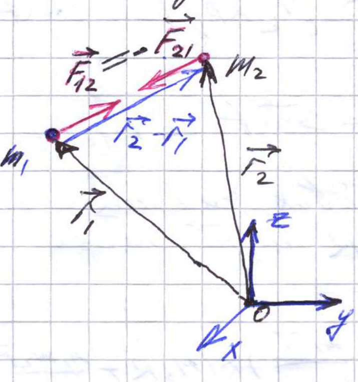
Лекция 6. Задачи Кеплера и Кулона.

§1. Постановка задачи о движении двух частиц, взаимодействующих посредством центральных сил.



Лагранжиан системы имеет в данном случае вид:

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec r}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec r}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec r_1 - \vec r_2|)$$

Введём новые переменные:

$\vec r_2 - \vec r_1 = \vec r$ — радиус-вектор относит. расстояния

$\vec R = \dfrac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2}$ — радиус-вектор центра инерции систем

$\vec r_2$ и $\vec r_1$ можно легко выразить через $\vec R$ и $\vec r$:

$$\vec r_2 = \vec R + \frac{m_1 \vec r}{m_1 + m_2}, \quad \vec r_1 = \vec R - \frac{m_2 \vec r}{m_1 + m_2}.$$

Здесь и далее: $m_1 + m_2 = M$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

В терминах $\vec r$ и $\vec R$ лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec R} - \frac{m_2 \dot{\vec r}}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec R} + \frac{m_1 \dot{\vec r}}{m_1 + m_2}\right)^2 - U(r)$$

$$= \frac{M \dot{\vec R}^2}{2} + \frac{m_1 m_2 \dot{\vec r}^2}{2(m_1 + m_2)} - U(r) = \frac{M \dot{\vec R}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec r}^2}{2} - U(r)$$

Опираясь на полученный лагранжиан, сразу извлекаем некоторые интегралы движения:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \vec R} = 0 \Rightarrow \vec R$ − циклич. коорд. $\Rightarrow \vec P = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec R}} = M\dot{\vec R} = const$

  $\Rightarrow \vec R(t) = \vec V_{ц.и}\, t + \vec R_0$ — равномерное дв-е центра инерции.

- $L_{отн.дв} = \dfrac{\mu \dot{\vec r}^2}{2} - U(r) \xrightarrow[\text{координатах}]{\text{в сферич.}} \dfrac{\mu(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2)}{2} - U(r)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial L_{отн.дв}}{\partial \varphi} = 0$, φ − циклич. коорд. $\Rightarrow p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \mu r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi = const.$

При поворотах физической системы $\vec r \Rightarrow \vec r\,' = \vec r + [\delta\vec\varphi \times \vec r]$ и лагранжиан относит. движения не изменяется, и так как

$$\delta L_{отн.дв} = \frac{\partial L}{\partial \vec r} \cdot \delta \vec r = \dot{\vec p}\,[\delta\vec\varphi \times \vec r] = \underbrace{\delta\vec\varphi \cdot [\vec r \times \dot{\vec p}]}_{\forall \delta\vec\varphi} =$$

$$= \delta\vec\varphi \cdot \frac{d}{dt}[\vec r \times \vec p] = 0 \Rightarrow \vec L_{отн.дв} = [\vec r \times \vec p] = \vec{const}.$$

Сохраняется, таким образом, момент импульса относит. движения.

Задача Докажите, что $\delta L_{отн.дв} = 0$ при поворотах $\delta \vec r = [\delta\vec\varphi \times \vec r]$

Док-во: $\delta \vec V = [\delta\vec\varphi \times \vec V]$, $\delta r = \dfrac{\partial r}{\partial \vec r} \cdot \delta\vec r = \dfrac{\vec r}{r} \cdot \delta \vec r = 0$

$$\Rightarrow \delta L = m\vec V \cdot \delta \vec V - \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec r}{r} \cdot \delta \vec r = m\vec V \cdot [\delta\vec\varphi \times \vec V] - \frac{dU}{dr}\frac{\vec r}{r} \cdot [\delta\vec\varphi \times \vec r] = 0 \;\blacksquare$$

Совершенно аналогично можно доказать, что и исходный лагранжиан не изменяется при поворотах физической системы, т.е. при

$$\delta \vec r_1 = [\delta\vec\varphi \times \vec r_1], \quad \delta \vec r_2 = [\delta\vec\varphi \times \vec r_2], \quad \delta \vec V_k = [\delta\vec\varphi \times \vec V_k], \quad \delta \vec r = [\delta\vec\varphi \times \vec r].$$

Докажите это самостоятельно.

