Лекция 8 Линейные многомерные колебания. Нормальные колебания и их свойства.

§1. Свободные колебания многомерных систем в линейном приближении.

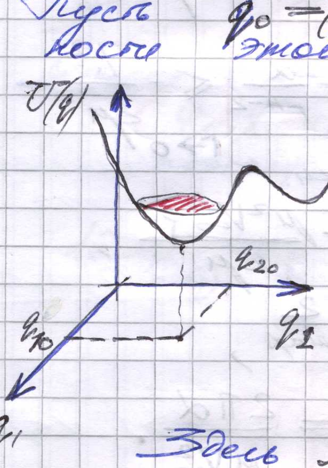
Рассмотрим механическую систему с f степенями свободы, совершающую финитные движения вблизи некоторого положения равновесия. Пусть лагранжиан этой системы имеет вид:

$$L = K(q, \dot q) - U(q) = \sum_{i,k=1}^{f} \frac{a_{ik}(q)\dot q_i \dot q_k}{2} - U(q_1, \dots, q_f).$$

Так как $\dot q_i \dot q_k$ симметричная относительно перестановки $i \leftrightarrow k$ комбинация, то коэффициенты $a_{ik}(q)$ всегда можно выбрат[ь] в виде симметричной матрицы

$$a_{ik}(q) = a_{ki}(q).$$

Пусть $q_0 = (q_{10}, \dots, q_{f0})$ – точка минимума для $U(q)$, в окрест[ности] этой точки имеем разложения:



$$U(q) = U(q_0) + \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{\partial U}{\partial q_i}\right]_{q=q_0}(q_i - q_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{q=q_0}(q_i - q_{i0}) \times (q_j - \dots$$

$$= U(q_0) + \sum_{i,j=1}^{f} \frac{k_{ij} x_i x_j}{2} + O(x^3),$$

$$K(q, \dot q) = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}(q_0)\dot x_i \dot x_j}{2} + O(x) = \sum_{i,k=1}^{f} \frac{m_{ik}\dot x_i \dot x_k}{2} + O(x \dots$$

Здесь $x_i \overset{\text{def}}{=} q_i - q_{i0}$ и введены матрицы коэффициентов жёсткости k_{ij} и коэффициентов масс m_{ij}:

$$k_{ji} = k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1f} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{f1} & k_{f2} & \dots & k_{ff} \end{bmatrix}, \qquad m_{ij} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1f} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{f1} & m_{f2} & \dots & m_{ff} \end{bmatrix} = m_{ji}$$

Лагранжиан рассматриваемой системы в линеаризованном приближении (ограничиваемся квадратичными членами разложения по $\dot x_i$ и x_k) имеет, таким образом, вид:

$$L\Big|_{\text{линеаризов. прибл.}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot x_i \dot x_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j$$

Удобно ввести векторные обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}, \quad [m_{ij}] = \hat m, \quad [k_{ij}] = \hat k \qquad (x, y) = \sum_i x_i y_i \text{ – скалярное произведение}$$

$$\hat m^T = \hat m \qquad \hat k^T = \hat k$$

Ниже предполагается, что квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии положит. определены:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot x_i \dot x_j = \frac{1}{2}(\dot x, \hat m \dot x) = \frac{1}{2}\sum_i \dot x_i (\hat m \dot x)_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot x_i \dot x_j > 0$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2}(x, \hat k x) > 0$$ – последнее условие иногда ослабляют, считая $(x, \hat k x) \geq 0$.

Линеаризованный лагранжиан

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x},\hat{m}\dot{x})-\frac{1}{2}(x,\hat{k}x)$$

приводит, очевидно, к следующим уравнениям движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{f}(m_{ij}\ddot{x}_j+k_{ij}x_j)=0,$$

или в векторной форме

$$\hat{m}\ddot{x}+\hat{k}x=0.$$ — система уравнений, описывающая свободные колебания.

Ищем решение этой системы

$$x_i(t)=A_i\cos(\omega t+\varphi_0),\quad x=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_f(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_f\end{pmatrix}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

в форме, когда все части системы, т.е. $x_i(t)$, колеблются с одной и той же частотой, т.е. в форме нормального колебания.

Определение Простое гармоническое движение механической системы вблизи положения равновесия называется нормальным колебанием системы.

Для определения амплитуд A_i и частоты ω нормального колебания получаем систему уравнений:

$$\sum_j(-m_{ij}\omega^2+k_{ij})A_j=0,\ \text{т.е.}\ (-\hat{m}\omega^2+\hat{k})x=0,$$

чтобы эта однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, с $A\neq 0$, необходимо, чтобы детерминант этой системы равнялся нулю

$$\|-\hat{m}\omega^2+\hat{k}\|=0=\det(-\hat{m}\omega^2+\hat{k})$$ — секулярное ур-е для опр. частот норм. колеб.

