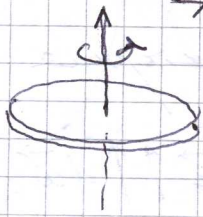
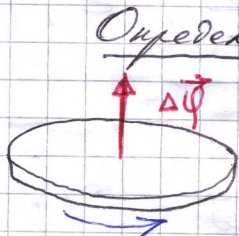


Лекция 11 Элементы кинематики и динамики вращательного движения твердых тел. Момент импульса и кинетическая энергия вращ. движения твердого тела с фиксированной осью вращения.

§1. Элементы кинематики вращательного движения твердого тела с фиксированной осью вращения.



Рассмотрим диск, как абст. твердое тело, с фиксированной осью вращения, являющейся осью симметрии этого тела.



Определение

Элементарный угол поворота $\Delta\vec{\varphi}$, как векторная величина:

- 1) направление $\Delta\vec{\varphi}$ ищется по правилу буравчика
- 2) модуль $|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$ — угол поворота диска в радианах

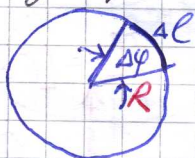
Определение Мгновенная угловая скорость, как векторная величина $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad \vec{\omega} \uparrow \uparrow \Delta\vec{\varphi}$$

или в проекции на ось вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Единица измерения ω — 1 рад/сек = 1 рад/с.



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{R}, \quad 1 \text{ рад} = \frac{(\Delta l = R)}{R} = \frac{R}{R} = 1$$

$$\rightarrow \Delta l = R \Delta\varphi$$

Определение Мгнов. линейная скорость точек диска:

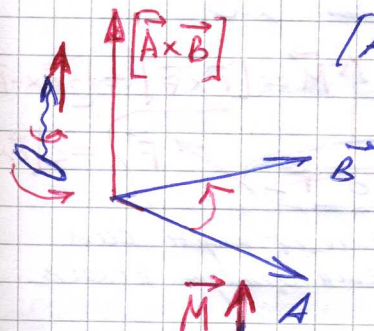


$$v = \frac{dl}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega$$

Определение Векторное произведение двух векторов, как векторная величина

$$[\vec{A} \times \vec{B}] = \begin{cases} \text{это вектор, напр. которого ищется по правилу правого винта} \\ |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha \end{cases}$$



Мысленно берем за вектор \vec{A} , как за рукоятку буравчика, поворачиваем его до совпадения со вектором \vec{B} при этом прикладываем, куда будет двигаться острие буравчика

Пример



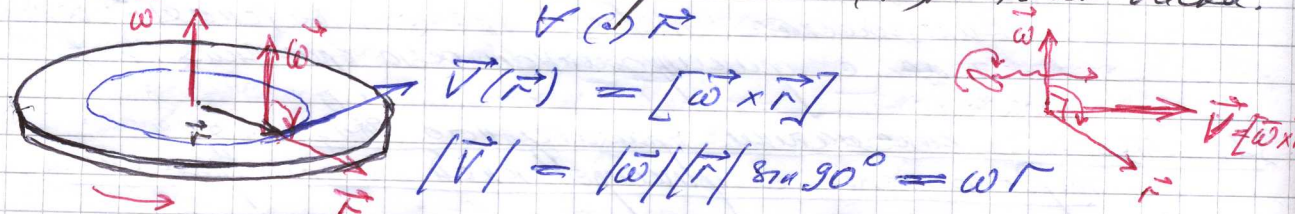
Момент силы \vec{F} относительно точки O на оси двери

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| h$$

$h = r \sin \alpha$ — плечо силы.

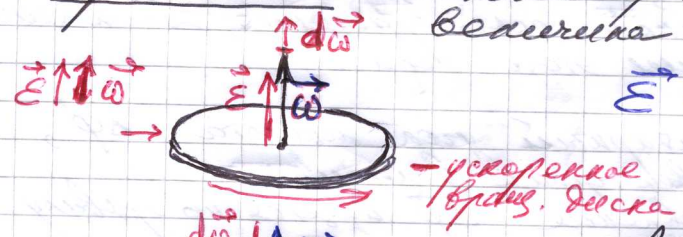
Пример Диск вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$.
Опишите поле скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ точек диска.