В силу теоремы Э. Нётер поэтому сохраняется следующая величина:

$$\sum_{k=1}^{2}\vec p_k\cdot\delta\vec r_k=\sum_{k=1}^{2}\vec p_k\cdot[\delta\vec\varphi\times\vec r_k]=\delta\vec\varphi\cdot\sum_{k=1}^{2}[\vec r_k\times\vec p_k]\overset{\forall\,\delta\vec\varphi}{=}\text{const}$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{2}[\vec r_k\times\vec p_k]=[\vec r_1\times\vec p_1]+[\vec r_2\times\vec p_2]=\overrightarrow{\text{const}}=\vec L_{total}$$

т.е. полный ~~орбитальный момент~~ момент импульса системы двух частиц сохраняется! Переходя к переменным $\vec R$ и $\vec r$, легко получить след. выр-е для $\vec L_{tot}$:

$$\vec L_{tot}=\left[\left(\vec R-\frac{m_2\vec r}{m_1+m_2}\right)\times\left(m_1\dot{\vec R}-\frac{m_1m_2\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right)\right]+\left[\left(\vec R+\frac{m_1\vec r}{m_1+m_2}\right)\times\left(m_2\dot{\vec R}+\frac{m_1m_2\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right)\right]$$

$$=[\vec R\times M\dot{\vec R}]+[\vec r\times\mu\dot{\vec r}]=\vec L_{орбит}+\vec L_{отн.дв}.$$

Здесь введены орбитальный момент импульса сист. двух частиц

$$\vec L_{орбит}=[(\vec R_0+\vec V_{ц.и}t)\times M\vec V_{ц.и}]=[\vec R_0\times M\vec V_{ц.и}]=\overrightarrow{\text{const}}$$

и момент импульса относит. движения частиц

$$\overrightarrow{\text{const}}=\vec L_{отн.дв}=\vec L=[\vec r\times\mu\dot{\vec r}],\quad\vec r\overset{def}{=}\vec r_2-\vec r_1,\quad\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

Оба момента импульса $\vec L_{орбит}$ и $\vec L_{отн.дв}=\vec L$ сохраняются. Переходя к сферическим координатам, легко также показать, что

$$L_3=x_1p_2-x_2p_1=\mu r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi=\text{const}=p_\varphi.$$

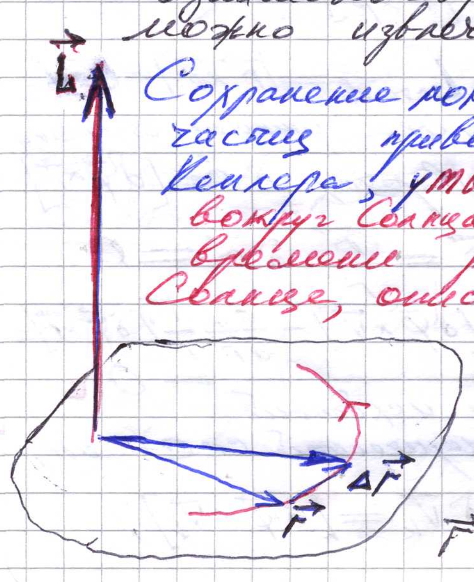
Задача

$$\begin{aligned}x_1&=r\sin\theta\cos\varphi\\x_2&=r\sin\theta\sin\varphi\\x_3&=r\cos\theta\end{aligned}\ \xrightarrow[\text{что}]{\text{докажите,}}\ L_3=x_1\cdot\mu\dot x_2-x_2\mu\dot x_1=\text{const}=p_\varphi=\mu r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi.$$

§2. Качественный анализ движений частиц, взаимодействующих посредством центральных сил.

Из проведенного в предыдущем разделе анализа сохраняющихся величин, соответствующих движениям частиц взаимодействующих посредством центральных сил, можно извлечь ряд простых закономерностей.

Сохранение момента импульса $\vec L$ относительного движения частиц приводит к замечательному второму закону Кеплера, утверждающему, что каждая планета движется вокруг Солнца в плоскости и за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий планету с Солнцем, описывает равные площади. Действительно:



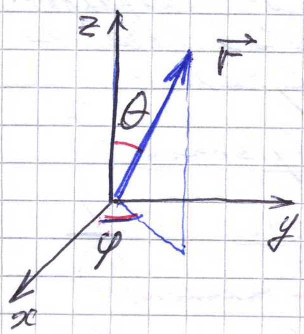
$$\overrightarrow{\text{const}}=\vec L=[\vec r\times\vec p]=\overrightarrow{\text{const}}\Rightarrow\vec r\perp\vec L,\ \vec p\perp\vec L$$

$$\Delta\vec r=\vec V\Delta t=\frac{\vec p}{\mu}\Delta t\perp\vec L$$

$$\vec r\perp\vec L\Rightarrow\Delta\vec r\perp\vec L\Rightarrow\vec r+\Delta\vec r\perp\vec L$$ – орбит… в пло… кости