Секулярное уравнение имеет f корней $\omega_1^2,\dots,\omega_f^2$ — частот нормальных колебаний. По найденным частотам ω_α^2 легко определяются векторы амплитуд $\vec{A}^{(\alpha)}$ нормальных колебаний из решений системы уравнений:

$$(-\hat{m}\omega_\alpha^2+\hat{k})A^{(\alpha)}=0,\quad \alpha=1,\dots,f$$

§2. Свойства частот и амплитуд нормальных колебаний.

Имеют место следующие свойства частот ω_α^2 и соотношения ортогональности для векторов $A^{(\alpha)}$ нормальных колебаний:

1°. $$\omega_\alpha^2\hat{m}\vec{A}^{(\alpha)}=k\vec{A}^{(\alpha)}\Longrightarrow\omega_\alpha^2(A^{(\alpha)},\hat{m}A^{(\alpha)})=(A^{(\alpha)},\hat{k}A^{(\alpha)})$$

$$\Longrightarrow\omega_\alpha^2=\frac{(A^{(\alpha)},\hat{k}A^{(\alpha)})}{(A^{(\alpha)},\hat{m}A^{(\alpha)})}\geqslant 0$$ — в силу положит. определённости форм $(\dot{x},\hat{m}\dot{x})$ и $(x,\hat{k}x)$

Частоты нормальных колебаний $\omega_\alpha^2\geqslant 0$, т.о., вещественны.

2°. $$\begin{aligned}\omega_\alpha^2\hat{m}\vec{A}^{(\alpha)}&=\hat{k}\vec{A}^{(\alpha)},\\ \omega_\beta^2\hat{m}\vec{A}^{(\beta)}&=\hat{k}\vec{A}^{(\beta)},\end{aligned}\Longrightarrow\begin{aligned}\omega_\alpha^2(A^{(\beta)},\hat{m}A^{(\alpha)})&=(A^{(\beta)},\hat{k}A^{(\alpha)})\\ \omega_\beta^2(A^{(\alpha)},\hat{m}A^{(\beta)})&=(A^{(\alpha)},\hat{k}A^{(\beta)})\end{aligned}$$

в силу $\hat{k}^T=\hat{k}$, $\hat{m}^T=\hat{m}$: $\omega_\beta^2(A^{(\beta)},\hat{m}A^{(\alpha)})=(A^{(\beta)},\hat{k}A^{(\alpha)})$,

поэтому

$$(\omega_\alpha^2-\omega_\beta^2)(A^{(\beta)},\hat{m}A^{(\alpha)})=0$$

$\Longrightarrow$ при $\omega_\alpha^2\neq\omega_\beta^2\Longrightarrow(A^{(\beta)},\hat{m}A^{(\alpha)})=0,\ (A^{(\beta)},\hat{k}A^{(\alpha)})=0$

то есть векторы амплитуд $A^{(\alpha)}$ и $A^{(\beta)}$ нормальных колебаний с различными частотами $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$ ортогональны в метриках масс m_{ij} и жёсткостей k_{ij} при $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$:

$$\left(A^{(\alpha)}, \hat m A^{(\beta)}\right) = 0, \qquad \left(A^{(\alpha)}, \hat k A^{(\beta)}\right) = 0$$

при $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$.

Замечание. В физике и математике часто используются геометрии, более общие чем евклидова геометрия, так называемые римановы геометрии, задающиеся метрическим тензором g_{ij}. Скалярное произведение векторов x и y риманова пространства с метрикой $\hat g = [g_{ij}]$ определяются следующим образом:

$$(x, \hat g y) = \sum_{i,j} x_i g_{ij} y_j$$

$\hat g = [g_{ij}]$ – матрица метрики данной Римановой геометрии.

Пример 1 Геометрия Евклида

$$(\vec x, \vec y) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i \eta_{ij} y_j$$

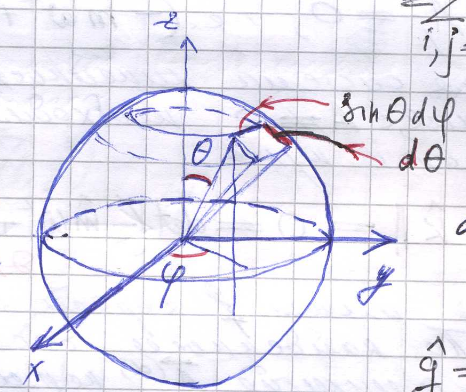
$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2 Геометрия Минковского

$$(x \hat g y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = \sum_{i,j=0,1,2,3} x_i g_{ij} y_j$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 3 Геометрия на сфере единичного радиуса



$$dl^2 = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

$$\hat g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

§3. Представление нормальных колебаний.

