Лекция 9. Уравнения электростатики. Применения закона Гаусса к расчету электростатических полей.

§ 1. Уравнения электростатики.

В предыдущих лекциях была получена система уравнений Максвелла для электромагнитных полей заряженных частиц в вакууме:

Закон Кулона $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$,

Закон Фарадея $\rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$,

Отсутствие магн. зарядов $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$,

Закон Ампера + токи смещ. Максвелла $\rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{B}] = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$.

Предположим, что

$\rho = \rho(\vec{r})$, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}) = 0$ — токов нет

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$ — поля постоянные — статические

Такими предположениями выделяется область электрических явлений — электростатика.

Электростатика — изучаются статические электрические поля статических распределений зарядов, токи отсутствуют, поля не зависят от времени; рассматриваются также условия равновесия заряженных тел.

При выполнении сформулированных выше предположений уравнения Максвелла распадаются на два блока, отдельно — для поля $\vec{E}$, и отдельно — для поля $\vec{B}$:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \\ [\vec{\nabla}\times\vec{E}] = 0. \end{cases}} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ [\vec{\nabla}\times\vec{B}] = 0 \end{cases} \Longrightarrow \vec{B}(\vec{r}) \equiv 0$$

Уравнения электростатики электрических полей $\vec{E}$ заряж. частиц в вакууме.

Уравнение с $[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = 0$ выражает условие потенциальности электростатического поля.

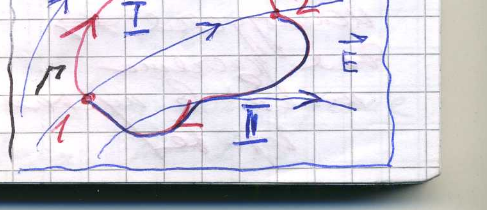
В самом деле:

$$\int\limits_S [\vec{\nabla}\times\vec{E}]\cdot d\vec{S} \xlongequal[\text{Грина-Стокса}]{\text{по теореме}} \oint\limits_{\partial(S)=\Gamma} \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

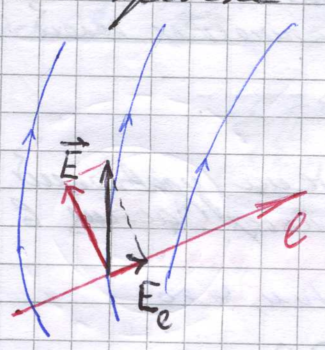
$$\Rightarrow \oint\limits_\Gamma \frac{\vec{F}_q}{q}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{(\cdot)1(I)}^{(\cdot)2} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int\limits_{(\cdot)2}^{(\cdot)1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{(\cdot)1(I)}^{(\cdot)2} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{(\cdot)1(II)}^{(\cdot)2} \vec{E}\,d\vec{l},$$

работа сил электростатического поля по перемещению единичного пробного заряда по замкнутому контуру равна нулю, или, эквивалентно, работа сил поля при перемещении единичного пробного заряда из одной точки в другую не зависит от формы пути. В таком случае, как уже обсуждалось в механике, поле является потенциальным, потенциал поля вводится соотношением:

$$\int\limits_{(\cdot)1(I)}^{(2)} \vec{E}\,d\vec{l} = \int\limits_{(\cdot)1(II)}^{(\cdot)2} \vec{E}\cdot d\vec{l} \xlongequal{def} -(\varphi_2 - \varphi_1).$$



В пределе бесконечно близких точек, т.е. $(\cdot)2 \to (\cdot)1$:



$$\vec E\cdot d\vec l = -(\varphi_2-\varphi_1)\Big|_{(\cdot)2\to(\cdot)1} = -d\varphi =$$

$$= |\vec E|\cdot|d\vec l|\cos(\vec E,\widehat{\,d\vec l}) = E_l\, dl$$

$$\Rightarrow \boxed{E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}}$$

проекция поля E_l на направление оси l равна минус частной производной потенциала по направлению $\vec l$.

$\Rightarrow$ в частности, $E_x = -\dfrac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial x}$, $E_y = -\dfrac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial y}$, $E_z = -\dfrac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial z}$,

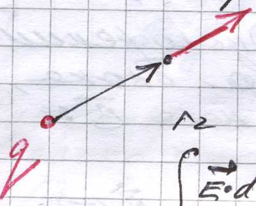
что кратко записывают в виде:

Очевидно, потенциал определяется с точностью до константы.

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Потенциальность электростатического поля была продемонстрирована, как следствие общей системы уравнений Максвелла, в применении к электростатическим явлениям.

