Лекция-семинар. Движение заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.

§1. Частицы и поля в СТО.

Частицы в специальной теории относительности (СТО) рассматриваются как точечные объекты (идеализированная модель) с конечным числом степеней свободы; электромагнитные поля в СТО — это системы с бесконечным числом степеней свободы.

Состояния частиц в СТО

$$x(t) = \begin{pmatrix} x^0 = ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Четырёхвекторы координат и импульсов

Состояния полей в СТО

$$\vec{B}(\vec{r},t),\ \vec{E}(\vec{r},t)$$
$$\varphi(\vec{r},t);\ \vec{A}(\vec{r},t)$$

Физические поля, как функции $\vec{r}$ и t, нумерующих состояния поля.

Уравнения движения релятивистских частиц имеют вид:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}\times\vec{B}] \\ \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{v}\cdot\vec{E} \end{cases}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -\vec{E}/c \\ \frac{\vec{E}}{c}, & -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma \end{pmatrix}$$

При переходе от одной ИСО к другой ИСО:

$$p'^\mu = L^\mu{}_\nu p^\nu, \quad F'^{\mu\lambda} = L^\mu{}_\nu L^\lambda{}_\sigma F^{\nu\sigma} \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

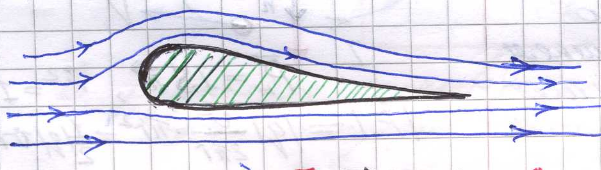
Здесь по повторяющимся индексам идёт суммирование.

Можно привести много примеров физических полей, как воображаемых, так и реально действующих на приборы и органы чувств.

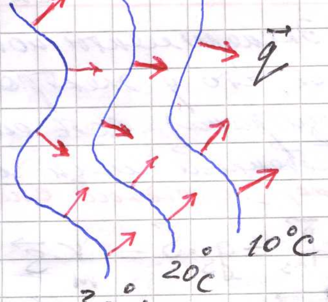
1° 

Поле скоростей точек вращающегося диска

$$\vec{V}(\vec{r}) = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$

2° 

$\vec{V}(\vec{r},t)$ — поле скоростей частиц газа или жидкости, обтекающих крыло

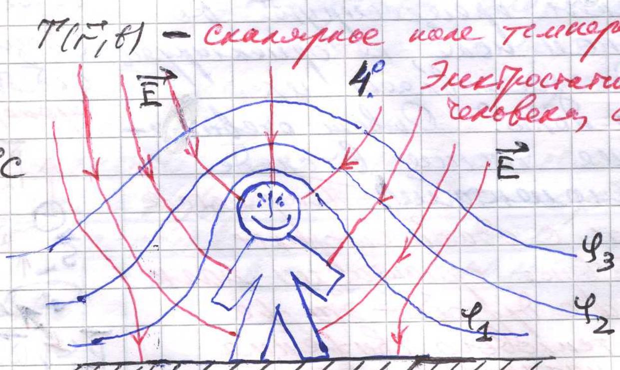
3° 

$\vec{q}(\vec{r},t)$ — векторное поле потоков тепла

$$\vec{q}(\vec{r},t) = -æ\vec{\nabla}T(\vec{r},t)$$

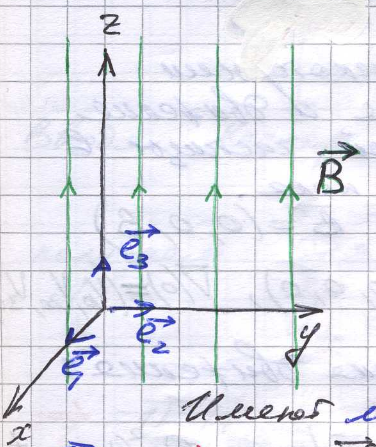
$T(\vec{r},t)$ — скалярное поле температур

4° Электростатическое поле около человека, стоящего на Земле.



$$\vec{E}(\vec{r}),\ \varphi(\vec{r})$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

§2. Описание движения нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле.