Кроме того, секториальная скорость относит. дв-я постоянна:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2\mu}\vec{L}_{отн} = \overrightarrow{const}.$$



Подчеркнем, что плоские орбиты имеют место для любых центральных сил, точно также и постоянство секториальной скорости справедливо для таких сил.

Выпишем лагранжиан и энергию относительного движения двух частиц, взаимодействующих посредством центральных сил, в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$L = \frac{\mu\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) = \frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)}{2} - U(r)$$

Очевидно, переменная φ является циклической, следовательно, соответствующий ей обобщенный импульс P_φ сохраняется, т.е.

$$P_\varphi \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = L_3 \overset{def}{=} l = const.$$

Так как орбита относительного движения плоская, то не нарушая общности, можно выбрать полярный угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, в таком случае лагранжиан и энергия относит. движения имеют вид:

$$L = \frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} - U(r); \quad E = \frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = const.$$

и энергия относит. движения, в силу $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, сохраняется, кроме того, с учетом интеграла движения

$$const = l = \mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \mu r^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$

в выражении для энергии переменную $\dot{\varphi}$ можно исключить, в результате получаем энергию движения только по одной переменной $r(t)$:

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) \overset{def}{=} \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + U_{эфф}(r)$$

Учёт симметрий задачи и соответствующих сохраняющихся величин (интегралов движения) позволил выделить в задаче одномерные движения, что, конечно же, значительно упрощает анализ возможных орбит при движении частиц, взаимодействующих посредством центральных сил.

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + U_{эфф}(r), \quad U_{эфф} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$$ — одномерное движение по $r(t)$

$$\dot{\varphi} = \frac{l^2}{\mu r^2}$$ — одномерное движение по $\varphi(t)$ легко рассчитывается по движению $r(t)$.

По лагранжиану относительного движения выписываются соответствующие уравнения движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 = \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow \mu\ddot{r} = \mu r\dot{\varphi}^2 - \frac{dU}{dr};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \mu r^2\dot{\varphi} = const = l.$$

§3. Качественный анализ возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона.

Под задачами Кеплера и Кулона понимаются задачи о движении частиц, взаимодействующих посредством центральных сил с потенциальной энергией взаимодействия, задаваемой законами Всемирного тяготения и Кулона:

Задача Кеплера:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Задача Кулона:

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Для обеих задач будем писать по определению:

$$U = -\frac{\alpha}{r} = \begin{cases} \alpha = G m_1 m_2 \text{ — для задачи Кеплера} \\ \alpha = -k q_1 q_2 \text{ — для задачи Кулона} \end{cases}$$

В задаче Кеплера $\alpha > 0$ и $U(r) < 0$, в задаче же Кулона встречаются оба знака α

$$\alpha \stackrel{def}{=} \begin{cases} -k q_1 q_2 > 0 \text{ — притяжение,} \\ -k q_1 q_2 < 0 \text{ — отталкивание.} \end{cases}$$

Используя выражение для энергии относительного движения двух частиц в задачах Кеплера и Кулона

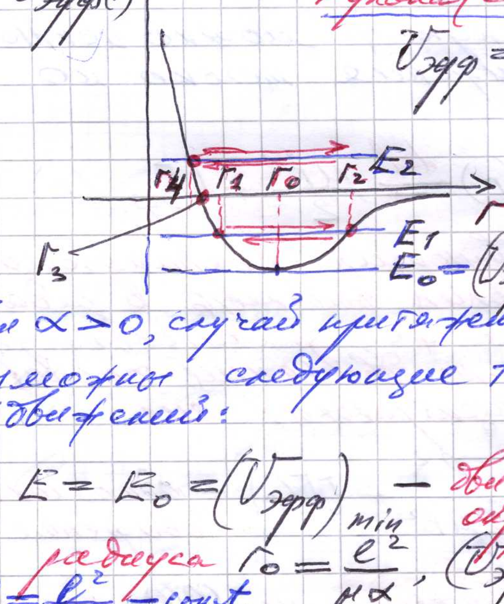
$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{эфф}(r) \Rightarrow \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \geqslant 0,$$

можно легко проанализировать качественно характер возможных орбит. А именно, строим графики $U_{эфф}$ и анализируем с их помощью характер возможных орбит.