Тот же факт может быть установлен и с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции для электрич. полей:



$$\vec E = k\frac{q\vec r}{r^3}, \qquad \vec E_{рез} = \vec E_1 + \vec E_2 + \dots + \vec E_N$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\vec E\cdot d\vec r = kq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\left(\frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r_1}\right) \Rightarrow \oint_\Gamma \vec E\cdot d\vec r = 0 =$$

$$= \int_S [\vec\nabla\times\vec E]\cdot d\vec S = 0$$

$\Rightarrow [\vec\nabla\times\vec E] = 0$ — для одного точечного заряда

$\Rightarrow [\vec\nabla\times\vec E_{рез}] = \sum\limits_{k=1}^{N}[\vec\nabla\times\vec E_k] = 0$ — для произв. системы точечных зарядов.

Подставляя выражение для эл. поля $\vec E = -\vec\nabla\varphi$ в уравнение Максвелла $\vec\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_0$, получаем фундаментальное уравнение, уравнение Пуассона, для вычисления электростатических полей, создаваемых распределением зарядов с плотностью $\rho(\vec r)$:

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\vec\nabla\cdot\vec\nabla\varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}, \text{ т.е.}$$

Используется для расчёта полей при $\rho(\vec r)\neq 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\dfrac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}, \\ \vec E = -\vec\nabla\varphi. \end{cases}$$

$\leftarrow$ уравнение Пуассона

Если $\rho(\vec r) = 0$, то получается уравнение Лапласа:

используется для расчета полей в пустом пр-ве $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \vec E = -\vec\nabla\varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ — Лапласиан.

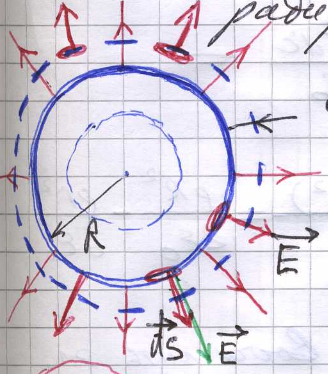
§2. Расчёт электростатических полей с помощью закона Гаусса.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\ , \Longleftrightarrow \boxed{\Phi_E=\oint\limits_{\partial(V)}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\int_V \rho(\vec{r})dV}{\varepsilon_0}}$$ Закон Гаусса.

$$[\vec{\nabla}\times\vec{E}]=0 \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\ , \quad E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Закон Гаусса удобно применять для расчета электростатических полей симметричных распределений зарядов. Покажем, как это делается, на нескольких примерах.

Пример 1 Электростатическое поле тонкой сферической оболочки радиуса R с поверхностной плотностью эл. заряда $\sigma \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.



$$\sigma\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\quad \Phi_E=\oint\limits_{\partial(V)}\vec{E}\cdot d\vec{S}\ \overset{\vec{E}\parallel d\vec{S}}{=\!=\!=}\ E(r)\oint\limits_{\partial(V)}dS=E(r)\cdot 4\pi r^2$$ – для сферической поверхности $\partial(V)$ – Гаусса

$\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\,dS$, т.к. $\vec{E}\parallel d\vec{S}$

$$\begin{cases} r\geq R:\ \Phi_E=4\pi r^2E(r)=\dfrac{4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0}\\ \Longrightarrow E=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} r\leq R:\ \Phi_E=4\pi r^2E(r)=0\\ \Longrightarrow E(r)=0\end{cases}$$ – внутри сферы нет зарядов

По напряженности поля $E(r)$ рассчитываем потенциал:

$$E_r=-\frac{d\varphi}{dr}\Longrightarrow \varphi(r)=-\int\limits_{(\cdot)O}^{r}E_r\,dr$$

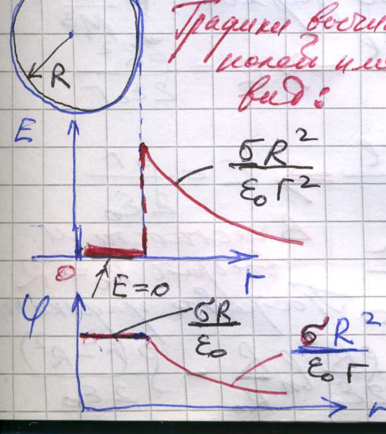
$(\cdot)O$ – некот. точка отсчёта для потенциала

$$r\geq R:\quad \varphi(r)=-\int\limits_{(\cdot)O\subset r_O}^{r}E(r)dr=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}\Bigg|_{r_O}^{r}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}-\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r_O}$$