Покажем, как описывается движение нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле с индукцией $\vec B=(0,0,B)$, параллельной оси Z.
Исходим из уравнения движения:

$$\frac{d\vec p}{dt}=q[\vec V\times\vec B]=m\frac{d\vec V}{dt}$$

Имеют место следующие наблюдения:

(А) $\Rightarrow$ $m\vec V\cdot\dot{\vec V}=q\,\vec V\cdot[\vec V\times\vec B]=0=\frac{dK}{dt}\Rightarrow K=\frac{m\vec V^2}{2}=\text{Const}$,

т.е. $K=\frac{m\vec V^2}{2}=\text{Const}$, $\vec V^2=\vec V_\parallel^2+\vec V_\perp^2=\text{Const}$, $\vec V_\parallel\parallel\vec B$, $\vec V_\perp\perp\vec B$.

(Б) $\vec e_3\cdot m\dot{\vec V}=q\,\vec e_3\cdot[\vec V\times\vec B]=m\dot V_3=0\Rightarrow V_3^2=V_\parallel^2=\text{Const}$

$\Rightarrow$ $V_3(t)=\dot x_3(t)=V_{30}$, $x_3(t)=V_{30}t+x_{30}$, $\Rightarrow$ $\vec V_\perp^2=\vec V^2-V_3^2=\text{Const}$.

(В) $m\dot{\vec V}=m\dot{\vec V}_\perp=q[\vec V\times\vec B]=q[\vec V_\perp\times\vec B]=[-q\vec B\times\vec V_\perp]$

$\Rightarrow$ $\dot{\vec V}_\perp=\left[-\frac{q\vec B}{m}\times\vec V_\perp\right]$

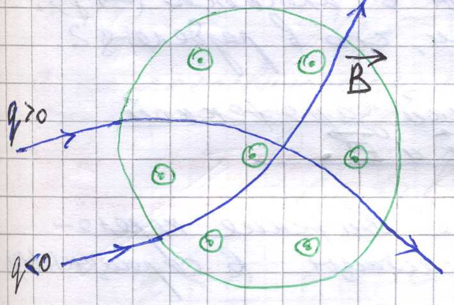
Лемма $\vec A^2(t)=\text{Const}$

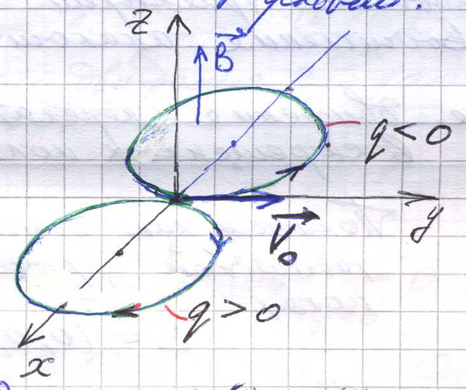
$\dot{\vec A}=[\vec\omega\times\vec A]$, $\vec\omega=\frac{d\vec\varphi}{dt}$.

$\Rightarrow$ $\vec V_\perp(t)$ вращается в плоскости (x,y) с угловой скоростью $\vec\omega_\Lambda=-\frac{q\vec B}{m}$, можно, следовательно, записать

$\vec V_\perp(t)=\left(V_\perp\cos(\omega_\Lambda t+\varphi_0),\ V_\perp\sin(\omega_\Lambda t+\varphi_0),\ 0\right)$, $\omega_\Lambda=-\frac{qB}{m}$ Ларморова частота.

Константы $V_\perp$ и φ_0 определяются из начальных условий.





Задача Нарисовать траектории частиц $\pm q\gtrless 0$ в плоскости (x,y) при $\vec V_0=(0,V_0,0)$

Задача Определить координаты $x_1(t)=\ (t)$ и $x_2(t)=y(t)$ для частицы, влетающей во внешнее магнитное поле $\vec B=(0,0,B)$.
Начальные данные: $\vec r(0)=(0,0,0)$, $\vec V(0)=(0,V_{20},V_{30})$.

Решение Из полученных выше формул находим:

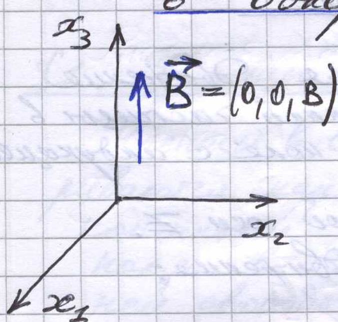
$x(t)=\int V_\perp\cos(\omega_\Lambda t+\varphi_0)=\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}\sin(\omega_\Lambda t+\varphi_0)+C_1$, $x_3=V_{30}t+C_3$

$y(t)=\int V_\perp\sin(\omega_\Lambda t+\varphi_0)=-\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}\cos(\omega_\Lambda t+\varphi_0)+C_2$ $\Rightarrow C_3=0$

$\Rightarrow$ $V_1(0)=V_\perp\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, $x(t)=\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}\cos(\omega_\Lambda t)+C_1=\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}(\cos\omega_\Lambda t-1)$, $V_\perp=V_{20}$

$y(t)=\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}\sin(\omega_\Lambda t)+C_2\Rightarrow C_2=0$, $C_1=-\frac{V_\perp}{\omega_\Lambda}$

§3. Описание движения релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле.



