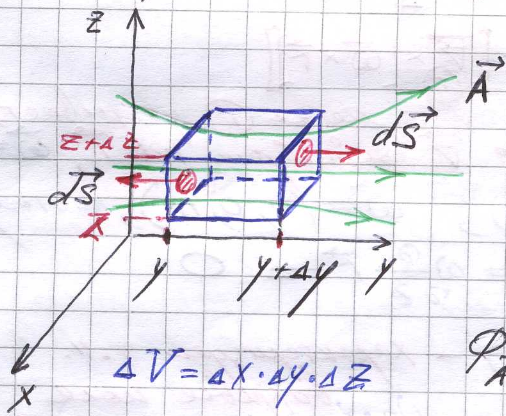
Лекция 6. Элементы теории поля. Дифференциальные операции над полями. Теоремы Остроградского–Гаусса и Грина–Стокса. Четырёхток. Четырёх-градиент и четырёх-дивергенция. Закон сохранения электрич. заряда.

§1. Определение дивергенции векторного поля через поток поля.



$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Приведём еще одно определение дивергенции векторного поля, проясняющее физический смысл этой операции. Для этого вычислим поток поля $\vec{A}$ через небольшой параллелепипед, показанный на рисунке:

$$\Phi_{\vec{A}} = \underset{\text{(по поверхности параллелепипеда)}}{\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}} = \Phi_A^{(1)} + \Phi_A^{(2)} + \Phi_A^{(3)},$$

здесь $\Phi_A^{(k)}$ – поток поля через грани, перпендикулярные оси x_k. Например,

$$\Phi_A^{(2)} = A_y(x, y+\Delta y, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - A_y(x, y, z)\, \Delta x \cdot \Delta z$$

$$\cong \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \cdot \Delta z.$$

Аналогично вычисляются и $\Phi_A^{(1)}$, $\Phi_A^{(2)}$:

$$\Phi_A^{(1)} = A_x(x+\Delta x, y, z)\,\Delta y \Delta z - A_x(x, y, z)\,\Delta y \Delta z \cong$$

$$\cong \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$\Phi_A^{(3)} = A_z(x, y, z+\Delta z)\,\Delta x \Delta y - A_x(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \cong$$

$$\cong \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y$$

Суммарный поток, т.о., дается формулой:

$$\Phi_A = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S} \cong \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Из последней формулы получаем „физическое" определение дивергенции векторного поля:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

$$\Delta V \overset{def}{=} \Delta x \Delta y \Delta z$$

В пределе $\Delta V \to 0$ получаем поток поля $\vec{A}$ через бесконечно малый объём, т.е. поток поля из точки", действительно, „расходимость" поля из точки.

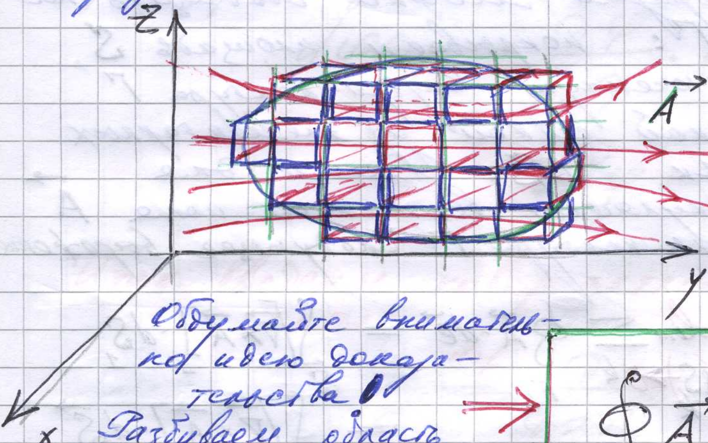
Приведенное определение дивергенции поля указывает также на замечательное утверждение, связывающее поток поля, т.е. интеграл от $d\Phi_A$ по поверхности с интегралом от $\operatorname{div}\vec{A}$ по объёму:

$$\underset{\text{(по пов-ти параллелепипеда)}}{\oint \vec{A}\cdot d\vec{S}} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\Delta x\Delta y\Delta z = \int_{\Delta V} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta V} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV$$

$\partial(\Delta V)$ – обозначение поверхности, окружающей объём ΔV; ΔV – обозначение объема.