Для удалённых скоплений зарядов в качестве точки отсчёта выбирают бесконечно удалённую точку с $r_O=\infty$, поэтому

$$r\geq R:\quad \varphi(r)=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r},$$

$$r\leq R:\quad \varphi(r)=-\int\limits_{(\cdot)O}^{r}E\,dr=-\int\limits_{(\cdot)\infty}^{R}E\,dr-\underbrace{\int\limits_{R}^{r}E\,dr}_{r\leq R,\ E=0}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\text{const}$$

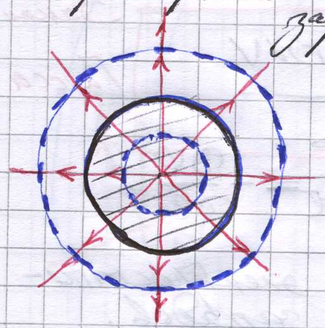


Графики вычисленных полей имеют вид:

$$E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}\qquad [E_l]=\frac{[\varphi]}{[l]}\ ,\ \frac{1\,\text{В}}{\text{м}}$$ – единица напряженности поля в системе СИ.

$1\frac{\text{В}}{\text{м}}$ – напряженность поля E, в котором на 1 м напряжение падает на 1 В.

Пример 2. Электростатическое поле шарообразного скопления зарядов с $\rho \frac{Кл}{м^2}$ радиуса R.



$$r \geq R: \quad \Phi_E = \oint_{O(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\, 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

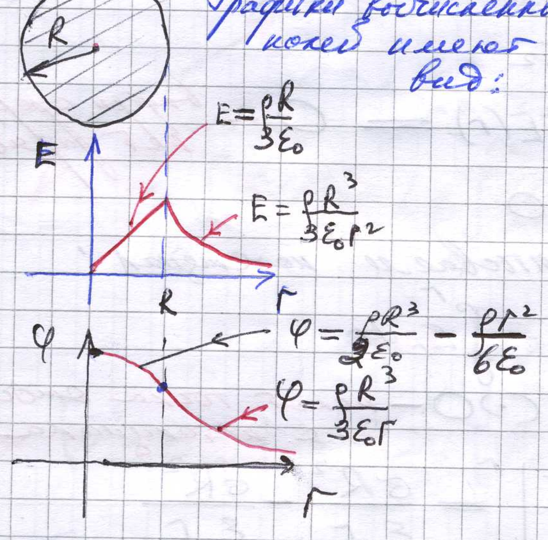
Вычисления проводятся так же, как и в случае тонкой сферической оболочки, - синей прерывистой линией показаны Гауссовы поверхности для них вычисляются потоки Φ_E и т.д.

$$r \leq R: \quad \Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{(4\pi r^3/3)\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = -\int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{R \geq r}^{r} \frac{\rho r\, dr}{3\varepsilon_0} =$$

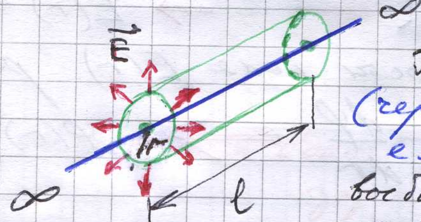
$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} - \frac{\rho (r^2 - R^2)}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

Графики вычисленных полей имеют вид:



Задача. Вычислить эл. поле бесконечной нити с линейной плотностью заряда $\varkappa \frac{Кл}{м}$.

Решение:



Гауссову поверхность (через которую вычисляем поток поля Φ_E) выбираем в форме цилиндра

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\pi r l = \frac{l\cdot\varkappa}{\varepsilon_0}$$

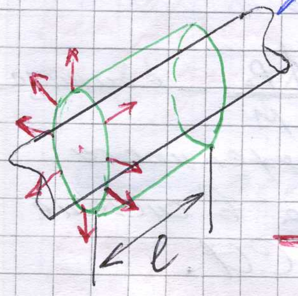
$$E(r) = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{r_0}.$$

Точку отсчёта r_0 в данном примере нельзя выбрать при $r=0$ и $r=\infty$

(сингулярный бесконечный провод $R \to 0$, R-радиус сечения $l \to \infty$)

Задача. Вычислить эл. поле бесконечно длинного цилиндра радиуса R с объемной плотностью заряда $\rho \frac{Кл}{м^3}$.



$$r \geq R: \quad \Phi_E = E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$r \leq R: \quad \Phi_E = E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(r)\Big|_{r \geq R} = -\int_{R_0}^{r} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R_0}$$

В частности, м. выбрать $R_0 = R$

Постройте графики полей

$$\Rightarrow \varphi(r)\Big|_{r \leq R} = -\int_{R_0}^{R} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho r\, dr}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{R}{R_0} - \frac{\rho (r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0}.$$