Совершенно аналогично, с некоторыми изменениями, описывается и движение релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле.

Пусть известны $\quad q,\ m;\ \vec{B}=(0,0,B)$

$\vec{r}(0)=(0,0,0),\ \vec{V}(0)=(V_{10},V_{20},V_{30})$

Требуется определить $\vec{V}(t),\ \vec{r}(t)=?$

Имеем, используя релятивистские уравнения движения:

(А) $$\frac{d\mathcal{E}_{рел}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}=\vec{V}\cdot\vec{F}_{Лор}=q\vec{V}\cdot[\vec{V}\times\vec{B}]=0\Rightarrow\vec{V}^2(t)=const$$

(Б) $$\vec{e}_3\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{e}_3\cdot[\vec{V}\times\vec{B}]=0=\frac{dp_3}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mV_3}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}=0\rightarrow V_3(t)=V_{30}=const$$

$$\dot{x}_3=V_{30},\quad x_3(t)=V_{30}t+C_3=V_{30}t,\ \text{т.к. } x_3(0)=0.$$

$$\Rightarrow\quad\vec{V}_\perp^2=\vec{V}^2-V_3^2=const.\qquad R=\frac{V_\perp}{|\omega_\perp|}=\frac{V_\perp m}{qB\sqrt{1-V^2/c^2}}$$ — радиус орбиты в (x_1,x_2)

(В) $$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}=\frac{d}{dt}\frac{m\vec{V}_\perp}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}=q[\vec{V}_\perp\times\vec{B}]$$

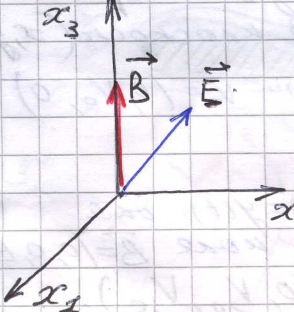
т.к. $\vec{V}^2=const\rightarrow\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}=const\rightarrow\frac{d\vec{V}_\perp}{dt}=\left[q\frac{\vec{B}}{\gamma m}\times\vec{V}_\perp\right]=[\vec{\omega}_{рел}\times\vec{V}_\perp]$

$$\Rightarrow\vec{\omega}_{\perp рел}=-\frac{q\vec{B}}{m\gamma}=-\frac{q\vec{B}}{m}\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2},\quad|\vec{\omega}_\perp|\cdot R=V_\perp\rightarrow R=\frac{V_\perp}{|\vec{\omega}_{\perp рел}|}$$

Далее самостоятельно вычислите все требуемые величины.

Задача: Вычислите $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, получите уравнение траектории частицы в плоскости (x,y). Вычисления аналогичны тем, что в разделе §2.

§4. Описание движения нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных полях $\vec{B}$ и $\vec{E}$.



Покажем, как описывается движение нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных полях

$$\vec{B}=(0,0,B),\quad\vec{E}=(0,E_2,E_3).$$

Исходим из уравнений движения:

$$m\dot{\vec{V}}=q\vec{E}+q[\vec{V}\times\vec{B}].$$

Имеют место следующие наблюдения.

(А) $$m\dot{V}_3=m\vec{e}_3\cdot\dot{\vec{V}}=q\vec{e}_3\cdot\vec{E}+q\vec{e}_3\cdot[\vec{V}\times\vec{B}]=qE_3$$

$$\rightarrow V_3(t)=\frac{qE_3t}{m}+V_{30},\quad x_3(t)=\frac{qE_3t^2}{2m}+V_{30}t+x_{30}.$$

(Б) $$m\dot{\vec{V}}_\perp=qE_2\vec{e}_2+q[\vec{V}_\perp\times\vec{B}]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec V}_\perp = \left[-\frac{q\vec B}{m}\times \vec V_\perp\right] + \frac{qE_2}{m}\left[\vec e_3\times\vec e_1\right], \quad \text{т.к. } \vec e_2 = \left[\vec e_3\times \vec e_1\right]$$

$$= \left[-\frac{q\vec B}{m}\times\vec V_\perp\right] + \left[-\frac{q\vec B}{m}\times -\frac{\vec e_1 \cdot E_2}{B}\right] = \left[-\frac{q\vec B}{m}\times\left(\vec V_\perp - \frac{\vec e_1 E_2}{B}\right)\right]$$