Фактически доказана теорема Гаусса-Остроградского для малого объема ΔV. Это доказательство можно очевидным образом обобщить на произвольный объем, разбив его на элементарные:



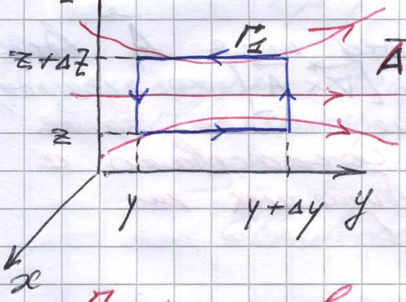
$$\oint_{\partial(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \lim_{\max(\Delta V_k)\to 0} \sum_k \oint_{\partial(\Delta V_k)} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_{V=\bigcup_k(\Delta V_k)} \operatorname{div} A\cdot dV$$

Обдумайте внимательно идею доказательства! Разбиваем область V на объемы ΔV_k: $V = \bigcup_k(\Delta V_k)$ и т.д.

$$\boxed{\oint_{\partial(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{V} (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV}$$

Теорема Гаусса-Остроградского

§2. Определение ротора векторного поля через циркуляцию поля.



Вычислим циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ вдоль небольшого замкнутого контура Γ с площадью $\Delta S_1 = \Delta y\cdot\Delta z = \Delta x_2\cdot\Delta x_3$:

Γ_1 – контур в плоскости (y, z).

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot d\vec{l} = A_y(x,y,z)\,\Delta y + A_z(x,y+\Delta y,z)\,\Delta z - A_y(x,y,z+\Delta z)\,\Delta y - A_z(x,y,z)\cdot\Delta z$$

$$= \left(A_3(x_1,x_2+\Delta x_2,x_3) - A_3(x_1,x_2,x_3)\right)\Delta x_3 - \left(A_2(x_1,x_2,x_3+\Delta x_3) - A_2(x_1,x_2,x_3)\right)\Delta x_2$$

$$\cong \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\Delta x_2\Delta x_3$$

Из полученного выражения выводим при $\Delta S_1 = \Delta x_2\Delta x_3 \to 0$:

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}]_1 = \lim_{\Delta S_1\to 0} \frac{\oint_{\Gamma_1} \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_1}$$

– первая компонента $[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = \operatorname{rot}\vec{A}$ определяется как предел

Совершенно аналогично получаются формулы и для остальных компонентов $[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$:

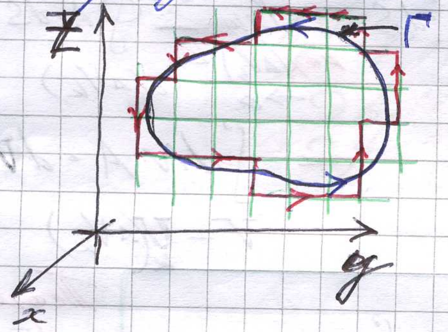
$$[\vec{\nabla}\times\vec{A}]_2 = \lim_{\Delta S_2\to 0}\frac{\oint_{\Gamma_2}\vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_2} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \qquad [\vec{\nabla}\times\vec{A}]_3 = \lim_{\Delta S_3\to 0}\frac{\oint_{\Gamma_3}\vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_3} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

Проведенное рассмотрение приводит нас к теореме Грина-Стокса:

$$\oint_{\Gamma_k}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{\Delta S_k}[\vec{\nabla}\times\vec{A}]_k\cdot dS_k \cong [\vec{\nabla}\times\vec{A}]_k\cdot\Delta S_k, \qquad (k=1,2,3)$$

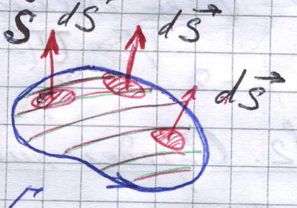
связывающей циркуляцию векторного поля с интегралом от $[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$ по площади, одномерный криволинейный интеграл выражается через двумерный интеграл по площадке ΔS_k, натянутой на контур Γ_k.

