Лекция 8. Физический смысл различных уравнений Максве[лла]. Предсказание Максвеллом электромагнитных в[олн]. Закон сохранения энергии для системы за[]ряженных частиц и электромагнитных полей в вакууме.

§1. Физический смысл различных уравнений Максвелла.

Обсудим кратко физический смысл полученных в предыдущей лекции уравнений Максвелла. О смысл[е] уравнений Максвелла

Закон Кулона $\rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$, $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$ отсутствие в природе магн. заря[дов]

уже говорилось мы исходили из этих уравнений; применением принципа относительности Эйнштейна были полу[]чены еще два уравнения:

Закон Ампера $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\vec{j}_{смещ}}{\varepsilon_0 c^2}}}$, $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ Закон Фарад[ея]

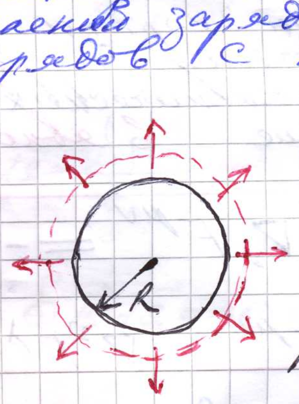
Каждое из выписанных дифференциальных уравнений может быть использовано для получения соответству[ющей] интегральной формы:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV \xrightarrow[\text{Острогр.-Гаусса}]{\text{по теореме}} \Phi_E = \oint_{\partial(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\int \rho\, dV}{\varepsilon_0} = \dots$$

аналогично

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV = \oint_{\partial(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi_B = 0$$

Уравнение Максвелла о потоке вектора $\vec{E}$ или закон Гаусса, как уже отмечалось удобно использовать для расчёта полей $\vec{E}$ симметричных распределений зарядов, например, шарообразного скопления зарядов с плотностью $\rho\ \frac{Кл}{м^3}$:

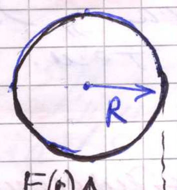


$r \le R$: $\oint \vec{E}\,d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(r)\Big|_{r\le R} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

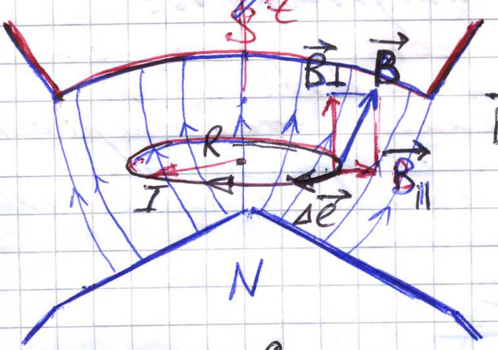
$r \ge R$: $\oint \vec{E}\,d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

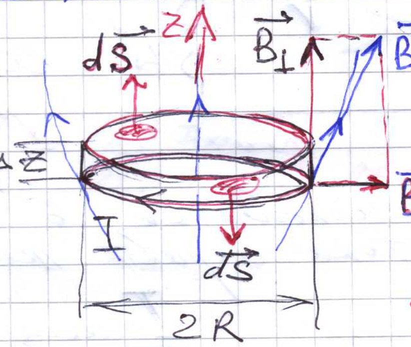


$Q = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ – заря[д] шар[а]

С помощью уравнения Максвелла о потоке вектора $\vec{B}$ также можно получать интересные и осмысленные результаты. Например, можно получить известное выражение для силы, действующей на кольцо (петельку) с током, помещенную в неоднородное магнитное поле.



$$\vec B = \vec B_\parallel + \vec B_\perp \Rightarrow$$



Применяем ур-е $\oint \vec B d\vec S = 0$ к "шайбе" с $V = \pi R^2 \Delta Z$.