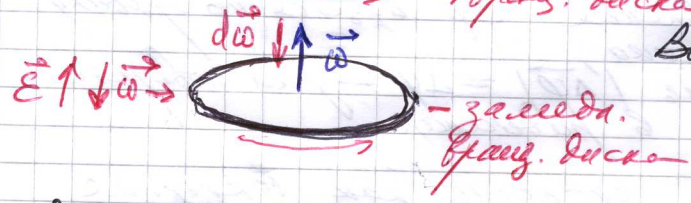
$$\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin 90^\circ = \omega r$$

Определение Угловое ускорение $\vec{\epsilon}$, как векторная величина



$$\vec{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \vec{\epsilon} \uparrow \uparrow d\vec{\omega}$$



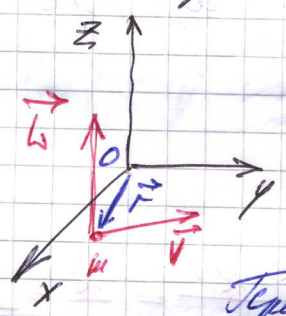
Видно, что для $d\vec{\omega} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$, $\vec{\epsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$,
для $d\vec{\omega} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$, $\vec{\epsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$.

§2. Момент импульса материальной точки и твёрдого тела в фиксиров. осю вращения

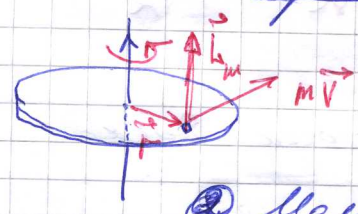
Определение Момент импульса мат. точки
отн. центр. осю O :

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$$

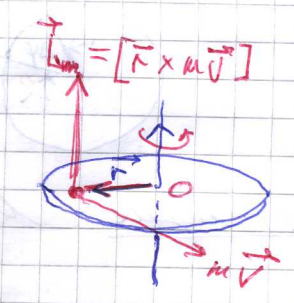
$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$$



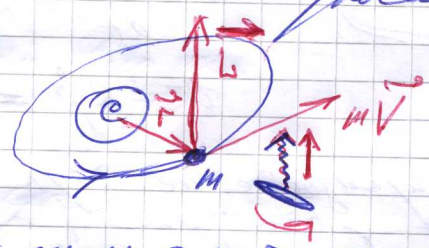
Примеры



① Момент импульсов элементов m вращающегося диска

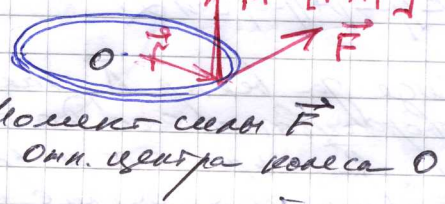


② Момент импульса планеты



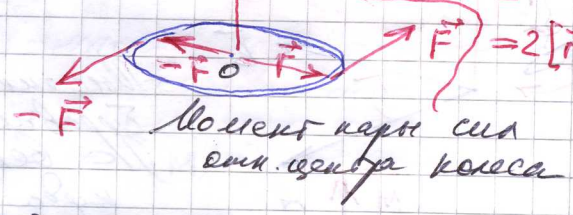
③ Момент силы, с ког. штер действует на рулевое колесо

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$



Момент силы \vec{F}
отн. центра колеса O

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] + [-\vec{r} \times -\vec{F}] = 2[\vec{r} \times \vec{F}]$$



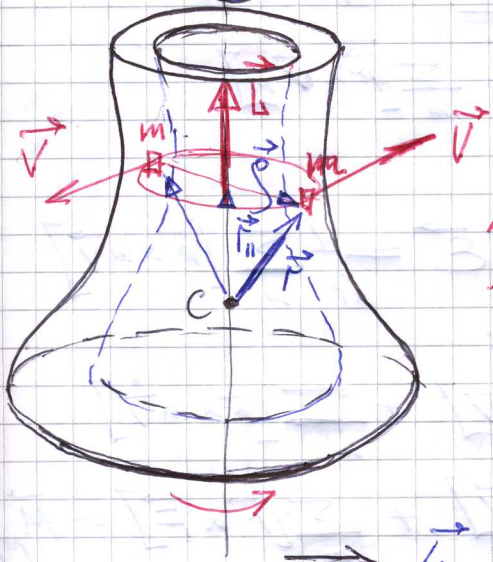
Момент пары сил
отн. центра колеса

Размерности

$$[\vec{L}] = [[\vec{r} \times m\vec{v}]] = \frac{ML^2}{T}$$

$$[\vec{M}] = [[\vec{r} \times \vec{F}]] = \frac{ML^2}{T^2}$$

Подсчитаем теперь момент инерции симметричного твердого тела относит. его точки на оси вращения.



