Лекция 7. Анализ возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона. Связь прицельного параметра $\rho(\chi)$ с углом рассеяния χ при движении частиц в кулоновских полях. Сечения рассеяния и захвата частиц при их движении в центральных силовых полях.

§1. Уравнения орбит в задачах Кеплера и Кулона. Связь прицельного параметра $\rho(\chi)$ с углом рассеяния.

В предыдущей лекции было получено уравнение всех возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона:

$$\alpha=\begin{cases} Gm_1m_2, \\ -kq_1q_2 \end{cases} \quad r(\varphi)=\frac{p}{\operatorname{sign}\alpha+\varepsilon\cos\varphi}, \quad p=\frac{l^2}{\mu|\alpha|}=\frac{\mu V_\infty^2\rho^2}{|\alpha|}$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$

Проанализируем полученное уравнение, сравнив описание орбит в декартовой и полярной системах координат.

Случай $\alpha>0$ — притяжение

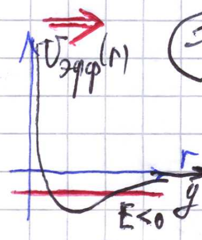
$\varepsilon=0$ — круговые орбиты

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \Rightarrow r=p, \text{ т.е. } x^2+y^2=p^2$$

$0<\varepsilon<1$ — эллиптические орбиты, $U_{эфф\,min}<E<0$

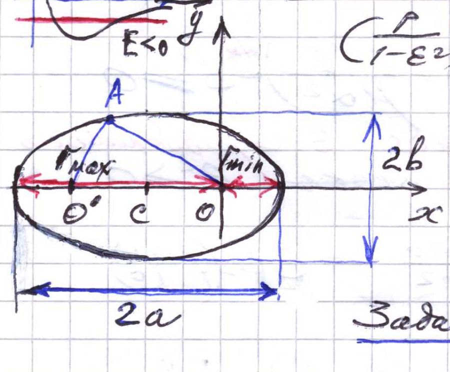
$$r+\varepsilon r\cos\varphi=\sqrt{x^2+y^2}+\varepsilon x=p \Rightarrow x^2+y^2+2p\varepsilon x-\varepsilon^2x^2=p^2,$$

$$x^2(1-\varepsilon^2)+2p\varepsilon x+y^2=p^2, \quad x^2+\frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}x+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$



$$\Rightarrow \left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}+\frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}=\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2}=1 \text{ — уравнение эллипса.}$$



$$a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad a=\frac{p\cdot\mu\alpha^2}{2|E|l^2}=\frac{\alpha}{2|E|}$$

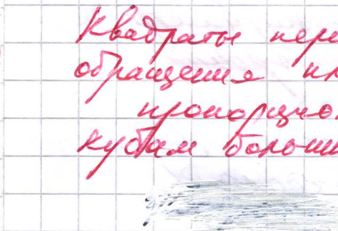
$$\begin{cases} r_{max}=\frac{p}{1-\varepsilon} \\ \varphi=\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} r_{min}=\frac{p}{1+\varepsilon} \\ \varphi=0 \end{cases}; \quad r_{max}-r_{min}=\frac{p2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}=2\cdot OC$$

Задача Докажите характеристическое свойство эллипса:

$$O'A+OA=const=r+r=2a$$

Задача Исходя из постоянства секториальной скорости, получите третий закон Кеплера

Решение:



$$\dot{\vec S}=\frac{1}{2}[\vec r\times\dot{\vec r}]=\frac{1}{2\mu}\vec L=const$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2\mu}\cdot T=\pi ab=\pi\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \Rightarrow T=\frac{2\pi\mu}{l}\cdot\frac{l^4\cdot\mu^{3/2}\alpha}{l^3\mu^2\alpha^2 2\sqrt{2}|E|}$$

$$1-\varepsilon^2=-\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}=\frac{2|E|l^2}{\mu\alpha^2} \qquad =\frac{\alpha^3\pi\sqrt{\mu}}{\alpha^2\sqrt{2|E|}^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3}=4\pi^2\frac{\mu}{\alpha}} \Leftarrow T=a^{3/2}2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$$

Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

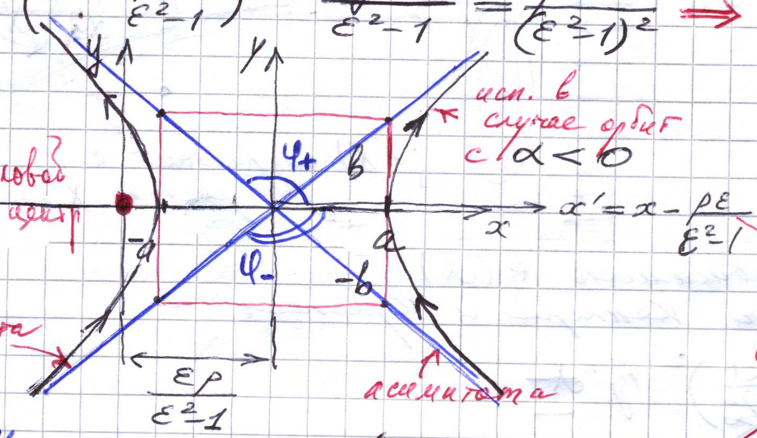
Третий закон Кеплера.

Совершенно аналогично можно анализируется случай инфинитных орбит в задачах притяжения, т.е. случай $\varepsilon>1$.

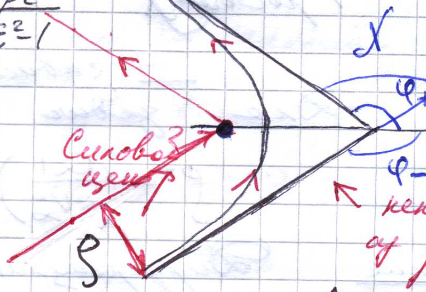
$\varepsilon > 1$ – гиперболические орбиты, $\alpha > 0$, $E > 0$.

$$y^2 - (\varepsilon^2-1)x^2 + 2p\varepsilon x = p^2 \Rightarrow \frac{y^2}{\varepsilon^2-1} - \left(x^2 - \frac{2p\varepsilon x}{\varepsilon^2-1} + \frac{p^2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2}\right) = \frac{p^2}{\varepsilon^2-1} - \frac{p^2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\varepsilon^2-1} = \frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)^2} \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{\varepsilon^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2} = 1$$



$$a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$$

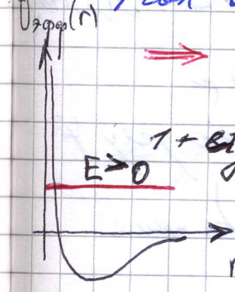


$\cos\varphi_\pm = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$

$\varphi_\pm > \frac{\pi}{2}$

непосредственно из ур-е $\exists\varphi_\pm, \cos\varphi_\pm = -\frac{1}{\varepsilon}$, $r(\varphi_\pm) = \infty$

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$



Угол отклонения $\chi = 2\varphi_+ - \pi$

$$\Rightarrow \sin\frac{\chi}{2} = \sin\left(\varphi_+ - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi_+ = \frac{1}{\varepsilon},$$

