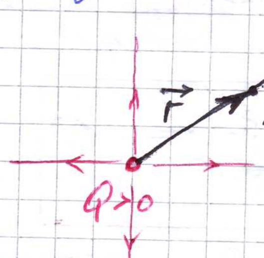
Лекция 7. Принцип относительности и система микроскопических уравнений Максвелла для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме (или системе уравнений Максвелла для микроскопических полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$).

§1. Закон Кулона и уравнение Максвелла о потоке вектора $\vec{E}$. Дифференциальная форма Закона Кулона. Отсутствие в природе магнитных зарядов и уравнение Максвелла о потоке вектора $\vec{B}$, дифференциальная форма этого уравнения.

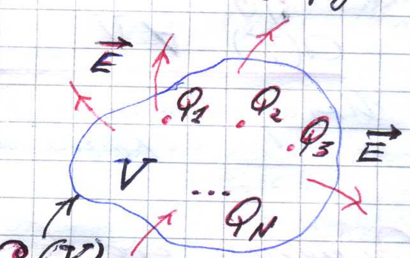
В лекции 5 было показано, как из закона Кулона и принципа суперпозиции для электрических полей следует Закон Гаусса:



Закон Кулона $\quad$ Принцип суперп. $\quad$ Закон Гаусса

$$\vec{F}_q = k\frac{Qq\vec{r}}{r^3}, \quad \oplus \quad \vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \Rightarrow \oint \vec{E}_{рез} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \overset{def}{=} \frac{\vec{F}_q}{q} = k\frac{Q\vec{r}}{r^3}$$

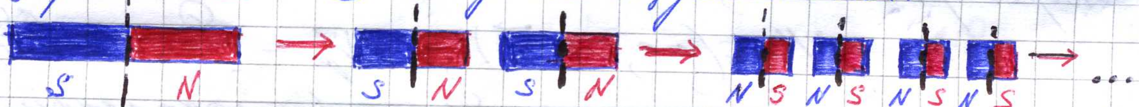


Закон Гаусса

$$\Phi_E = \oint_{\partial(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_k Q_k}{\varepsilon_0} = \frac{\int_V \rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

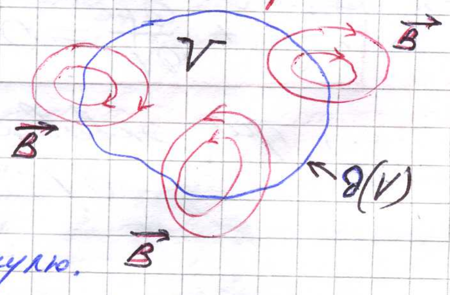
еще называют уравнением Максвелла о потоке Φ_E вектора $\vec{E}$: поток Φ_E электрического поля через произвольную замкнутую поверхность $\partial(V)$, ограничивающую объём V, равен заряду, заключенному в данном объеме, деленному на ε_0.

В отличие от электрических зарядов, магнитные заряды в природе не обнаружены: все попытки выделить магнитные полюсы — заряды (N) и (S) оказались безуспешными.



Математически факт отсутствия в природе магнитных зарядов выражается уравнением Максвелла о потоке вектора $\vec{B}$:

$$\Phi_B = \oint_{\partial(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$



Поток Φ_B вектора $\vec{B}$ магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность $\partial(V)$, ограничивающую объем V, равен нулю.

Используя теорему Гаусса–Остроградского, обсуждавшуюся в лекции 6:

Теорема Гаусса–Остроградского $\rightarrow$
$$\boxed{\int_V \operatorname{div}\vec{A}\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \oint_{\partial(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S}},$$

уравнения Максвелла о потоках Φ_E и Φ_B векторов электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей можно переписать в следующей форме:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_{\partial(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{\int_V \rho\, dV}{\varepsilon_0}, \quad \Phi_{\vec{B}} = \oint_{\partial(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0$$

т.е.

$$\int\limits_{\forall V} \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = 0, \quad \int\limits_{\forall V} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Последние интегральные формулы справедливы для произвольных объемов, то есть $\forall V$, поэтому их подынтегральные выражения должны равняться нулю, т.е.

Закон Кулона $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \leftarrow$ Отсутствие в природе магн. зарядов

Первое из последних уравнений фактически является дифференциальной формой закона Кулона, а последнее уравнение выражает математически факт отсутствия в природе магнитных зарядов.

Оба сформулированные уравнения являются подсистемой более общей системы уравнений Максвелла для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$.