Разобьем тело на небольшие массы m, симметрично расположенные относительно оси симметрии тела

$$\vec{L} = \vec{L}_{(центр)} + \vec{L}_{(центр)} = [\vec{r}_{||} \times m\vec{v}] + [\vec{\rho} \times m\vec{v}] + [\vec{r}_{||} \times -m\vec{v}] + [-\vec{\rho} \times -m\vec{v}] = 2[\vec{\rho} \times m\vec{v}]$$

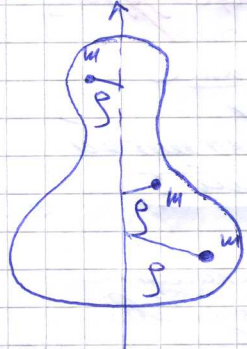
Линейный момент
Суп. центр.
Суп. центр.

$$\vec{L}_{\text{всего т. тела}} = \sum_m [\vec{\rho} \times m\vec{v}] \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

$$|\vec{L}| = \sum_m \rho |m\vec{v}| = \sum_m m \rho^2 \omega = \omega \cdot I$$

Определяем

Момент инерции симм. тела отн. оси вращения является величиной

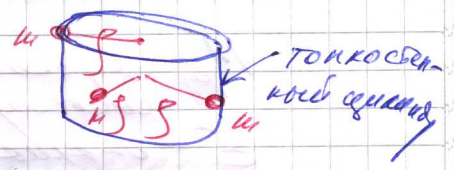
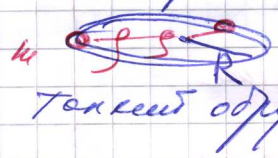


$$I = \sum_m m \rho^2 - \text{сумма масс умноженных на квадрат расстояния до оси вращения}$$

$$\vec{L}_{\text{всего т. тела}} = \vec{\omega} \cdot \sum_m m \rho^2 = I \vec{\omega}$$

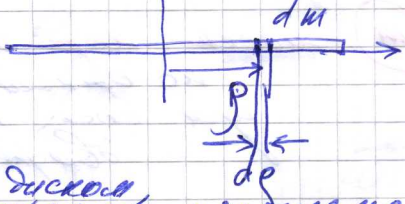
Приведем примеры моментов инерции разл. т. тел.

(1) Тонкий обруч или цилиндр



$$I = \sum_m m \rho^2 = R^2 \sum_m m = MR^2$$

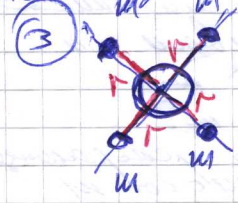
(2) Тонкий стержень:



$$dm = M \cdot ds$$

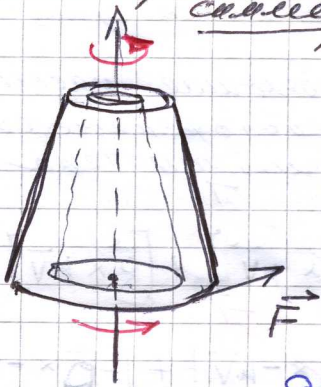
$$I = \int dm \rho^2 = \int_{-l/2}^{l/2} M \rho^2 d\rho = \frac{M}{3} \rho^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{M l^2}{12}$$

Крестовина с диском, обруч, стержень и четыре точечные массы m



$$I_{\text{крестовины}} = I_{\text{диск}} + 2I_{\text{стержня}} + 4m l^2$$

§ 3. Уравнение динамики вращательного движения симметричного твердого тела с фиксированной осью вращения.



$$\vec{L} - I\vec{\omega} = \sum_m [\vec{r} \times m\vec{v}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \sum_m [\vec{r} \times m\vec{v}]$$

для правой стороны:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_m [\vec{r} \times m\vec{v}] &= \sum_m [\dot{\vec{r}} \times m\vec{v}] + \sum_m [\vec{r} \times m\dot{\vec{v}}] \\ &= \sum_m [\vec{v} \times m\vec{v}] + \sum_m [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M} \end{aligned}$$

Скорость изменения момента импульса тв. тела с фиксиров. осью вращения равна произведению момента инерции тела на его угловое ускорение и определяется эта величина результирующей моментом всех сил, действующих на тело.

