Лекция 5. Механическое подобие. Теорема вириала. Общий анализ одномерных движений. Фазовое пространство. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий.

§1. Механическое подобие.

Уравнения движения в лагранжевой механике получаются с помощью принципа наименьшего действия Гамильтона. Механической системе сопоставляется лагранжиан $L = K - U$, по лагранжиану строится действие

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt.$$

Истинному движению системы $q_{ист}(t)$ соответствует экстремум действия так, что при вариациях траектории системы вблизи её истинного положения $q_{ист}(t) \Rightarrow q(t) = q_{ист}(t) + \delta q(t)$ "с закрепленными концами" $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ вариация "действия обращается в нуль:

$$\delta S[q(t)] = \sum_{k=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Ясно, что уравнения движения при умножении действия на постоянное число $S \Rightarrow S' = aS$, $a = \mathrm{const}$, не изменяются. Из этого обстоятельства можно получить нетривиальные следствия, касающиеся семейств подобных траекторий.

Рассмотрим для простоты частицу, движущуюся в потенциальном силовом поле, описываемую лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - U(\vec{r}), \quad c \quad U(\alpha\vec{r}) \stackrel{def}{=} \alpha^k U(\vec{r}),$$

т.е. с потенциальной энергией частицы, являющейся однородной функцией координат $\vec{r}$ порядка k. Подвергнем координаты $\vec{r}$ и время t преобразованию подобия (растяжению)

$$\vec{r} \to \alpha\vec{r} = \vec{r}\,', \quad t \to t' = \beta t.$$

При этом

$$S[\vec{r}\,'(t')] = \int_{t_1'}^{t_2'} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}\,'(t')^2}{2} - U(\vec{r}\,')\right)dt' \xrightarrow[t' = \beta t,\ U(\alpha\vec{r}) = \alpha^k U(\vec{r})]{\dot{\vec{r}}\,'(t') = \frac{\alpha}{\beta}\dot{\vec{r}}(t)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\frac{\alpha^2}{\beta} - \alpha^k\beta\, U(\vec{r})\right)dt.$$

Потребуем, чтобы $S[\vec{r}\,'(t')] = a\,S[\vec{r}(t)]$, тогда должны выполняться соотношения:

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \alpha^k\beta = a \Longrightarrow \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}.$$

Резюме. При растяжении координат и времени

$$\vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = \alpha\vec{r}, \quad t \to t' = \beta t$$

уравнения движения не изменяются и, как следствие, траектории $\vec{r}\,'(t')$ и $\vec{r}(t)$ подобны, если $\beta = \alpha^{1-k/2}$, при этом различные величины, относящиеся к различным траекториям соотносятся следующим образом:

$$\frac{\ell'}{\ell} = \alpha, \quad \frac{V'}{V} = \frac{\ell'}{\ell}\frac{t}{t'} = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha^{k/2}, \quad \frac{t'}{t} = \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}.$$

Рассмотрим для иллюстрации конкретные примеры.

Пример 1. Движение частицы в однородном поле тяжести с $U(z)=mgz$, $U(\alpha z)=\alpha U(z)$, $k=1$, в таком случае

$$\Rightarrow \frac{V'}{V}=\alpha^{1/2}=\sqrt{\frac{l'}{l}}=\sqrt{\frac{h'}{h}}, \quad V\propto\sqrt{h}$$

при падении с высот h' и h скорости относятся как $\sqrt{\frac{h'}{h}}$.

Пример 2. Движение частицы в центральном силовом поле тяготения с $U(r)=-\frac{\varkappa}{r}$, $U(\alpha r)=\alpha^{-1}U(r)$, $k=-1$

$$\Rightarrow \frac{t'}{t}=\beta=\alpha^{1-\frac{k}{2}}=\alpha^{3/2}=\sqrt{\frac{l'^3}{l^3}}, \quad \frac{t'^2}{t^2}=\frac{l'^3}{l^3}$$

получаем известный закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Пример 3. Движение частицы в центральном силовом поле с потенциальной энергией частицы $U(r)=\frac{\varkappa r^2}{2}$, т.е. $U(\alpha r)=\alpha^2 U(r)$, $k=2$, поэтому: (поле упругих сил)

$$\Rightarrow \frac{t'}{t}=\beta=\alpha^{1-\frac{k}{2}}=\alpha^0=\left(\frac{l'}{l}\right)^0$$

откуда следует свойство изохронности колебаний, т.е. независимость периода колебаний от амплитуды

§2. Теорема вириала (вириальная теорема).