§2. Явно релятивистски-инвариантная формулировка уравнений Максвелла $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

Перепишем установленные в предыдущем разделе уравнения Максвелла, используя выражения для четырёхградиента, четырёхтока и тензора электромагнитного поля, введённые в предыдущих лекциях:

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\,\partial t}, \vec{\nabla}\right), \quad j^\mu = \rho\frac{dx^\mu}{dt} = (\rho c, \rho\vec{v}); \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{E_1}{c}, & -\frac{E_2}{c}, & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем после очевидных отождествлений нерелятивистских и релятивистских объектов:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = c\sum_{\alpha=0}^{3} \nabla_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{j^0}{c\,\varepsilon_0},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = \nabla^1 F^{23} + \nabla^2 F^{31} + \nabla^3 F^{12} = 0,$$

то есть

Закон Кулона $\rightarrow$ $$\sum_{\nu=0}^{3} \nabla_\nu F^{0\nu} = \nabla_\nu F^{0\nu} = \frac{j^0}{\varepsilon_0 c^2},$$

суммирование по повторяющимся индексам.

Отсутствие магн. зарядов $\rightarrow$ $$\nabla^1 F^{23} + \nabla^2 F^{31} + \nabla^3 F^{21} = 0.$$

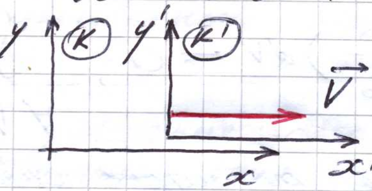
Уравнения Максвелла $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ сформулированы, таким образом, в терминах релятивистских объектов: четырёхградиента, четырёхтока и тензора электромагнитного поля.

§3 Принцип относительности и система уравнений Максвелла для электромагнитных полей B и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме.

Теперь примем во внимание принцип относительности Эйнштейна, который гласит, что все законы физики (любой из законов) выглядят одинаково в различных инерциальных системах отсчета, ИСО.

Согласно принципу относительности Эйнштейна:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ в (K)



в (K') $\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}' = 0$

Точно так же

$$\begin{cases} \nabla_\nu F^{0\nu} + \frac{j^0}{\varepsilon_0 c^2} = 0, \\ \nabla^1 F^{23} + \nabla^2 F^{31} + \nabla^3 F^{12} = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla'_\nu F'^{0\nu} + \frac{j'^0}{\varepsilon_0 c^2} = 0, \\ \nabla'^1 F'^{23} + \nabla'^2 F'^{31} + \nabla'^3 F'^{12} = 0 \end{cases}$$

в (K) в (K')

Введем четырёхвектор A^μ и четырёхтензор $T^{\lambda\mu\nu}$ третьего ранга, определяемые соотношениями:

$$A^\mu \overset{def}{=} \nabla_\nu F^{\mu\nu} + \frac{j^\mu}{\varepsilon_0 c^2}, \quad T^{\lambda\mu\nu} \overset{def}{=} \nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu}$$

NB Нулевая компонента $A^0 = 0$, очевидно, совпадает с уравнением $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ закона Кулона, а компонента $T^{123} = 0$ эквивалентна уравнению $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ и обе эти компоненты равны нулю во всех ИСО:

$$A^0 = \nabla_\nu F^{0\nu} + \frac{j^0}{\varepsilon_0 c^2} = 0, \quad T^{123} = \nabla^1 F^{23} + \nabla^2 F^{31} + \nabla^3 F^{12} = 0$$

← Согласно принципу относительности Эйнштейна.

Можно легко доказать, что справедлива следующая

Лемма 1°. Пусть $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ — некоторый 4^x-вектор и $A^0 = A'^0 = A''^0 = \ldots = 0$ его нулевая компонента A^0 равна нулю во всех ИСО, тогда и все остальные компоненты $A^\mu = 0$ равны нулю во всех ИСО.

2°. Пусть $T^{\lambda\mu\nu}$ — некоторый тензор 3-го ранга и $T^{123} = T'^{123} = T''^{123} = \ldots = 0$ его компонента T^{123} равна нулю во всех ИСО, тогда и все остальные компоненты $T^{\lambda\mu\nu} = 0$ этого тензора равны нулю во всех ИСО.

Докажем первую часть 1° леммы. Имеем согласно преобразованиям Лоренца:

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \xrightarrow{A^0 = A'^0 = 0} A^1 = 0$$

$$\Rightarrow A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \xrightarrow{A^1 = A^0 = 0} A'^1 = 0 \quad \forall \text{ ИСО (K')}$$

Для движения (K') отн. (K) вдоль оси y:

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^2) \xrightarrow{A'^0 = A^0 = 0} A^2 = 0$$

$$\Rightarrow A'^2 = \gamma(A^2 - \beta A^0) \xrightarrow{A^2 = A^0 = 0} A'^2 = 0 \quad \forall \text{ ИСО (K')}$$

аналогично м. показать что и $A^3 = A'^3 = 0 \ \forall$ ИСО.