Если $A^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha 0})$ – нормальное колебание с частотой ω_α, то, очевидно, $a \cdot A^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha 0})$, где a – произв. число, также является нормальным колебанием с той же частотой. Для линейных колебаний справедлив принцип суперпозиции, поэтому произвольная линейная комбинация различных нормальных колебаний также является возможным колебательным движением системы.

В силу сказанного произвольное колебание системы может быть разложено по нормальным колебаниям

$$\forall\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_f(t) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \sum_{\alpha=1}^{f} A^{(\alpha)} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha 0}) \overset{def}{=} \sum_{\alpha=1}^{f} A^{(\alpha)} Q_\alpha(t),$$

здесь $Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha 0})$ – „координата" α-го нормального колебания.

Переход к координатам нормальных колебаний называют еще переходом к представлению нормальных колебаний; в таком представлении лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot x, \hat m \dot x) - \frac{1}{2}(x, \hat k x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta \left(A^{(\alpha)}, \hat{m} A^{(\beta)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} Q_\alpha Q_\beta \left(A^{(\alpha)}, \hat{k} A^{(\beta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha M_\alpha \dot{Q}_\alpha^2 - \frac{1}{2}\sum_\alpha k_\alpha Q_\alpha^2, \quad M_\alpha \stackrel{def}{=} \left(A^{(\alpha)}, \hat{m} A^{(\alpha)}\right)$$

$$k_\alpha = \left(A^{(\alpha)}, \hat{k} A^{(\alpha)}\right)$$

при получении последнего выражения использовано свойство ортогональности для амплитуд нормальных колебаний:

$$\left(A^{(\alpha)}, \hat{m} A^{(\beta)}\right) \stackrel{def}{=} M_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \left(A^{(\alpha)}, \hat{k} A^{(\beta)}\right) \stackrel{def}{=} k_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Уравнения Лагранжа в представлении нормальных колебаний выглядят особенно просто:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} = 0 \Rightarrow M_\alpha \ddot{Q}_\alpha + k_\alpha Q_\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{M_\alpha},$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0, \quad 1 \le \alpha \le f.$$

§4. Решение задачи о колебаниях системы с заданными начальными данными.

Пусть при $t=0$ известные положение и скорость системы, т.е.

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_f(0) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_f(0) \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\hat{m}\ddot{X} + \hat{k}X = 0}_{\text{сист. ур-ний для описания колебат. движений}}$$

Требуется определить $x(t)$ при $t>0$. Будем искать решение этой задачи с начальными данными (задачи Коши) в следующей форме:

$$x(t) = \sum_\alpha A^{(\alpha)}\left(a_\alpha \cos\omega_\alpha t + b_\alpha \sin\omega_\alpha t\right) = \sum_\alpha A^{(\alpha)} Q_\alpha(t),$$

здесь

$$Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos\omega_\alpha t + b_\alpha \sin\omega_\alpha t) = \sqrt{a_\alpha^2 + b_\alpha^2}\cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha 0})$$

является эквив. записью координат нормальных колебаний. Удовлетворим начальным данным:

$$x(0) = \sum A^{(\alpha)} a_\alpha, \qquad \left(A^{(\beta)}, \hat{m}\, x(0)\right) = \sum_\alpha a_\alpha \left(A^{(\beta)}, \hat{m} A^{(\alpha)}\right) =$$

$$\dot{x}(0) = \sum A^{(\alpha)} b_\alpha \omega_\alpha. \Rightarrow \qquad = \sum a_\alpha M_\alpha \delta_{\alpha\beta} = a_\beta M_\beta,$$

$$\text{т.е. } a_\beta = \frac{\left(A^{(\beta)}, \hat{m}\, x(0)\right)}{\left(A^{(\beta)}, \hat{m} A^{(\beta)}\right)}.$$

Точно также:

$$\left(A^{(\beta)}, \hat{m}\,\dot{x}(0)\right) = \sum_\alpha \left(A^{(\beta)}, \hat{m} A^{(\alpha)}\right) b_\alpha \omega_\alpha = \sum \delta_{\alpha\beta} M_\alpha b_\alpha \omega_\alpha = M_\beta b_\beta \omega_\beta,$$

$$\text{т.е.} \quad b_\beta = \frac{\left(A^{(\beta)}, \hat{m}\,\dot{x}(0)\right)}{\omega_\beta \left(A^{(\beta)}, \hat{m} A^{(\beta)}\right)}.$$

Замечание. Мы предполагали, что все частоты ω_α^2 $(\alpha = 1, \dots, f)$ различны, но может случиться, что некоторые частоты, в силу симметрии системы совпадут, т.е. некоторые частоты являются вырожденными. В этом случае также можно добиться выполнения соотношения ортогональности, и всё изложенное остаётся в силе.