Полезные простые следствия, касающиеся движений систем частиц в ограниченной области пространства можно получать с помощью так называемой теоремы Вириала.

Рассмотрим систему частиц, описываемую лагранжианом

$$L=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\vec{V}_k^2}{2}-\sum_{k=1}^{N}U(\vec{r}_k), \quad U(\alpha\vec{r}_k)=\alpha^k U(\vec{r}_n)$$

во внешнем силовом поле с потенциальной энергией, являющейся однородной функцией степени k. Для однородных функций имеет место

Лемма Эйлера. Пусть $F(\alpha x_1,\dots,\alpha x_N)=\alpha^k F(x_1,\dots,x_N)$ является некоторой однородной функцией степени k, тогда

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot x_n=kF(x_1,\dots,x_N)$$

Доказательство:

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha x_1,\dots,\alpha x_N)\Big|_{\alpha=1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot x_n=\frac{d}{d\alpha}(\alpha^k F)\Big|_{\alpha=1}=kF(x_1,\dots,x_N)$$

Применим лемму Эйлера к однородным функциям, кинетической и потенциальной энергии:

$$K(\alpha\vec{V}_1,\dots,\alpha\vec{V}_N)=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\alpha^2\vec{V}_k^2}{2}=\alpha^2K(\vec{V}_1,\dots,\vec{V}_N), \quad \sum_{n=1}^{N}U(\alpha\vec{r}_n)=\alpha^k\sum_{n=1}^{N}U(\vec{r}_n)$$

Согласно Лемме

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial K}{\partial\vec{V}_n}\cdot\vec{V}_n=2K, \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_n}\cdot\vec{r}_n=kU$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial\vec{V}_n}=\vec{P}_n=\frac{\partial T}{\partial\vec{V}_n}$ – определение обобщенных импульсов, то

$$\sum_{n=1}^{N}\vec{P}_n\cdot\vec{V}_n=2K$$

Для случая ограниченного движения системы частиц в пространстве применим операцию усреднения по времени

$$\overline{f(t)} = \langle f(t) \rangle \overset{def}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t+\tau')\, d\tau'$$ (по отрезку времени τ в окрестности момента вр. t)

к сумме $\sum_{k=1}^{N} \vec{p_n} \cdot \vec{v_n}$:

$$\overline{\sum_{n=1}^{N} \vec{p_n} \cdot \vec{v_n}} = \overline{\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N} \vec{p_n} \cdot \vec{r_n}\right)} - \overline{\sum \dot{\vec{p_n}} \cdot \vec{r_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{N} \vec{p_n} \cdot \vec{r_n} \Big|_0^\tau}{\tau} - \overline{\sum \dot{\vec{p_k}} \vec{r_n}} \xrightarrow[\text{(дост. большое время уср.)}]{\tau \to \infty} \overline{\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r_n}} \cdot \vec{r_n}} = k \overline{U}$$

Итак, доказано утверждение, известное под названием

Теорема Вириала Для ограниченных в пространстве движений системы N частиц с $K(\alpha \vec{v}) = \alpha^2 K(\vec{v})$, $U(\alpha \vec{r}) = \alpha^k U(\vec{r})$ имеют место соотношения:

$$\overline{\sum \frac{\partial K}{\partial \vec{v_n}} \cdot \vec{v_n}} = 2\overline{K} = \overline{\sum \vec{p_n} \cdot \vec{v_n}} = -\overline{\sum \dot{\vec{p_n}} \vec{r_n}} =$$

$$= \overline{\sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r_n}} \cdot \vec{r_n}} = k\overline{U}$$

Пример 1 Гармонический осциллятор с $U(\vec{r}) = \frac{\varkappa r^2}{2}$, $U(\alpha \vec{r}) = \alpha^2 U(\vec{r})$, $k = 2$, поэтому

$$2\overline{K} = 2\overline{U} \Rightarrow \overline{E} = \overline{K} + \overline{U} = 2\overline{K} = 2\overline{U}.$$

Пример 2 Движение частицы в силовом поле с $U(r) = -\varkappa/r$. $U(\alpha \vec{r}) = \alpha^{-1} U(\vec{r})$, $k = -1$, поэтому

Общие ф-лы $\forall k$

$$2\overline{K} = k\overline{U}, \quad \overline{E} = \overline{K} + \overline{U} = \frac{k+2}{2}\overline{U}$$

$$\Rightarrow \overline{U} = \frac{2}{k+2}\overline{E}, \quad \overline{K} = \frac{k}{k+2}\overline{E}$$

При $k = -1$: $\overline{E} = \frac{\overline{U}}{2} = -\overline{K} < 0$ ← результат для примера 2.