Сходным образом доказывается и вторая часть леммы, например, согл. преоб. Лоренца:

$$T'^{023} = 0 \Leftarrow T'^{023} = \gamma(T^{023} - \beta T^{123}), \quad T'^{123} = \gamma(T^{123} - \beta T^{023}) \Rightarrow T^{02\ldots}$$

и т.д. ⇒ завершите док-во.

Применяя лемму к четырёхвектору A^{μ} и тензору $T^{\lambda\mu\nu}$, заключаем, что из равенства нулю компонент A^0 и T^{123} во всех ИСО

$$\forall \text{ИСО} \begin{cases} div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ div\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^0 = \nabla_{\nu}F^{0\nu} + \frac{j^0}{\varepsilon_0 c^2} = 0 \\ \nabla^1 F^{23} + \nabla^2 F^{31} + \nabla^3 F^{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^{\mu} = 0 \quad \forall \text{ИСО} \\ \nabla^{\lambda}F^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}F^{\nu\lambda} + \\ + \nabla^{\nu}F^{\lambda\mu} = 0 \end{cases}$$

т.е. из справедливости закона Кулона и факта отсутствия магнитных зарядов во всех ИСО получается, т.е. выводится или следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \nabla_{\nu} F^{\mu\nu} + \frac{j^{\mu}}{\varepsilon_0 c^2} = 0, \\ \nabla^{\lambda} F^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}F^{\nu\lambda} + \nabla^{\nu}F^{\lambda\mu} = 0. \end{cases}$$ — Система уравнений Максвелла для электромагн. полей в явно релятивистски-инвариантной форме.

Выясним какие из уравнений содержатся в выписанной системе при различных значениях свободных индексов λ, μ, ν.

$$\mu = 1: \quad \nabla_{\nu} F^{1\nu} + \frac{j^1}{\varepsilon_0 c^2} = 0 = \nabla_0 F^{10} + \nabla_2 F^{12} + \nabla_3 F^{13} + \frac{j^1}{\varepsilon_0 c^2},$$

суммиров. по ν

$$\text{т.е. } \frac{\partial E_1}{c^2\partial t} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{j^1}{\varepsilon_0 c^2} = 0,$$

$$F^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{\vec{E}}{c} \\ \hline \frac{\vec{E}}{c} & \underbrace{-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_{\gamma}}_{3\times 3} \end{array} \right) \quad \Rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_1 = \frac{j^1}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}$$

Легко проверить, что значения $\mu = 2, 3$ приводят к аналогичным уравнениям:

$$\mu = 2: \ [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_2 = \frac{j^2}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t}, \quad \mu = 3: [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_3 = \frac{j^3}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}$$

Задача. Проверьте справедливость выписанных уравнений с $\mu = 2, 3$.

Далее выясним смысл различных компонент ур-ний $T^{\lambda\mu\nu} \equiv 0$.

Например,

$$T^{012} = \nabla^0 F^{12} + \nabla^1 F^{20} + \nabla^2 F^{01} = 0 =$$

$$= \frac{-1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{c\partial x} + \frac{\partial E_1}{c\partial y}, \text{ т.е. } \frac{1}{c}[\vec{\nabla}\times\vec{E}]_3 = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t};$$

аналогично

$$T^{023} = \nabla^0 F^{23} + \nabla^2 F^{30} + \nabla^3 F^{02} = 0 =$$

и

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial z}, \text{ т.е. } [\vec{\nabla}\times\vec{E}]_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t};$$

$$T^{013} = \nabla^0 F^{13} + \nabla^1 F^{30} + \nabla^3 F^{01} = 0 =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial B_2}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial z}, \text{ т.е. } [\vec{\nabla}\times\vec{E}]_2 = -\frac{\partial B_2}{\partial t}.$$

Итак в явно релятивистски-инвариантной системе уравнений Максвелла, полученной с применением принципа относительности, содержатся следующие уравнения Максвелла:

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} + \frac{j^{\mu}}{\varepsilon_0 c^2} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad [\vec{\nabla}\times\vec{B}] = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0; \quad [\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \leftarrow \nabla^{\lambda}F^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}F^{\nu\lambda} + \nabla^{\nu}F^{\lambda\mu} = 0$$

Получена система микроскопич. ур. Максвелла для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$.

4. Различные формы микроскопических уравнений Максвелла для электромагнитных полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме.

