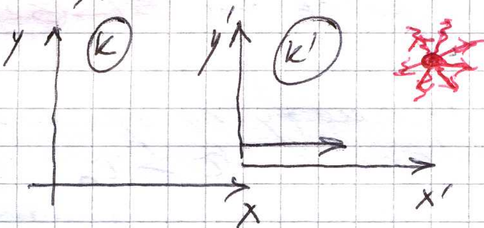
Определение. Совокупность четырёх величин

$$x = (x_0 = ct,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$$
$$= (ct,\ x, y, z) = (ct, \vec{r}) = (ct, \vec{x})$$

временной переменной $x_0 = ct$ и трёх пространственных переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ задаёт точечное событие в так называемом 4х-мерном пространстве-времени Минковского.



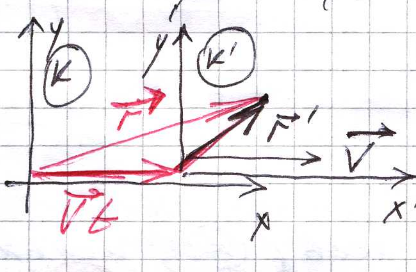
Физические явления можно описывать относительно различных ИСО, при этом время и координаты точечного события имеют различное значение в различных ИСО:



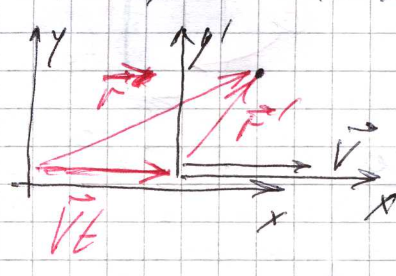
Пример

Точечное событие — вспышка света — в различных ИСО характеризуется разл. значениями ct и $\vec{x}$.

Нерелятивистская механика ($V \ll c$)



Релятивистская механика ($V \lesssim c$)



$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t, \\ t' = t. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y,\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = ? \\ y' = y,\ z' = z \\ t' = ? \end{cases}$$

преобразование Галилея

Преобразование Лоренца

Имеем при $V \lesssim c$ из картинки справа, учитывая то, что $L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$

$$x = x'\sqrt{1 - V^2/c^2} + Vt$$

$$x^0 = x'\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$ аналогично $$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Из последней формулы, выражающей x через x' и t', определяем t':

$$Vt' = x\sqrt{1-V^2/c^2} - x' = x\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - (x-Vt)\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} =$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$

Учитывая также неизменность поперечных размеров, получаем преобразования Лоренца

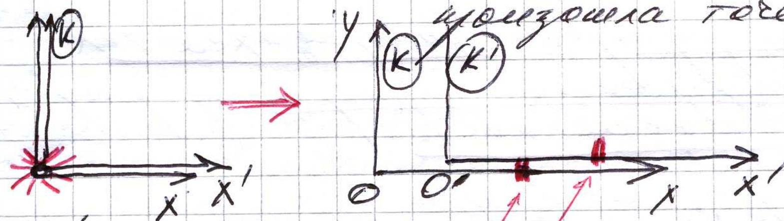
$$t' = \frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y'=y, \quad z'=z,$$

выражающие время и координаты точечного события в (K') через время и координаты точечного события в (K).

Обратное преобразование Лоренца от (K') к (K) получаются заменой $V \to -V$ и даются формулами:

$$t = \frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y=y', \quad z=z'.$$

Приведем еще другой способ вывода преобразований Лоренца, рассматривая следующую физическую ситуацию. Пусть имеются две ИСО (K) и (K'): (K') движется относительно (K) со скоростью V; при $t=t'=0$ начала систем координат рассматриваемых ИСО совпадали и в этот момент в начале координат произошла точечная вспышка света



$t=t'=0$

„световой зайчик" на осях x и x' систем (K) и (K').

Преобр. Галилея
$$\begin{cases} x = x'+Vt \\ y=y', \ z=z' \\ t=t' \end{cases} \xrightarrow[\text{на } V\lesssim c]{\text{обобщаем}} \begin{cases} x = \gamma(x'+Vt'), \quad \gamma = ? \\ y=y', \ z=z', \\ t\neq t' - ? \end{cases}$$

Имеем для световых зайчиков с координатами $x=ct$, $x'=ct'$ в системах (K) и (K'):

$$x = ct = \gamma(ct'+Vt')$$

обратное преобр. $\rightarrow$ $x' = ct' = \gamma(ct - Vt)$ $\Longrightarrow c^2tt' = \gamma^2(c^2-V^2)tt'$

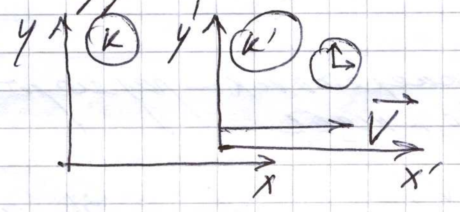
$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2-V^2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$\Rightarrow x = \gamma(x'+Vt') = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \xrightarrow{\text{обратно}} x' = \gamma(x+Vt)$ и т.д., завершаем также, как и в первом способе вывода

§3. Следствие преобразований Лоренца.