§3. Общий анализ одномерных движений. Точки поворота. Финитные и инфинитные движения

Очень часто при описании движений механических систем с несколькими степенями свободы возможно выделение простейших движений системы в одном измерении, описываемых лагранжианом

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q) \Rightarrow p_k = p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\dot{q}.$$

При этом, если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, т.е. лагранжиан не зависит явно от времени и, как следствие, функция Гамильтона

$$const = E = H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{a} - \frac{p^2}{2a} + U(q) = \frac{p^2}{2a} + U(q),$$

выполняющая роль энергии, сохраняется, т.е. является интегралом движения.

Далее, для простоты, рассмотрим случай одномерного движения частицы массы m в потенц. силовом поле с $U(x)$ – пот. эн. частицы

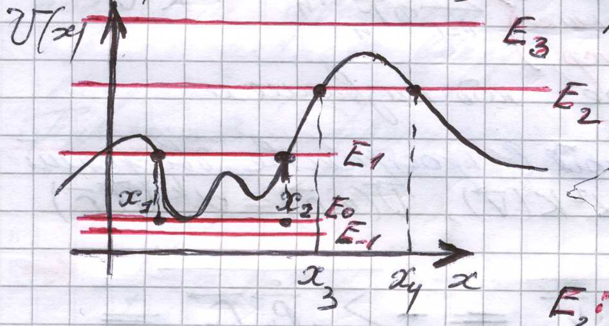
Имеем в данном случае:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x),\quad \frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow E=H=\frac{p^2}{2m}+U(x)=\mathrm{const}$$

Опираясь на сформулированный закон сохранения энергии

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=\mathrm{const} \Rightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2}=E-U(x)\geqslant 0$$

а на факт неотрицательности $K=\frac{m\dot{x}^2}{2}\geqslant 0$ кинетической энергии, можно сделать некоторые общие заключения, касающиеся качественных закономерностей одномерного движения частицы в произвольном силовом поле с $U(x)$ при некоторых значениях полной энергии $E_{-1}, E_0, E_1, E_2, E_3$ частицы, показанных на рисунке.



E_1: (x_1, x_2) — классич. доступная область финитного движения;

E_2: (x_3, x_4) — классич. недоступная обл. движ.

E_2: $x\geqslant x_4$ — классически доступная область инфинитного движения и т.д.

Из выражения $\frac{m\dot{x}^2}{2}=E-U(x)$ для кинетической энергии частицы следует формула для подсчёта периода финитного движения, например, для $E=E_1$ — период колебаний между точками поворота x_1 и x_2 даётся формулой:

$$dt=\frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2(E_1-U(x))}} \Rightarrow T=2\cdot\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-U(x))}}.$$

Точки x_1, x_2, x_3 и x_4, в которых $m\dot{x}^2/2=E-U(x)=0$, называются точками поворота, скорость частицы в таких точках обращ. в нуль.

§4. Понятие о фазовом пространстве. Анализ одномерных движений с помощью фазовой плоскости

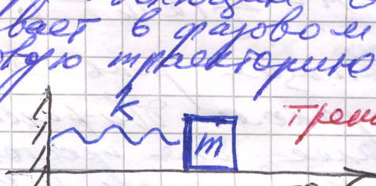
При рассмотрении движений механических систем, а также и в более широком контексте, динамических и физических систем, используется понятие фазового пространства. Так если механическая система имеет f степеней свободы, то её состояние характеризуется $2f$ значениями обобщённых координат $(q_1(t), q_2(t),\dots, q_f(t))$ и обобщённых импульсов $(p_1(t),\dots,p_f(t))$:

$$\begin{cases} L=K-U,\quad p_k\stackrel{def}{=}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \\ \Rightarrow p_k=p_k(t). \end{cases} \Rightarrow (q_1(t),\dots,q_f(t);p_1(t),\dots,p_f(t))\ -$$

— точка в $2f$-мерном фазовом пространстве.