Вводя вектор

$$\vec v_\perp \overset{def}{=} \vec V_\perp - \frac{E_2}{B}\vec e_1, \qquad \vec\omega_1 \overset{def}{=} -\frac{q\vec B}{m}$$

получаем для него следующее ур-е движения

$$\dot{\vec v}_\perp = \left[-\frac{q\vec B}{m}\times \vec v_\perp\right] \Rightarrow |\vec v_\perp| = const = \sqrt{\left(V_{10}-\frac{E_2}{B}\right)^2+V_{20}^2} \overset{def}{=} v_\perp = \sqrt{\left(V_{10}-\frac{E_2}{B}\right)^2+V_{20}^2}$$

$$\Rightarrow \vec v_\perp(t) = \vec V_\perp - \frac{E_2}{B}\vec e_1 = \left(v_\perp\cos(\omega_1 t+\varphi_0),\ v_\perp \sin(\omega_1 t+\varphi_0)\right).$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \frac{E_2}{B} + v_\perp\cos(\omega_1 t+\varphi_0) \xlongequal{\left(t\to t-\frac{\varphi_0}{\omega_1}\right)} \frac{E_2}{B}+v_\perp\cos\omega_1 t$$

$$V_2(t) = v_\perp \sin\omega_1 t, \qquad V_1(t)=\frac{E_2}{B}+v_\perp\cos\omega_1 t$$

(В)

$$\Rightarrow x_1(t)=\int V_1\, dt = \frac{E_2}{B}t + \frac{v_\perp}{\omega_1}\sin\omega_1 t + C_1, \quad x_1(0)=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$x_2(t) = \int V_2\, dt = \frac{-v_\perp}{\omega_1}\cos\omega_1 t + C_2 = \frac{v_\perp}{\omega_1}(1-\cos\omega_1 t), \quad x_2(0)=0,\ C_2=\frac{v_\perp}{\omega_1}$$

$$x_3(t) = \frac{qE_3}{2m}t^2 + V_{30}t$$

Задача Проанализировать все типы орбит частицы, движущейся в скрещённых полях $\vec B$ и $\vec E$.

Решение По x_3, очевидно, имеем равноускоренное инфинитное дв-е. Далее проанализируем только движение в плоскости (x_1, x_2).
По x_2 движение частицы происходит в полосе $\left(0, \frac{2v_\perp}{\omega_1}\right)$, $q<0$. $\omega_1 = \frac{qB}{m}$.
Рассмотрим случай $q<0$.
По x_1 имеем, очевидно, инфинитное движение со скоростью дрейфа

$$\vec V_{др} = \vec e_1 V_{1др} = \vec e_1\frac{E_2}{B} = \frac{[\vec E\times\vec B]}{B^2}$$

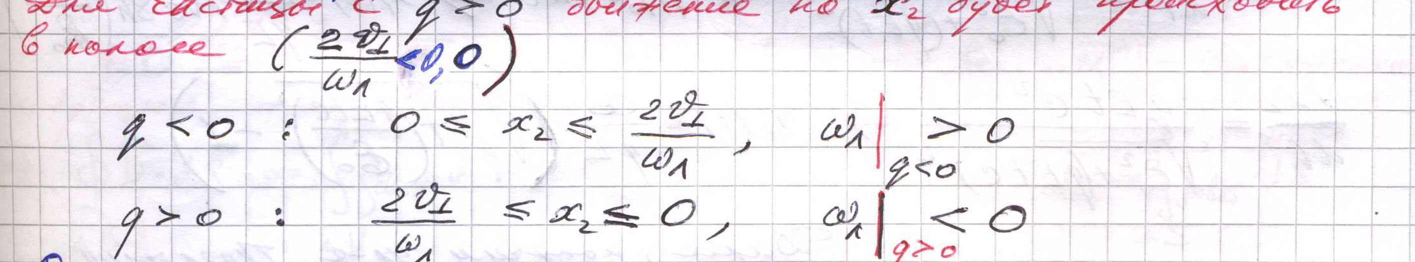
с накладывающимся на это движение дрожанием вокруг скорости дрейфа $v_\perp\cos\omega_1 t$.
Для частицы с $q>0$ движение по x_2 будет происходить в полосе $\left(\frac{2v_\perp}{\omega_1}<0, 0\right)$

$$q<0: \quad 0\le x_2 \le \frac{2v_\perp}{\omega_1}, \quad \omega_1\Big|_{q<0} > 0$$

$$q>0: \quad \frac{2v_\perp}{\omega_1}\le x_2\le 0, \quad \omega_1\Big|_{q>0}<0$$

Очевидно, следует различать случаи:

(а) $\frac{E_2}{B} > v_\perp$ (б) $\frac{E_2}{B} = v_\perp$ (в) $\frac{E_2}{B} \quad v_\perp$



Имеется также интересный случай движения с
$v_\perp = \sqrt{\left(V_{10}-\frac{E_2}{B}\right)^2+V_{20}^2} = 0$, при $V_{20}=0$ и $V_{10}=\frac{E_2}{B} \Rightarrow x_2(t)=0,\ x_1(t)=\frac{E_2}{B}t$.