$$\frac{dB_\perp}{dZ} < 0$$

с ростом Z поле $B_\perp$ ослабевает

$$\vec F_{Амп} = \oint I[d\vec\ell \times \vec B] = \vec e_z I \cdot B_\parallel(R) \cdot 2\pi R$$

$$= -\vec e_z I \pi R^2 \frac{dB_\perp}{dZ}$$

$$= \frac{d}{dZ}(\vec P_m \cdot \vec B),$$ здесь $\vec P_m = -\vec e_z \cdot I \cdot S$ — магн. момент кольца с током.

$$\oint \vec B d\vec S = 0 = B_\parallel 2\pi R \Delta Z + B_\perp(Z+\Delta Z)\pi R^2 - B_\perp(Z)\pi R^2$$

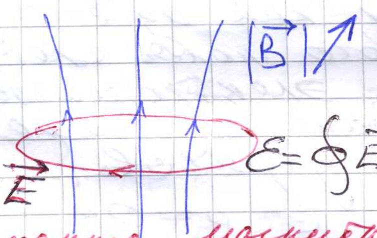
$$\Rightarrow B_\parallel = -\frac{dB_\perp}{dZ} \cdot R/2$$

$$\Rightarrow \vec F = \vec\nabla(\vec P_m \cdot \vec B) \Rightarrow W_B = -\vec P_m \cdot \vec B$$ — выгодна энергетически ориентация $\vec P_m$ по полю $\vec B$!

Уравнение Максвелла, выражающее закон Фарадея, также можно переписать в интегральной форме:

$$\vec\nabla \times \vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \Longleftrightarrow \oint [\vec\nabla \times \vec E] \cdot d\vec S \xrightarrow[\text{Грина–Стокса}]{\text{по теореме}} \oint \vec E \cdot d\vec\ell = -\frac{d}{dt}\int \vec B \cdot d\vec S$$

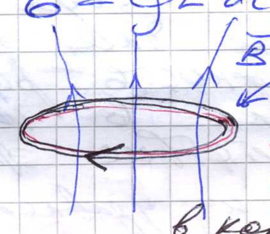
$$\mathcal{E} \overset{def}{=} \oint \vec E d\vec\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



$$\mathcal{E} = \oint \vec E d\vec\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрич. поле $\vec E$ с циркуляцией

$$\mathcal{E} = \oint \vec E \cdot d\vec\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



В пр-во с переменным $\vec B$ можно поместить проводящее кольцо — в кольце возникают вихревые токи

$$I_{инд} = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R} = \frac{\oint \vec E d\vec\ell}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

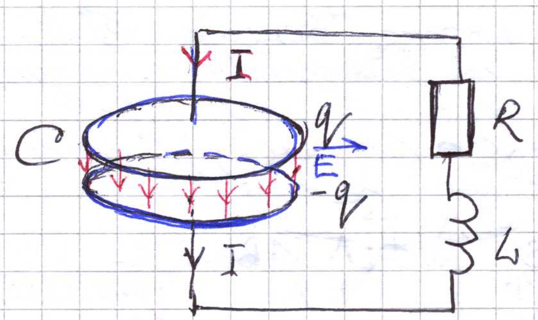
Уравнение с $\vec\nabla \times \vec B$, переписанное в инт. форме, имеет вид:

$$\vec\nabla \times \vec B = \frac{\vec j}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec E}{\partial t} \Longleftrightarrow \oint \vec B \cdot d\vec\ell = \frac{\int \vec j \cdot d\vec S}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \vec E \cdot d\vec S$$

$$= \frac{I}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Смысл этого ур-е в том, что токи порождают вихревые магнитные поля, причём и переменные эл. поля порождают также вихревые магн. поля — от второго слагаемого $\frac{1}{c^2}\partial \vec E/\partial t$.

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt} \overset{def}{=} \frac{I_{смещ}}{\varepsilon_0 c^2}$$ — ток смещения Максвелла



$\frac{dI}{dt} \neq 0$

Для прояснения роли токов смещения рассмотрим цепь содержащую C – ёмкость, R – сопротивление и L – индуктивность.