Определение. Пространство $2f$ измерений, состоящее из f обобщённых координат и f обобщённых импульсов, называется фазовым пространством системы. Состояние системы в момент времени t изображается точкой в фазовом пространстве. При эволюции во времени эта точка описывает в фазовом пространстве траекторию — фазовую траекторию.

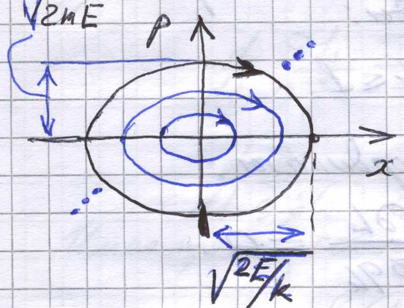
Пример. Гармонический осциллятор:



Трения нет.

$$m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x}+kx)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=\frac{dE}{dt}=0$$

$$\Rightarrow E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const. \Rightarrow \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2}+\frac{x^2}{(\sqrt{2E/k})^2}=1$$



При движении осциллятора, т.е. массы m, точка, изображающая состояние системы описывает в двумерном фазовом пространстве (x, p) фазовую траекторию, в рассматриваемом случае — эллипс. Различным фазовым траекториям соответствуют разл. энергии — имеем семейство фазовых траекторий — эллипсов.

Анализ движений одномерных систем с помощью фазовой плоскости удобно производить используя дифференциальные уравнения фазовых траекторий. Покажем, как эти уравнения выводятся

Гармонический осциллятор. | Частица в потенциальном силовом поле с пот. эн. $U(x)$

$$m\ddot{x}+kx=0 \xrightarrow{\text{обобщение}} m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$(q,p)\equiv(x,m\dot{x}) \Rightarrow (x,\dot{x})\equiv(x,y)$, $y \stackrel{def}{=} \dot{x}$ | $(x,\dot{x})\equiv(x,y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\ddot{x}}{y}=-\frac{\omega_0^2 x}{y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\ddot{x}}{y}=-\frac{\partial U/\partial x}{y}=f(x,y)$$

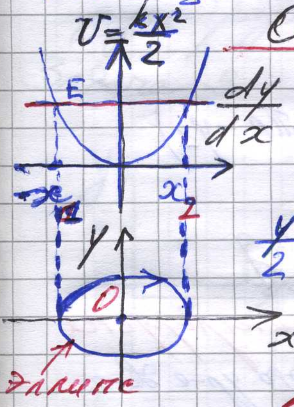
Далее эти уравнения интегрируют, т.е.

$$\int(y\,dy+\omega_0^2x\,dx)=0 \qquad \int dy=\int f(x,y)\,dx$$

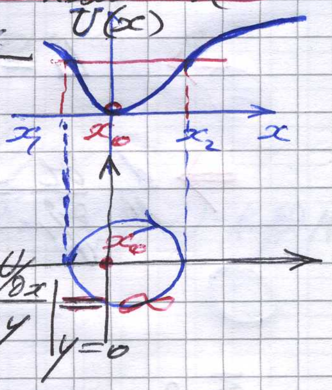
$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{\omega_0^2x^2}{2}=const, \qquad y=\int f(x,y)\,dx$$

При анализе одномерных движений (одна обобщ. координата) с помощью фазовой плоскости опираются на некот. общие закономерности.

Осциллятор | Частица в потенц. силовом поле



$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\omega_0^2x}{y} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial U/\partial x}{y}$$



$$\frac{y^2}{2}+\frac{\omega_0^2x^2}{2}=const$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\infty \qquad y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial U/\partial x}{my}\Big|_{y=0}=\infty$$

(А) Фазовые траектории пересекают ось $y=0$ под прямым углом.

$$x=x_0=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \qquad x=x_0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$$

(Б) Фазовые траектории вблизи т. минимума пот. энергии пересекают ось $x=x_0$ под углом 0°.

В самой точке $(x=x_0,\ y=y_0=0)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0} \text{ — неопределенность} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{0}{0} \text{ — неопределенность}$$

(В) Точка минимума потенц. энергии является особой точкой дифференциального уравнения, определяющего фазовые траектории, в показанных на рисунках точки $(x_0, y=y_0=0)$ — особая точка типа центр.