Имеет место замечательное аналогичное между динамикой поступат. и вращат. движений:

Динамика вращат. дв. тв. тела с фикс. осью вращения

Динамика поступат. дв. тв. тела, масс. центр

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{грз}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{грз}$$

$\vec{M}_{грз}$ - вращательное на систему,
 $\vec{\varepsilon}$ - ускорение системы - угловое ускорение

$\vec{F}_{грз}$ - вращательное на систему,
 \vec{a} - ускорение системы - линейное ускорение

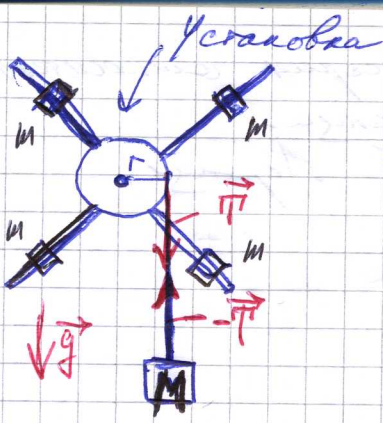
$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_{грз}}{I}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{грз}}{m}$$

$I = \sum m r^2$ - момент инерции, мера инертности по отношению к вращению

m - масса мера инертности по отнош. к ускор. поступат. движению

Задача Водяная турбина ускорение маятника Обербека - крестовины со шкивом и четвертью груза на стержнях, крестовины под действием некоторого ускорения груза массой m



Решение.

Выписываем уравнения динамики вращательного движения крестовины и динамики поступательного движения груза m.

$$I \vec{\epsilon} = M_{гр} \vec{v} \Rightarrow I \epsilon = T \cdot r - M_{TP}$$

крестовина на ось вращения.

$$M \vec{a} = T + Mg \Rightarrow Ma = Mg - T$$

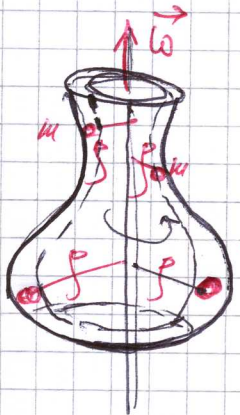
$$\begin{cases} I \epsilon = T \cdot r - M_{TP}, & v = \omega r \\ Ma = Mg - T. & \frac{dv}{dt} = a = r \frac{d\omega}{dt} = r \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} I \epsilon / r = T - \frac{M_{TP}}{r}, & \text{складываем} \\ M r \epsilon = Mg - T & \text{умножаем} \end{cases} \Rightarrow \epsilon \left(\frac{I}{r} + m r \right) = mg - \frac{M_{TP}}{r}$$

и.е.
$$\boxed{\epsilon = \frac{Mg \cdot r - M_{TP}}{I + Mr^2}} \quad I = I_{диск} + I_{сфер} + 4mr^2$$

M - масса груз. груза; m - массы на крестовине, r - радиус шкива.

§ 4. Кинетическая энергия вращат. движения твердого тела с фикс. осью вращения.



$$K_{в.дв} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2$$

устанавливаем $v_i = \omega r_i$

$$= \frac{I \omega^2}{2}$$

разбиваем тело на элементарные массы и суммируем их кинет. энергии $\frac{m_i v_i^2}{2}$.

Аналогия с поступ. движением

Кин. энергия вращат. движения

Кинет. энергия поступ. движения

$$K_{в.дв} = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$K_{пост.дв} = \frac{m \vec{v}^2}{2}$$

$$\omega \leftrightarrow v$$

$$I \leftrightarrow m$$

Момент инерции тв. тела отн. фиксиров. оси вращ.:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$