Лекция 6 Импульс в механике Ньютона, его законы изменения и сохранения. Центр инерции и его закон движения. Движение тела с переменной массой. Преобразования Галилея и их следствия. Принцип относительности Галилея.

## §1. Импульс в механике Ньютона. Его законы изменения и сохранения.

Как было показано в предыдущих лекциях, импульс $\vec{P}$ в механике Ньютона дается выражением:

$$\vec{P} = m\vec{V}, \quad [\vec{P}] = \frac{ML}{T}, \quad 1\,\text{кг}\cdot\text{м/с} - \text{единица}$$

Второй закон Ньютона задаёт скорость изменения импульса для материальной точки:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}_{рд}.$$

Для системы N частиц скорость изменения импульса $\vec{P}_{сист}$:

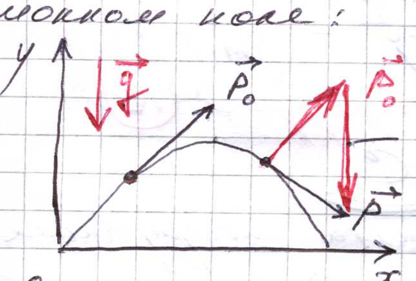
$$\frac{d\vec{P}_{сист}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k\right)}{dt} = \vec{F}^{(внешн)}_{рд}, \quad \vec{P}_{сист} = \sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k$$

определяется результирующей внешней силой, действующей на систему. Закон сохранения импульса системы частиц:

$$\vec{P}_{сист} = \sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k = \overrightarrow{const} \underset{\text{только тогда, когда}}{\overset{\text{тогда и}}{\Longleftrightarrow}} \sum \vec{F}_k^{(внешн)} = \vec{F}^{\,внешн}_{рд} = 0$$

Приведём простые примеры.

1°. Движение частицы с массой m в однородном гравитационном поле:




$\Delta\vec{P} = \vec{P} - \vec{P}_0$ – приращение импульса частицы за время $\Delta t$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g} \Longrightarrow d\vec{p} = m\vec{g}\,dt$$

$$\Delta\vec{P} = m\vec{g}\Delta t \uparrow\uparrow \vec{g} \quad \text{NB}$$

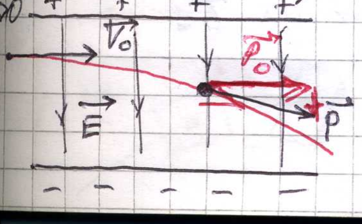
Уравнение $2^{го}$ закона в данном случае легко интегрируется:

$$\int d\vec{p} = m\vec{g}\int dt \longrightarrow \vec{p} = m\vec{g}t + \vec{C}_0$$

Константа $\vec{C}_0$ легко находится из нач. условий, пусть, например, при $t=0$, $\vec{p}(0) = \vec{p}_0 \Rightarrow \vec{C}_0 = \vec{p}_0$

$$\Longrightarrow \vec{p}(t) = m\vec{g}t + \vec{p}_0$$

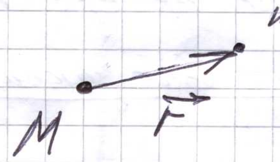
2°. Движение частицы с зарядом q и с массой m в однородном электрическом поле конденсатора:




$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{эл} = q\vec{E} \Longrightarrow \text{далее, те же рассуждения и выкладки что и в } 1°.$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + q\vec{E}t \qquad \Delta\vec{p} = q\vec{E}\Delta t \uparrow\uparrow \vec{E}.$$

3°. Движение массы (m) в поле тяготения (M), M...
Т.к. $M \gg m$, то м. считать M-неподв., m-движе...




$$\frac{d(m\vec V)}{dt} = \vec F_{тяг} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec r$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = m\frac{d\vec V}{dt} = m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -G\frac{Mm\vec r}{r^3} \uparrow\downarrow \vec r$$

Это уравнение будем „интегрировать" в последую... лекциях.