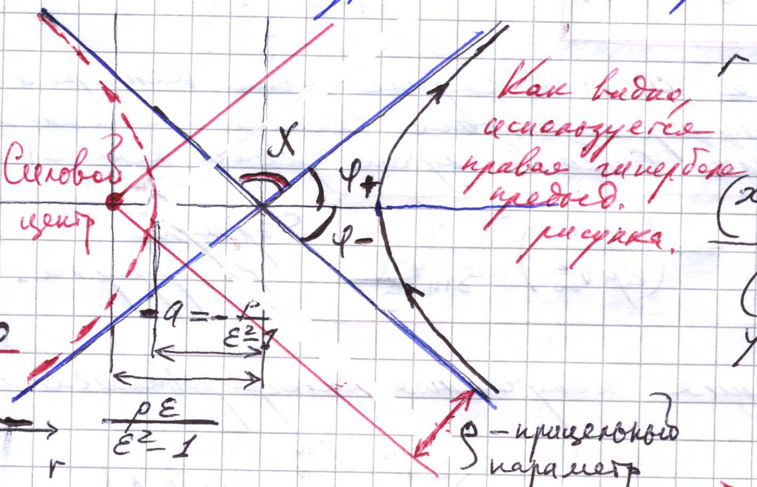
$$1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2} = \frac{1}{\sin^2\chi/2} = \varepsilon^2; \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2} = \frac{2El^2}{\mu\alpha^2} = \frac{2\mu V_\infty^2 \cdot \mu^2\rho^2 V_\infty^2}{\mu\alpha^2 2} \Rightarrow$$

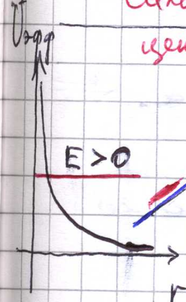
$$\Rightarrow \boxed{\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{\mu V_\infty^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}}$$ – нужная для вычисления сечения рассеяния формула.

Проанализируем случай $\varepsilon > 1$ – гиперболические орбиты, $\alpha < 0$, $E > 0$ отталкивание.

$$-r + \varepsilon r\cos\varphi = p, \quad -\sqrt{x^2+y^2} + \varepsilon x = p, \quad x^2+y^2 - \varepsilon^2x^2 + 2p\varepsilon x - p^2 = 0$$

получается то же ур-е, что и в предыдущем случае $\varepsilon > 1$, $\alpha > 0$.





$$r = \frac{p}{-1+\varepsilon\cos\varphi} \Rightarrow \exists\varphi_\pm, \cos\varphi_\pm = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$$r(\varphi_\pm) = \infty$$

$$\frac{\left(x - \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{\varepsilon^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2} = 1$$

Угол рассеяния

$$\chi = \pi - 2\varphi_+, \quad \sin\frac{\chi}{2} = \cos\varphi_+ = \frac{1}{\varepsilon}$$

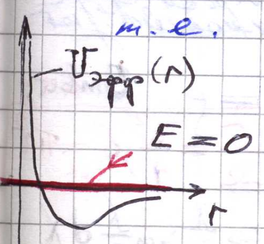
$$\Rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2} = \frac{1}{\sin^2\chi/2} = \varepsilon^2$$

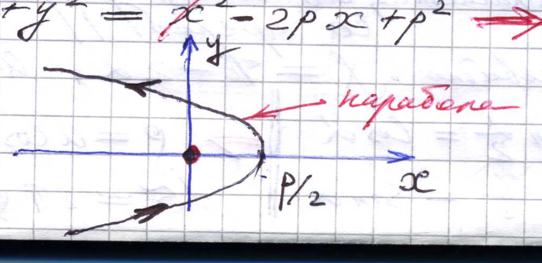
$$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2} = \frac{2El^2}{\mu\alpha^2} = \frac{\mu V_\infty^2 \mu^2 V_\infty^2 \rho^2}{\mu\alpha^2} \Rightarrow \boxed{\rho^2 = \left(\frac{|\alpha|}{\mu V_\infty^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}}$$

Задача Исследуйте случай $E = 0$, т.е. $\varepsilon = 1$ – случай нулевой энергии $\alpha > 0$

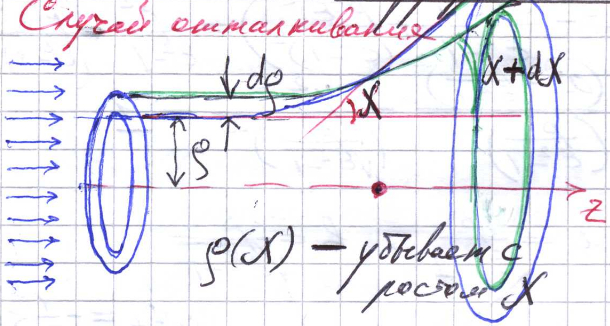
Имеем в данном случае: $r = \frac{1}{\pm 1 + \cos\varphi}$, $\pm r + r\cos\varphi = p$,