Доказательство очевидным образом можно обобщить на случай произвольного контура Γ: покрываем площадь S, заключенную внутри контура Γ мелкой сеткой из элементарных ячеек ΔS. Имеем для циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура Γ следующее выражение:



$$\oint_\Gamma\vec{A}\cdot d\vec{l} = \lim_{\max\Delta S_k\to 0}\sum_k\oint_{\Gamma_k}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S[\vec{\nabla}\times\vec{A}]_1\cdot dS_1 = \int_S[\vec{\nabla}\times\vec{A}]\cdot d\vec{S}$$

В общем случае произвольного контура Γ и натянутой на него площадке S имеет место



Теорема Грина-Стокса:

$$\oint_\Gamma\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S[\vec{\nabla}\times\vec{A}]\cdot d\vec{S},$$

эта теорема связывает циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ вдоль некоторого контура Γ с интегралом от $[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$ по площади, натянутой на контур Γ. Направление обхода вдоль контура Γ при этом должно быть согласовано с направлениями площадок $d\vec{S}$, выбираемых на большой площадке $S = \bigcup(\Delta S_k)$.

Теоремы Гаусса-Остроградского и Грина-Стокса очень полезны ~~при~~ формулировке уравнений Максвелла в интегральной форме.

§3. Четырёхток, четырёхградиент и четырёхдивергенция.

В пространстве Минковского, при формулировке СТО и уравнений Максвелла в явно релятивистски-инвариантной форме, используются четырёхградиенты и четырёхдивергенции от соответствующих полей. Введём нужные для дальнейшего изложения предмета определения.

Пусть $\varphi(x)=\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ является скалярным полем в пространстве Минковского с координатами $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$. Скалярность поля в данном случае означает, что это поле является лоренцевским инвариантом, т.е. не изменяется при преобразованиях Лоренца $x\to x'=Lx$:

$$\varphi'(x')=\varphi(x)\ ,\quad \text{т.е.}\quad \varphi'(x)=\varphi(L^{-1}x).$$

Вычислим изменение $\varphi(x)$ при переходе от точки x к бесконечно близко расположенной точке $x+dx$ пр-ва Минковского:

$$\underbrace{d\varphi(x)}_{\text{скаляр}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\cdot dx^\mu \overset{def}{=\!=} \nabla_\mu\varphi\cdot \underbrace{dx^\mu}_{\text{контравар. }4^х\text{-вектор}}$$

$$\nabla_\mu\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$$ — по природе своей д. быть ковариантным $4^х$ вектором!

При другой записи $d\varphi(x)$:

$$\underbrace{d\varphi(x)}_{\text{скаляр}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\cdot dx_\mu \overset{def}{=\!=} \nabla^\mu\varphi\cdot \underbrace{dx_\mu}_{\text{ковар. }4^х\text{ вектор}}$$

$$\nabla^\mu\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$ — по природе своей д. быть контравар. $4^х$-вектором!

Итак, введены ковариантный и контравариантный $4^х$-градиенты:

$$\nabla_\mu\overset{def}{=\!=}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ ,\qquad \nabla^\mu\overset{def}{=\!=}\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},-\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)$$

напомним, что $x_\mu=(x^0,-\vec{x})$.

С помощью этих дифференциальных операторов из скалярного поля $\varphi(x)$ получаются соответственно ковариантное и контравариантное векторное поля:

$$\nabla_\mu\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0},\vec{\nabla}\varphi\right);\ \nabla^\mu\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0},-\vec{\nabla}\varphi\right)$$

Используя введенные операторы $4^х$-градиента, можно определить четырёхдивергенцию векторного поля $A^\mu(x)$, $\mu=0,1,2,3$

$3^х$-дивергенция в Евклидовом пр-ве:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$4^х$-дивергенция в пр-ве Минковского:

$$\nabla_\mu A^\mu=\frac{\partial A^0}{\partial x^0}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{x}}=$$
$$=\frac{\partial A^0}{c\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=$$
$$=\nabla^\mu A_\mu=\frac{\partial A_0}{\partial x_0}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{x}}=$$
$$=\frac{\partial A_0}{c\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}.$$

приведены для сравнения.

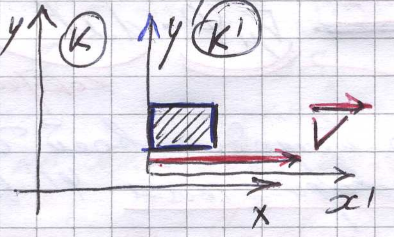
Введём также понятие четырёхтока. Для этого рассмотрим заряд dq в объеме dV, переместим этот заряд в пр-ве Минковского на $dx^\mu = (c\,dt, d\vec{x})$. Образуем величину:

$$\underbrace{dq\, dx^\mu}_{4^x\text{-вектор}} = \rho\, dV\, dt\, \frac{dx^\mu}{dt} =$$

$$= \underbrace{dV\, dt}_{\text{скаляр}}\, \rho \frac{dx^\mu}{dt}$$

эта величина должна быть 4^x вектором!