Хоть в цепи есть разрыв, в месте расположения ёмкости, но цепи протекает ток – переменный ток. В проводе – это обычный ток, в воздушном зазоре ёмкости роль тока играет ток смещения:

$$\frac{I_{смещ}}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ – поле двух близко располож. плоскостей – в зазоре

$$\Rightarrow \Phi_E = E\cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\dot q}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{I_{смещ}}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{смещ} = \dot q}$$

– реально в воздушном зазоре тока обычных зарядов нет, но есть ток смещения.

Каждый физик, изучающий и применяющий уравнения Максвелла, постепенно проникается их физическим смыслом, иногда говорят: „уравнения Максвелла умнее" физиков, их применяющих!

§2. Предсказание Максвеллом электромагнитных волн. Скорость света в вакууме.

Покажем, следуя Дж. Максвеллу как из его уравнений для электромагнитного поля следует возможность распространения электромагнитных волн в пустом пространстве, даже в отсутствие электрических зарядов.

Исходим из уравнений Максвелла с $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$, зарядов вообще нет!

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times \vec{E}]] = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times\vec{B}] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Задача: Получите также и ур-е для $\vec{B}$.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{=0} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Волновые ур-е – они имеют нетривиальные волновые ре

Для простоты рассмотрим одномерное волновое ур-е

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$ – в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Задача

Докажите, что $\left.\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0\cos(kx \pm \omega t)\\ \vec{B} &= \vec{B}_0\cos(kx \pm \omega t)\end{aligned}\right\}$ – есть решение волновых уравнений при $\omega/k = c$.

В самом деле: $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2\vec{E}$, $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$

$$\Rightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = 0 \Rightarrow c^2 = \frac{\omega^2}{k^2},\ c = \frac{\omega}{|k|}$$

Доказано что в вакууме могут существовать отличные от нуля электромагнитные волны, котор. нетривиальными решениям ур-ний Максвелла.

$\boxed{\text{В системе СИ } \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0 \text{ NB}}$

§3. Закон сохранения энергии для заряженных частиц и электромагнитных полей в вакууме.

Поучительно, отправляясь от уравнений Максвелла, получить закон сохранения энергии для заряженных частиц и полей в вакууме. Выполнить для этого достаточно простые выкладки:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Введем вектор $\vec{H} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, $\vec{H}$ – напряженность магн. поля в вакууме.

$$\Rightarrow \quad \vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}] = \vec{E}\cdot\vec{j} + \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$ – в СИ.

$$\Rightarrow \quad \vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}] - \vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}] = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

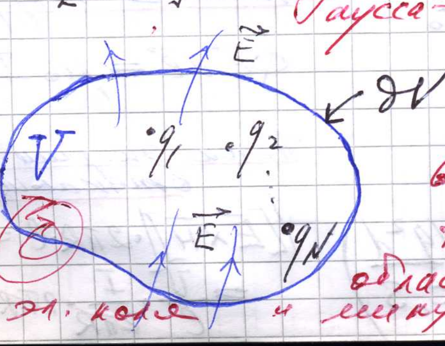
Далее воспользуемся тождеством:

$$\vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}] = \vec{\nabla}_E\cdot[E\times\vec{H}] + \vec{\nabla}_H\cdot[E\times\vec{H}] = \vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}] - \vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}] = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\vec{H}^2}{2}\right)$$

проинтегрируем последнее соотношение по некоторому объему и воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}]\,dV \xlongequal[\text{Гаусса-Остр.}]{\text{по теореме}} \underbrace{\oint_{\partial(V)}[\vec{E}\times\vec{H}]\cdot d\vec{S}}_{\text{Поток энергии поля}} = \underbrace{-\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}}_{\text{мощность сил эл. поля}} - \frac{d}{dt}\underbrace{\int_V\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\vec{H}^2}{2}\right)dV}_{\text{Скорость изм. энергии поля}}$$



$\mu_0\vec{H} = \vec{B}$

Поток векторной величины $\vec{S} = [\vec{E}\times\vec{H}]$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область V равен минус мощности сил эл. поля и минус скорости изм. эн. поля в V

Получен закон сохранения энергии для электромагнитных полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ системы заряженных частиц в вакууме:

$$\oint_{\partial(V)} [\vec{E}\times\vec{H}]\cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV - \frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\mu_0\vec{H}^2}{2}\right)dV$$

Поток энергии эл.м. поля через границу области $\partial(V)$

Работа в ед. времени сил эл. поля над зарядами в V

Скорость изменения энергии поля в объеме V.