Резюмируем основные идеи и выводы первых семи лекций

(А) Напряженность $\vec{E}$ электрического поля и индукция $\vec{B}$ магнитного поля были введены посредством экспериментально измеряемой силы Лоренца:

$$\vec{F}_{лор} = q\vec{E} + q[\vec{v}\times\vec{B}] \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q}\Big|_{\vec{v}=0}, \qquad |\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_{магн}|}{q|\vec{v}|\sin(\vec{v},\vec{B})}$$

(Б) Было осуществлено релятивистское обобщение второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \\ \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F} \end{cases} \Longrightarrow \frac{dp}{d\tau} = f \quad \begin{matrix} \nearrow \dfrac{d\vec{p}_{рел}}{dt} = \vec{F}_{рел} = q\vec{E} + q[\vec{v}\times\vec{B}] \\ \searrow \dfrac{d\mathcal{E}_{рел}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}_{рел} = q\vec{v}\cdot\vec{E} \end{matrix}$$

для заряж. частицы в эл.

(В) Использование релятивистского обобщения второго закона Ньютона и принципа относительности Эйнштейна привело к установлению тензора $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu = qF^\mu{}_\nu U^\nu; \quad F^{\mu\nu} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0, & -\dfrac{\vec{E}}{c}\ {}_{1\times3} \\ \dfrac{\vec{E}}{c}\ {}_{3\times1}, & -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\ {}_{3\times3} \end{pmatrix}$$

и закону преобразования полей

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau}, \quad \text{где } L^\mu{}_\sigma = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Г) Закон Кулона и принцип суперпозиции для эл. полей, факт отсутствия магнитных зарядов и принцип суперпозиции для магн. полей привели к уравнениям Максвелла о потоках Φ_E электрического и Φ_B магнитного полей и соответствующих дифференц. уравнений:

$$\vec{E}_Q = k\frac{Q\vec{r}}{r^3} \Longrightarrow \Phi_E = \oint_{\partial(V)} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{\int_V \rho\, dV}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

$$\vec{B}_{рез} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots \Longrightarrow \Phi_B = \oint_{\partial(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0.$$

(+) отсутствие в природе магн. зарядов

(Д) Закон Кулона $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, ур-е $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (+) принцип относительности Эйнштейна $\Longrightarrow$ привели к системе микроскопических уравнений Максвелла для электромагнитных полей заряженных частиц в вакууме:

$$\begin{cases} \nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\dfrac{j^\mu}{\varepsilon_0 c^2}, & \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \\ \nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0. & \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t}. \end{cases}$$

Термин *микроскопических уравнений* означает уравнений для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме. Существует раздел физики электромагнитных явлений под названием *макроскопическая электродинамика*, в котором изучаются электромагнитные поля в конденсированных средах и, соответственно, выводятся уравнения Максвелла для макроскопических полей в средах.

Используя интегральные теоремы Гаусса–Остроградского и Грина–Стокса:

Теорема Г.–О.:

$$\oint\limits_{\partial(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV;$$

Теорема Грина–Стокса:

$$\oint\limits_{\Gamma=\partial(S)} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int\limits_S [\vec{\nabla}\times\vec{A}]\cdot d\vec{S},$$

полученную систему уравнений Максвелла в трёхмерной дифференциальной форме можно преобразовать в систему уравнений Максвелла в трёхмерной интегральной форме:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Longleftrightarrow$	$\int\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \oint\limits_{\partial(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \Phi_E = \dfrac{\int_V \rho\,dV}{\varepsilon_0};$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\Longleftrightarrow$	$\int\limits_S [\vec{\nabla}\times\vec{B}]\cdot d\vec{S} = \oint\limits_{\partial(S)=\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}\int\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\Longleftrightarrow$	$\int\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV = \oint\limits_{\partial(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0;$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\Longleftrightarrow$	$\int\limits_S [\vec{\nabla}\times\vec{E}]\cdot d\vec{S} = \oint\limits_{\partial(S)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$
Трёхмерная дифференц. форма ур-ний Максвелла для микроскопических полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме.	Трёхмерная интегральная форма уравнений Максвелла для микроскопических полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме

Для полноты картины приведём на этой странице также и систему дифференциальных уравнений Максвелла для микроскопических полей $F^{\mu\nu}(\vec{E},\vec{B})$ заряж. частиц в вакууме в явно релятивистски-инвариантной форме:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{j^\mu}{\varepsilon_0 c^2},\\ \nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} = 0.\end{gathered}}$$

В последующих разделах курса „Электричество и Магнетизм" мы обратимся к изучению тем:

- Электростатика
- Постоянный электрический ток
- Магнитостатика
- Электромагнитная индукция.
- Переменные электромагнитные поля.

Будут изучаться свойства полей $\vec{B}$, $\vec{E}$ и др. и в конденсированных средах.