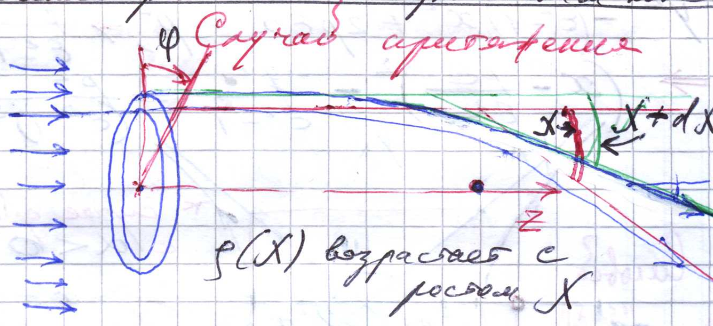
т.е. $x^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \Rightarrow y^2 = p^2 - 2px$





§2. Постановка задачи о рассеянии на силовом центре. Дифференциальное сечение рассеяния в кулоновском поле





$\exists$ зависимость $\rho(\chi)$

Для задач Кеплера и Кулона:

$$\rho^2=\left(\frac{|\alpha|}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \mathrm{ctg}^2\frac{\chi}{2}$$

Определение Дифференциальное сечение рассеяния в углы χ, χ

$$d\sigma \overset{def}{=} \frac{2\pi\rho\, d\rho \cdot j_{пад}}{j_{пад}} = 2\pi\rho\, d\rho$$

Обычно имеет место азимутальная симметрия по углу φ
(φ и χ — полярные углы сферич. системы координат)
поэтому вводят дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi$:

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \Longrightarrow \rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| \underbrace{\sin\chi\, d\chi\, d\varphi}_{d\Omega}\frac{1}{\sin\chi} = d\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \overset{def}{=} \rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|\frac{1}{\sin\chi}}$$

$2\pi \longrightarrow d\varphi$

$2\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi$

Используя выражение для $\rho^2(\chi)$ в случае задач Кеплера и Кулона, определяем дифференциальное сечение рассеяния в Кулоновском поле (или в случае задачи Кеплера):

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|\frac{1}{\sin\chi} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}}}$$

Формула Резерфорда

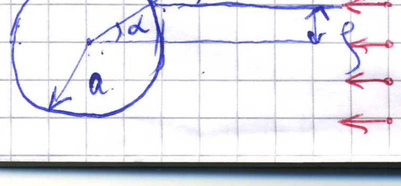
Полное сечение рассеяния получается интегрированием по телесному углу:

$$\sigma_{total} = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2}\right)^2\int_0^{2\pi}d\varphi\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin\chi\, d\chi}{\sin^4\chi/2}} = \infty$$

Полное сечение Кулоновского рассеяния расходится, это связано с дальнодействующим характером Кулоновского взаимодействия

Интеграл расходится на нижнем пределе, как $\int\frac{d}{\chi}$

Задача Вычислите сечение рассеяния частиц на абс. твердой сфере
Предполагается, что частицы упруго взаимодействуют со сферой



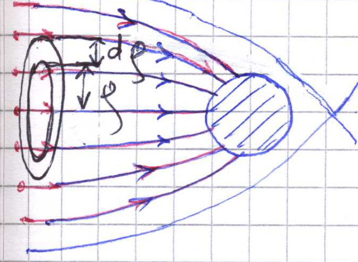
Очевидно $\chi = \pi - 2\alpha$, $a\sin\alpha = \rho$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\chi}{2} &= \cos\alpha\\ \cos\frac{\chi}{2} &= \sin\alpha\end{aligned}\right\| \Longrightarrow \rho = a\cos\frac{\chi}{2}$$

$$d\sigma = 2\pi\, a a\,\frac{1}{2}\cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\,d\chi$$