4°. Движение парашютиста в поле тяжести Земли с учетом силы сопротивления его движению:
$\vec F_{сопр} = -\alpha\vec V$


рисуем векторную диаграмму сил

$$\Rightarrow \frac{d\vec p}{dt} = m\frac{d\vec V}{dt} = m\vec g + \vec F_{сопр}$$

В проекции на ось y (вниз напр.)

$$m\frac{dV}{dt} = -\alpha\left(V - \frac{mg}{\alpha}\right)$$

Вводим переменную $\tilde V \overset{def}{=} V - \frac{mg}{\alpha}$, для неё имеем диф. ур-е:

$$m\frac{d\tilde V}{dt} = -\alpha\tilde V \Longrightarrow \int\frac{d\tilde V}{\tilde V} = -\int\frac{\alpha}{m}dt$$

интегрируем NB

$$\Rightarrow \ln\tilde V(t) = -\frac{\alpha}{m}t + \underbrace{\ln C}_{\text{константа интегрирования}}$$

$$\longrightarrow \tilde V(t) = V(t) - \frac{mg}{\alpha} = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

Пусть при $t = 0$, $V(0) = 0 \Rightarrow -\frac{mg}{\alpha} = C$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{mg}{\alpha} - \frac{mg}{\alpha}e^{-\frac{\alpha t}{m}}$$

Очевидно, при $t\to\infty$ $V(t) \to \frac{mg}{\alpha} = const$

В установившемся режиме скорость парашютиста постоянна! NB

$$V(t)\Big|_{t\to\infty} \longrightarrow \frac{mg}{\alpha}, \quad V(t) \approx mg/\alpha$$

при больших $t$!

## §2. Закон движения центра инерции системы частиц.

Рассмотрим систему $N$ частиц, взаимодействующих друг с другом, и с некоторыми внешними силами с результирующей $\vec{F}_{рез}^{(внешн)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(внешн)}$.

$$\frac{d\vec{P}_{сист}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k \vec{r}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\left(\sum m_k \vec{r}_k\right)}{\left(\sum m_k\right)} =$$

$$= \vec{F}_{рез}^{(внешн)}$$

Вводим массу системы $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ и её радиус-вектор центра инерции:

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k, \quad \vec{R}_{ц.и} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

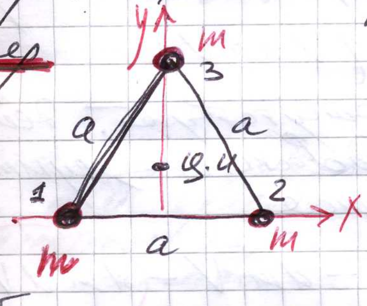
Получаем закон движения центра инерции системы частиц:

$$M\frac{d^2\vec{R}_{ц.и}}{dt^2} = \vec{F}_{рез}^{(внешн)}$$ NB

Движение центра инерции системы частиц происходит по закону движения точечной массы $M = \sum_{k=1} m_k$, помещенной в центр инерции!

Радиус-вектор центра инерции легко определяется по предложенной формуле.

Пример




Три точечные массы $m$ расположены в вершинах равностороннего треугольника, определите, используя координатный метод, радиус-вектор центра инерции.

Решение:

Выберем оси системы координат, как показано на рисунке. Пронумеруем массы $m$ цифрами 1, 2, 3. Имеем для их радиус-векторов:

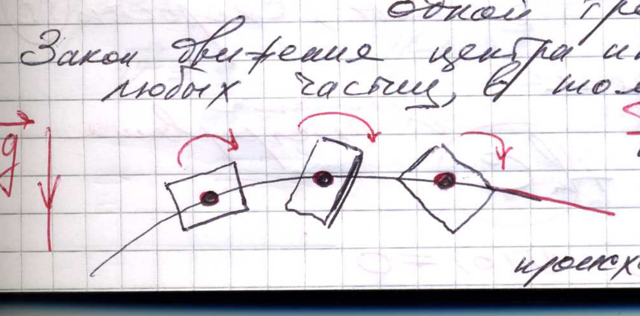
$$\vec{r}_1 = \left(-\frac{a}{2}, 0\right), \quad \vec{r}_2 = \left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad \vec{r}_3 = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_k = 3m, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k \vec{r}_k = \left(-m\frac{a}{2} + m\frac{a}{2}\right)\vec{i} + m\frac{a\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{R}_{ц.и} = \frac{ma\frac{\sqrt{3}}{2}}{3m}\vec{j} = a\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3}\vec{j}$$ — расположен на оси $y$ на расстоянии $\frac{1}{3} h_\Delta$ — одной трети высоты $\Delta$.