Полезно, исходя из преобразований Лоренца, полученных в предыдущем разделе, получить их следствия.

- Эффект замедления времени движущихся часов



Пусть в K' покоятся часы в точке с коорд. x'.

Имеем для двух событий, связанных с рассматриваемыми часами:

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Так как часы покоятся в K', то $x_2' = x_1' = x'$. Вычитая из t_2 t_1, находим для промежутка времени между двумя событиями:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{V}{c^2}\cancelto{0}{(x_2' - x_1')}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

т.е. воспроизводится известный эффект замедления времени движущихся часов:

$$\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1-V^2/c^2}, \quad \tau > \tau_0 \; !$$

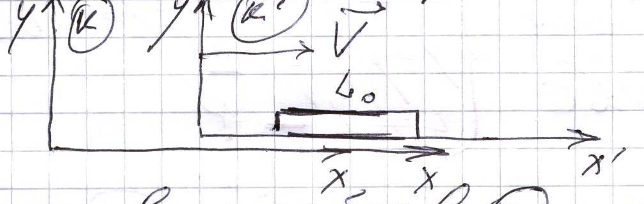
- Сокращение размеров движущихся тел.

Для поперечных размеров из $y = y'$ и $z = z'$ следует их неизменность:

$$l_\perp' = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = l_\perp,$$

аналогично и для поперечных размеров вдоль оси z.

Для продольных размеров: рассмотрим линейку, покоящуюся в K'



$$l_0 = x_2' - x_1'$$

Длина l линейки в K получается по определению как разность координат концов линейки, измеренных в один и тот же момент времени $t_2 = t_1$:

$$l = (x_2 - x_1)\Big|_{t_2 = t_1} = ?$$

Имеем

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[(x_2 - x_1) - \frac{V}{c^2}(t_2 - t_1)\right]\Big|_{t_2 = t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

$\Rightarrow$ $l = x_2 - x_1 = l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ — сокращение размеров движущихся тел

• Относительность одновременности — также легко следует из преобразований Лоренца.

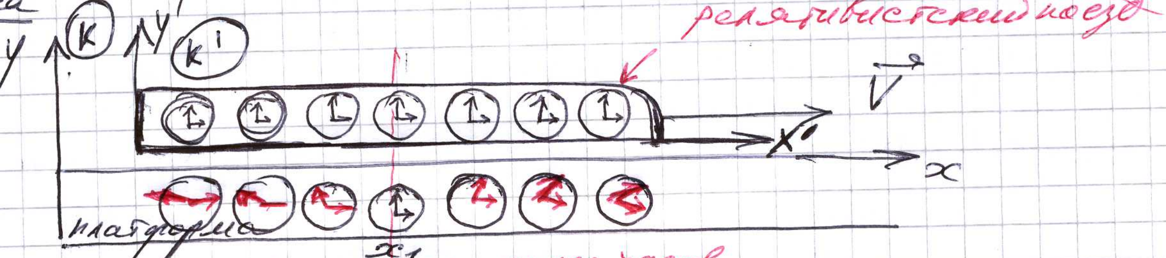
Рассмотрим события ① и ②, одновременные в (K'), т.е. $t_2' = t_1'$ в (K'), тогда в силу преобразований Лоренца

$$0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1) \Rightarrow \text{при } x_2 \neq x_1,\ t_2 \neq t_1,$$

в частности, если $x_2 > x_1$, то $t_2 > t_1$, аналогично при $x_2 < x_1$ $t_2 < t_1$.

Задача



показания пары часов в (K) и (K') совпали

"Что покажут" часы (качественно), расположенные в (K) справа, т.е. при $x_2 > x_1$, и слева, т.е. при $x_2 < x_1$, от выделенных часов с x_1.
Ответ показан красными стрелками.

• Закон сложения скоростей

Исходим из преобразований Лоренца для координат и времени точечных событий, связанных с одной и той же движущейся частицей

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

При бесконечно малом изменении времени

$$t \to t + dt, \quad t' \to t' + dt'$$

координаты x, y, z частицы также изменяются на бесконечно малые величины

$$x \to x + dx, \quad y \to y + dy, \quad z \to z + dz$$

Аналогично и для x', y', z' в (K')

$$x' \to x' + dx', \quad y' \to y' + dy', \quad z' \to z' + dz'$$

Имеем из преобразований Лоренца:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Отсюда находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = v_y = v_y' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V v_x'/c^2}.$$