Задачи Кеплера и Кулона (с притяжением)

$$U_{эфф} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

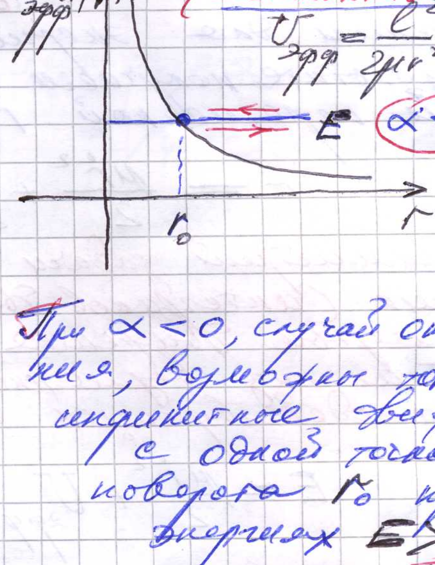
$\alpha > 0$



Задача Кулона (с отталкиванием)

$$U_{эфф} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$\alpha < 0$



При $\alpha > 0$, случай притяжения, возможны следующие типы радиальных движений:

(А) $E = E_0 = (U_{эфф})_{min}$ — движение по окружности радиуса $r_0 = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$, $(U_{эфф})_{min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell^2}$

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell^2}{\mu r_0^2} = const.$$

(Б) $0 > E > (U_{эфф})_{min}$ — финитное движение с двумя точками поворота r_1 и r_2 — движение по эллипсу

(В) $E = 0$ — инфинитное движение по параболе, с точкой поворота r_3

(Г) $E > 0$ — инфинитное движение с точкой поворота r_4 — по гиперболам

При $\alpha < 0$, случай отталкивания, возможны только инфинитные движения с одной точкой поворота r_0 при энергиях $E > 0$. — по гиперболам

§ 4. Уравнения орбит в задачах Кеплера и Кулона.

Получим уравнения возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона. Для этого в выражении для энергии относительного движения

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

воспользуемся заменой переменной

$$r \Longrightarrow y \overset{def}{=} \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{l^2}{\mu r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{l^2}{\mu}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

при этом в качестве независимой переменной возьмём угловую координату φ, производные по времени будем выражать через производные по φ:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l^2}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi} = \frac{l^2}{\mu}y^2\frac{d}{d\varphi}.$$

Получим для E выражение

$$E = \frac{\mu}{2}\frac{l^4}{\mu^2}y'^2 + \frac{l^2}{2\mu}y^2 - \alpha y, \text{ т.е.}$$

$$y'^2 + y^2 - \frac{2\mu\alpha y}{l^2} = \frac{2\mu E}{l^2},$$

вводя также переменную

$$u \overset{def}{=} y - \frac{\mu\alpha}{l^2} = \frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{l^2},$$

получим для неё уравнение

$$u'^2 + u^2 = \frac{\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2} = \frac{\mu^2\alpha^2}{l^4}\left(1 + \frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}\right) \overset{def}{=} B^2 \geqslant 0$$

Учитывая то, что $E \geqslant (U_{эфф})_{min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}$, убеждаемся в справедливости знака $B^2 \geqslant 0$

$$\Longrightarrow \frac{u'^2}{B^2} + \frac{u^2}{B^2} = 1 \xrightarrow[\text{получаем}]{\text{интегрируя}} u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} - \frac{\mu\alpha}{l^2} = B\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{l^2} + \frac{\mu|\alpha|}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0), \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu|\alpha|}{l^2}\left(\operatorname{sign}\alpha + \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}}\cdot\cos\varphi\right)$$

Не нарушая общности выбираем $\varphi_0 = 0$

$$\overset{def}{=} \frac{1}{p}(\operatorname{sign}\alpha + \varepsilon\cos\varphi), \qquad \varepsilon \overset{def}{=} \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{\mu\alpha^2}} \text{ — эксцентриситет орбиты}$$

$$\Longrightarrow \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{\operatorname{sign}\alpha + \varepsilon\cos\varphi}} \qquad p \overset{def}{=} \frac{l^2}{\mu\alpha} \text{ — параметр орбиты.}$$

Можно показать, что в полученном уравнении действительно содержатся все типы орбит, перечисленные в предыдущем разделе.

Например, движению по окружности соответствует $E = (U_{эфф})_{min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}$, при этом $\varepsilon = 0$, $\operatorname{sign}\alpha = 1$, $r = r_0 = p$.