Закон движения центра инерции имеет место для любых частиц, в том числе и твердых тел.

Пример




Центр инерции свободно падающего шкафа движется по параболе, вокруг центра инерции происходит вращение шкафа.

$$\boxed{M\frac{d^2\vec R_{ц.и}}{dt^2} = \vec F^{(внешн)}_{рез.}}$$

Закон движения центра инерции сист. частиц, тв. тела, сист. тв. тел.

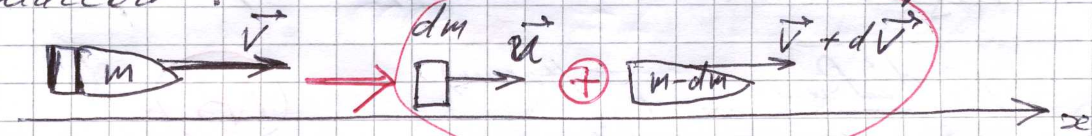
Если $\vec F^{(внешн)}_{рез} = 0$, то $M\ddot{\vec R}_{ц.и} = \vec 0$

$\Rightarrow \dot{\vec R}_{ц.и}(t) = \vec V_{ц.и} = \overrightarrow{const}$

$\Rightarrow \vec R_{ц.и}(t) = \vec V_{ц.и}\, t + \vec R_{ц.и}(0)$ — движение центра инерции свободной системы частиц (без воздействия внешних сил) происходит по прямой линии с постоянной скоростью.

## §3. Движение тела с переменной массой.

Закон сохранения импульса можно применить к описанию движения тела с переменной массой:




Система масс, образовавшаяся из исходной (при „истечении" массы $dm$)

Имеем в проекции на ось X — по направлению движения m, из закона сохранения импульса:

$$mV = dm\cdot u + (m-dm)(V+dV)$$

Считаем, что внешние силы отсутствуют, действуют только внутренние силы и следовательно, суммарный импульс системы сохраняется.

$$\cancel{mV} = dm\cdot u + \cancel{mV} + m\,dV - dm\,V - dm\,dV$$

Можно пренебречь, как бесконечно малой величиной, по ср. с оставшимися.

$$\Rightarrow m\,dV = -dm(u-V), \quad \boxed{u - V = u_{отн} = const}$$

Считаем, что „истечение" массы происходит с равномерной, относит. исходной массы, скоростью (!)

$$\Rightarrow \int\frac{-dV}{u_{отн}} = \int\frac{dm}{m}$$

интегрируем и получаем:

$$\ln m(t) = -\frac{V(t)}{u_{отн}} + \ln C$$

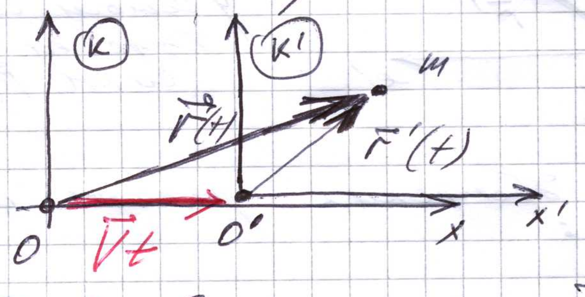
константа интегрирования

Из нач. усл.: $\ln m(0) = \ln C$, $V(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta(t) = U_{отн} \ln \frac{m(0)}{m(t)}}$$ Формула Мещерского-Циолковского.