Например,

$$\vec{j}\cdot\vec{E}\,dV = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}\,dV = \vec{v}\,dq\cdot\vec{E}$$ — работа в ед. вр. сил поля над зарядами в ΔV

Определения

(А) $\vec{S} = [\vec{E}\times\vec{H}]$ — вектор Умова-Пойнтинга — вектор потока энергии

— энергия, пересекающая площадку $1м^2$ за 1с

Размерность: $[\vec{S}] = [[\vec{E}\times\vec{H}]] = \frac{Дж}{м^2 с} = \frac{Ватт}{м^2}$.

(Б) $w_e = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}$ — плотность энергии эл. поля

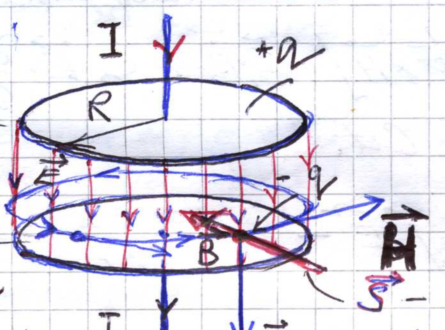
(В) $w_m = \frac{\mu_0\vec{H}^2}{2}$ — плотность энергии магн. поля

Размерности: $[w_e] = [w_m] = \frac{Дж}{м^3}$.

Рассмотрим поучительные примеры использования только что введённых величин.

Ёмкость (Конденсатор) в цепи переменного тока

$W_C = \frac{q^2}{2C}$ — энергия поля в емкости



$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ — электроёмкость

$\vec{S} = [\vec{E}\times\vec{H}]$

$\vec{S}\perp\vec{E}$, $\vec{S}\perp\vec{H}$

$\vec{S}$ — вектор потока энергии поля — направлен внутрь конденсатора

Поле $\vec{E}$ в конденсаторе:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon_0}$$

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}S d = w_e\cdot S\cdot d$$

Поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\Phi_E$

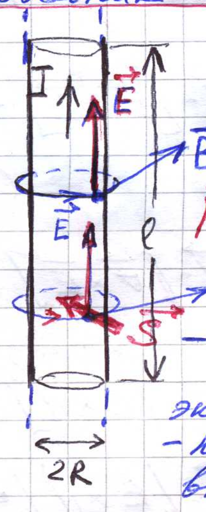
$$\to B\,2\pi R = \frac{1}{c^2}S\dot{E} = \frac{S\cdot\dot{q}}{c^2 S\varepsilon_0} = \frac{\dot{q}}{c^2\varepsilon_0}$$

$$\to H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\dot{q}}{\mu_0 c^2\varepsilon_0\,2\pi R} = \frac{\dot{q}}{2\pi R}$$

Поток энергии поля через боковую пов-ть $S = 2\pi R\cdot d$:

$$|[E\times H]|\cdot 2\pi R\cdot d = \frac{q}{S\varepsilon_0}\cdot\frac{\dot{q}\cdot d\,2\pi R}{2\pi R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

Проводник с током



$N = U\cdot I$ — мощность потерь эл. в уча

$\vec{S}$ — вектор потока энергии поля — направлен внутрь провода

Поле $\vec{E}$ в проводе:

$E = \frac{U}{l}$, U — падение напряжения на длине

~~Поле~~ $\vec{B}$ вокруг провода

$$\oint\vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0} = $$

Поток энергии поля втекающей в прово

$$|[E\times H]|\cdot 2\pi R\cdot l = \frac{U}{l}\cdot\frac{I}{2\pi R}\cdot 2\pi R l = UI =$$

сопротив