Задача Докажите, что $dV\,dt$ есть скаляр.



Очевидно, что

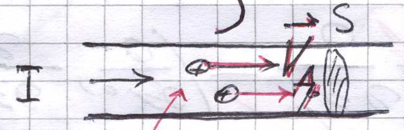
$$\begin{cases} dV = dV' \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ dt = \dfrac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow dV\,dt = dV'\,dt'$$

Итак, доказано, что величина

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (\rho c, \rho \vec{V})$$

является 4^x-вектором, и называют эту величину 4^x вектором плотности электрического тока.

Физич. смысл $\rho\vec{V}$ вполне прозрачен — это плотность эл. тока:

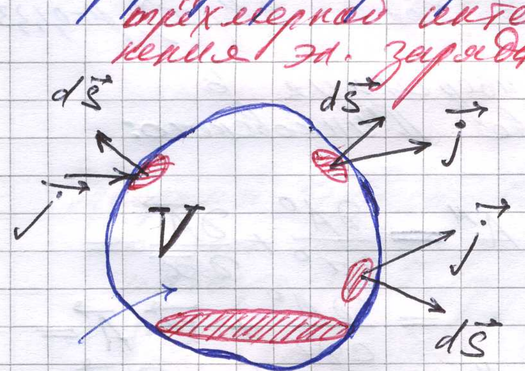


I – измер. в Амперах

$\Longrightarrow$ плотность эл. тока $|\vec{j}| = \dfrac{I}{S} = \dfrac{\rho|\vec{V}| S \Delta t}{S \Delta t} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t \cdot S} = \rho|\vec{V}|$

§4 Закон сохранения электрического заряда.

Используя введённые в предыдущих разделах понятия, сформулируем закон сохранения эл. заряда, причем эту формулировку приведём в нескольких видах. Начнём с трёхмерной интегральной формулировки закона сохранения эл. заряда. Рассмотрим некоторый объем V, в который могут затекать эл. токи и вытекать электрич. токи.



Некот. объем, в котором находятся эл. заряды

Пусть $\vec{j} = \rho\vec{V}$ – плотность эл. тока, $\vec{V}$ – скорость носит. заряда, ρ – плотность носит. заряда.

Имеем очевидное равенство:

$$I = \underbrace{\oint_{\partial(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{Электрич. ток через поверхность } \partial(V)} = \underbrace{-\frac{dQ}{dt}}_{\text{минус скорость изменения заряда в объеме}} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, закону сохранения эл. заряда, сформулированному выше, можно придать другую, эквивалентную форму, а именно:

$$\oint\limits_{\partial(V)} \vec{j}\cdot d\vec{S} \;\overset{\text{по теореме}}{\underset{\text{Гаусса–Остроград}}{=\!=}}\; \int\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\, dV = -\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV, \quad \text{т. е.}$$

$$\longrightarrow \int\limits_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0$$

— это рав-во должно выполняться $\forall V$, поэтому выражение в скобках должно равняться нулю:

$$\boxed{\oint\limits_{\partial(V)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV \quad \forall V} \longleftrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

эквив. формы!

Интегральная форма закона сохранения эл. заряда

Локальная, дифференциальная форма закона сох. эл. заряда — уравнение неразрывности.

Отметим, что в гидродинамике также используется уравнение неразрывности для жидкостей, имеющее вид:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \qquad \vec{j} = \rho\vec{V}$$

Здесь $\rho(\vec{x},t)$ — плотность жидкости, $\vec{V}(\vec{x},t)$ — скорость частиц жидкости в (·) $\vec{x}$.

Используя введенные выше 4х вектор плотности эл. тока и четырёхградиент, т. е.

$$j^\mu = (\rho c, \rho\vec{V}), \qquad \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla}\right),$$

закон сохранения эл. заряда в локальной форме можно переформулировать явно релятивистски-инвариантным способом:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \longleftrightarrow \boxed{\nabla_\mu \cdot j^\mu = 0}$$

Имеем, т. о., три эквивалентные формулировки закона сохранения эл. заряда.