## §4. Преобразования Галилея и их следствия

Рассмотрим движение материальной точки относит. двух ИСО: (K) и (K'), движущейся относит. (K) с постоянной скоростью $\vec{V} = const$:



Считаем, что при $t=0$ начала систем (K') и (K) совпадали.

Имеем для $t>0$:

Преобразования Галилея: $\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{V}\cdot t, \\ t = t' \end{cases}$ ← подразумевается, что время в (K) и (K') обеих ИСО "течёт" одинаково,

вспомните: Абсолютное время — по Ньютону.

Полученные преобразования для координат и времени носят название преобразований Галилея.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t, \\ t = t'. \end{cases} \quad \text{или в проекциях на оси } (x,y) \Rightarrow \begin{cases} x = x' + Vt, \\ y = y',\ z = z' \\ t' = t \end{cases}$$

Можно заметить, что некоторые величины не изменяются при преобразованиях Галилея. Такие величины называются инвариантами. Перечислим эти величины

1°. Радиус-вектор относительного расстояния двух материальных частиц:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2\,' + \vec{V}t) - (\vec{r}_1\,' + \vec{V}t) = \vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' = \overrightarrow{inv} \quad \text{NB}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_{12}| = inv$$

2°. Ускорение частицы:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}\,' + \vec{V}t) = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}, \text{ при } \vec{V} = const \quad \text{NB}$$

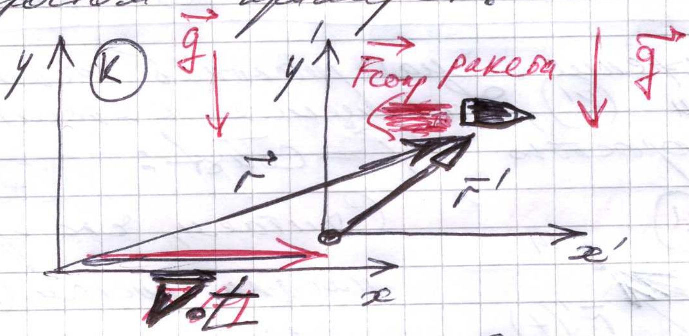
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' = \overrightarrow{inv}.$$

Скорость же частицы не есть инвариант!

$$\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\,' + \vec{V}t)}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V} = \vec{\vartheta}\,' + \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{\vartheta} \neq \vec{\vartheta}\,', \quad \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}\,' + \vec{V}.$$

Внимательное рассмотрение показывает, что законы Ньютона при преобразованиях Галилея не меняют своей формы т.е. выглядят одинаково во всех ИСО. Проиллюстрируем это на простом примере:




Свободное движение тела с учетом силы тяжести и силы $\vec{F}_{сопр} = F_{тр}$

При описании движения ракеты отн. (K) и (K'):

Отн. (K):

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} \xrightarrow[\vec{g} = const]{\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,'}$$

Относит. (K'):

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = m\vec{g}\,' + \vec{F}\,'_{сопр}$$

$$\vec{F}_{сопр}(\vec{r}_{отн}, \vec{V}_{отн}) = inv = \vec{F}_{сопр}(\vec{r}\,'_{отн}, \vec{V}\,'_{отн})$$

Отмеченный факт и многие другие, простые и сложные механические явления, описываются законами Ньютона не изменяющими своего вида при преобразованиях Галилея.

Был сформулирован

Принцип относительности Галилея: законы механики выглядят одинаково во всех ИСО.

Замечание Пусть (K') не явл. инерциальной системой отсчёта, т.е.

$$\vec{V} \neq const \qquad \dot{\vec{V}} \neq 0$$

Тогда: $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' + \dot{\vec{V}}$

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}\,' + m\dot{\vec{V}} = \vec{F}_{сопр} + m\vec{g}$$

$$\Longrightarrow m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}_{сопр} + m\vec{g} - m\dot{\vec{V}}$$

Активные силы

$\vec{F}_{ин} = -m\dot{\vec{V}}$ – сила инерции

В системе (K') помимо акт. сил появляются силы инерции!

Движение мат. тела относительно Неин. СО выглядит сложнее!