§5. Описание движения релятивистской заряженной частицы в однородном электрическом поле.

Рассмотрим два случая движения частицы: (А) вдоль ускоряющего продольного поля, (Б) поперёк приложенному полю.

(А) Одномерное движение заряженной релятив. частицы вдоль ускоряющего поля:

$$\frac{dp_1}{dt} = qE \Rightarrow p_1(t) = p_{10} + qEt \Rightarrow v_1 = \dot{x}_1 = \frac{p_1 c^2}{\mathcal{E}_{рел}}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{(p_{10}+qEt)c^2}{\sqrt{(p_{10}+qEt)^2c^2+m^2c^4}}\Bigg|_{p_{10}=0} = \frac{qEtc^2}{\sqrt{m^2c^4+(qEtc)^2}}$$

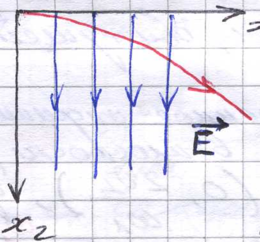
$$\Rightarrow x_1(t) = \int \frac{qEtc^2\,dt}{\sqrt{m^2c^4+(qEtc)^2}} = \frac{1}{qE}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+m^2c^4}} =$$

$x_1(0)=0$

$$= \frac{1}{2qE}\, 2\sqrt{m^2c^4+(qEtc)^2} + C_1 = \frac{mc^2}{qE}\sqrt{1+\left(\frac{qEtc}{mc^2}\right)^2} - \frac{mc^2}{qE}$$

Очевидно, при $\frac{qEtc}{mc^2} \ll 1$: $x_1(t) \simeq \frac{mc^2}{qE}\left(1+\frac{1}{2}\frac{(qEtc)^2}{m^2c^4}\right) - \frac{mc^2}{qE} \simeq \frac{q^2E^2}{2m}$

(Б) Релятивистская частица влетает поперёк поля $\vec{E} = (0, E, 0)$.



$\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}(0) = (v_{10}, 0, 0)$.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = 0 \Rightarrow p_1(t) = p_{10},\quad \frac{dp_3}{dt} = 0,\quad p_3(t) = p_{30} = 0$$

$$\frac{dp_2}{dt} = qE \Rightarrow p_2(t) = qEt + \cancelto{0}{p_{20}} = qEt$$

Далее, используя формулу $\vec{v} = \frac{\vec{p}\cdot c^2}{\mathcal{E}_{рел}}$, определяем $\dot{x}_1, \dot{x}_2$:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{p_{10}c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(qEt)^2}},\quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{p_{10}^2c^2+m^2c^4} \Rightarrow x_1(t) = \frac{p_{10}c}{qE}\,\mathrm{Arc\,sh}\left(\frac{qEtc}{\mathcal{E}_0}\right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{qEtc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(qEtc)^2}} \Rightarrow x_2(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}\left(\sqrt{1+\left(\frac{qEtc}{\mathcal{E}_0}\right)^2}-1\right)$$

Далее, получим ур-е траектории.

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,\quad x_3(t) = 0. \Rightarrow \frac{qEtc}{\mathcal{E}_0} = \mathrm{sh}\,\frac{qEx_1}{p_{10}c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}\left(\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{qEx_1}{p_{10}c}}-1\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}\left(\mathrm{ch}\,\frac{qEx_1}{p_{10}c}-1\right).$$

В нерелятивистском пределе $|qEx_1| \ll p_{10}c$, $\mathrm{ch}\,\frac{qEx_1}{p_{10}c} \simeq 1+\frac{q^2E^2x_1^2}{2p_{10}^2c^2}$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}\cdot\frac{q^2E^2x_1^2}{2p_{10}^2c^2} = \frac{\cancel{mc^2}\,qEx_1^2}{2m^{\cancel{2}}v_{10}^2\cancel{c^2}} = \frac{qE}{2mv_{10}^2}x_1^2$$ — как и должно быть в нерелятив. пределе.