Ответ: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}}$, $\sigma_{tot} = \pi$

§3 Сечение захвата частиц. Условие захвата частиц.



$$\sigma_{захв} \overset{def}{=\!=} \int_0^{\rho_{max}} \frac{2\pi\rho\, d\rho\, j_{пад}}{j_{пад}} = \int_0^{\rho_{max}} 2\pi\rho\, d\rho = \pi\rho_{max}^2$$

$\sigma_{захв.} = \pi\rho_{max}^2$, ρ_{max} — максим. значение ρ, до которого частицы захватываются.

Условие захвата частиц легко получить из закона сохранения энергии при движении частиц в центральных силовых полях:

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2} = E_{отн.дв} - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U(r) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left. r^2 U(r)\right|_{r\to 0} \leqslant -\frac{L^2}{2\mu}}$$ — условие падения частиц на силовой центр

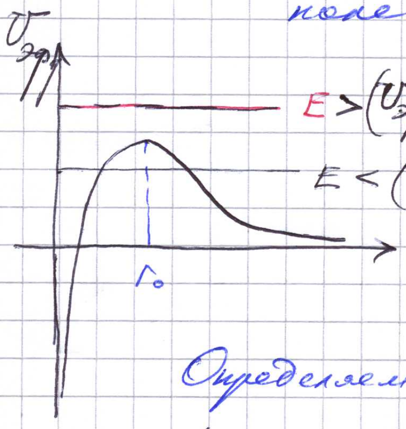
Пример 1 $\quad U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, $n>2$ $\Rightarrow$ $\left. r^2U(r) = -\frac{\alpha}{r^{n-2}}\right|_{r\to 0} \leqslant -\frac{L^2}{2\mu}$ — всегда вып.

Пример 2 $\quad U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \Longrightarrow -\alpha \leqslant -\frac{L^2}{2\mu} = -\frac{\mu^2 V_\infty^2 \rho^2}{2\mu}$,

$$\Longrightarrow \rho^2 \leqslant \frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2} = \rho_{max}^2,$$

$$\Longrightarrow \sigma_{захв} = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{\mu V_\infty^2}.$$

Задача $\quad$ Вычислите сечение захвата частиц в силовом поле с $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, $(n>2, \alpha>0)$.



$U_{эфф} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$ — график показан на рисунке слева

Условие захвата частиц в данном случае будет таким:

$$\frac{\mu V_\infty^2}{2} = E \geqslant (U_{эфф})_{max}$$

Определяем (·) r_0, которой соотв. максимум $U_{эфф}$:

$$U'_{эфф} = -\frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{n\alpha}{r^{n+1}} = 0 \Longrightarrow r_0 = \left(\frac{n\alpha\mu}{\ell^2}\right)^{\frac{1}{n-2}},$$

$$\Rightarrow (U_{эфф})_{max} = \frac{\ell^2}{2\mu\left(\frac{n\alpha\mu}{\ell^2}\right)^{\frac{2}{n-2}}} - \frac{\alpha}{\left(\frac{n\alpha\mu}{\ell^2}\right)^{\frac{n}{n-2}}} = \frac{\alpha(n-2)}{2\left(\frac{n\alpha\mu}{\ell^2}\right)^{\frac{n}{n-2}}}$$

$$= \frac{\alpha(n-2)}{2\left(\frac{n\alpha}{\mu V_\infty^2 \rho^2}\right)^{\frac{n}{n-2}}} \leqslant E = \frac{\mu V_\infty^2}{2},$$

$$\Rightarrow \rho^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{\mu V_\infty^2}{\alpha(n-2)}\left(\frac{\mu V_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}},$$

$$\Rightarrow \sigma_{захв} = \pi n\,(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{\mu V_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$