Лекция 4. Выбор лагранжианов физических систем. Симметрии физических систем и законы сохранения.

§ 1. Примеры построения лагранжианов физических систем.

Выбор лагранжианов механических (физических) систем осуществляется на основе следующих соображений:

(А) Действие $S[q(t)]$ должно быть скалярной величиной (в той геометрии, в которой осуществляется построение физической теории)

(Б) Если ограничиться уравнениями движения второго порядка, то лагранжиан должен быть (в силу структуры ур-ний Лагранжа) функцией обобщенных координат $q(t) \equiv (q_1(t), \dots, q_f(t))$, и обобщенных скоростей $\dot{q}(t) \equiv (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t))$, и времени t, т.е. $L = L(q, \dot{q}, t)$.

(В) При выборе лагранжиана должны учитываться соображения симметрии.

(Г) Следует также иметь в виду, что лагранжианы, отличающиеся на полную производную от произвольной функции $\Lambda(q, t)$ по времени, т.е.

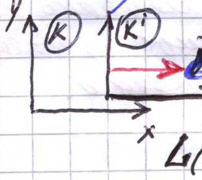
$$L(q, \dot{q}, t) \quad \text{и} \quad \tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}$$

приводят к одним и тем же уравнениям движения.

Покажем на нескольких примерах, как осуществляется выбор лагранжиана. Начнём с простейшего случая — свободной нерелятивистской частицы.

Пример 1. Лагранжиан свободной нерелятивистской частицы.

Стартуем с функции Лагранжа $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

- Учтем однородность пространства, это означает, что $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ и поэтому
$$L = L(\vec{v}, t).$$
- Однородность времени также означает, что L не зависит от времени, т.е.
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \longrightarrow L = L(\vec{v}).$$
- Изотропность пространства требует, чтобы L зависел от модуля скорости, т.е.
$$L = L(\vec{v}^2)$$
- 
$\vec{\varepsilon}$ $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ При преобразованиях Галилея $\vec{v} \to \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ и

$$L(\vec{v}^2) \longrightarrow L((\vec{v}+\vec{\varepsilon})^2)\Big|_{|\vec{\varepsilon}| \to 0} = L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + O(\vec{\varepsilon}^2)$$

уравнения движения при преобразованиях Галилея не должны изменяться (принцип относительности Галилея в нерелятив. физике) поэтому $L((\vec{v}+\vec{\varepsilon})^2)$ и $L(\vec{v}^2)$ должны отличаться на полную производную по времени, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} = \frac{d\Lambda}{dt}, \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2} = a = \text{const},$$

следовательно

$$L = a\vec{v}^2 = \frac{m\vec{v}^2}{2}, \quad a = \frac{m}{2}$$ — из соответствия с мех. Ньютона.

Рассмотренный пример очень простой, но весьма поучительный.

Пример 2. Лагранжиан нерелятивистской частицы с массой m в потенциальном силовом поле спот. энергией частицы $U(\vec{r})$.

Выбор лагранжиана в данном случае вполне очевиден и является обобщением случая для свободной нерелятив. частицы:

$$L = \frac{m\vec{V}^2}{2} - U(\vec{r}) = K(\vec{V}^2) - U(\vec{r}).$$

Уравнения Лагранжа в данном примере легко вычисляются и имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow m\dot{\vec{V}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

и совпадают уравнением движения в форме второго закона Ньютона.

Пример 3. Лагранжиан нерелятивистской заряженной частицы с зарядом q и массой m во внешнем электромагнитном поле с напряженностью эл. поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и индукцией магн. поля $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Напомним, что поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ принято выражать через электромагнитные скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ потенциалы:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = [\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)].$$

Лагранжиан в рассматриваемом примере как раз очень просто выражается в терминах электромагнитных потенциалов, а именно, имеет вид:

$$L = \underbrace{\frac{m\vec{V}^2}{2}}_{K\text{ - кин. эн.}} \underbrace{- q\varphi(\vec{r},t)}_{-U(\vec{r},t)\text{ - эн. вз. с эл. полем}} + q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{V}$$

менее всего очевидно слагаемое, описывающее вз-е с магн. полем.

Покажем прямым вычислением уравнений Лагранжа, что при указанном выборе лагранжиана получается правильное уравнение движения заряженной частицы.

Отметим также, что в примере 3 рассматривается скорее физическая система, а не чисто механическая. Это демонстрирует важность Лагранжевой формы уравнений движения и в применении к физическим системам.

Выполним простые выкладки:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m\vec{V} + q\vec{A}(\vec{r},t), \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q\vec{\nabla}\varphi + q\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{V})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m\dot{\vec{V}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{dx_\alpha}{dt} = m\dot{\vec{V}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

здесь учтено, что $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t),t)$ зависит от t явно и через $\vec{r}(t)$.

Выписываем уравнения Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\dot{\vec{V}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{\nabla}\varphi + q(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - q\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{V})$$

т.е.

$$m\dot{\vec{V}} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + q[\vec{V}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}]] = \underbrace{q\vec{E} + q[\vec{V}\times\vec{B}]}_{=\vec{F}_{Лор} = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_{м}}$$

Получили, как видно, правильные уравнения движения заряженной частицы в поле – с силой Лоренца!!

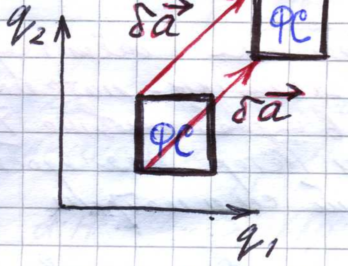
§ 2. Преобразования симметрии физических систем.

Преобразования симметрии физических систем играют очень важную роль в физике, с их помощью анализ физических явлений значительно упрощается.

При рассмотрении преобразований симметрии возможны активная и пассивная точки зрения.

Активная точка зрения.

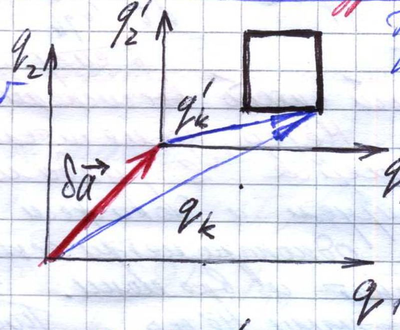
Преобразованию подвергается сама физич. система, система координат при этом не изменяется



$$q_k \rightarrow q_k' = q_k + \delta a_k$$

В рассм. примере сдвигается, транслируется в пр-ве физич. система.

Пассивная точка зрения.



Преобразованию подвергается система координат, физическая система не изменяется

$$q_k \rightarrow q_k' = q_k - \delta a_k$$

В рассм. примере сдвигается, транслируется в пространстве система координат

Ясно, что преобразования координат (в данном примере трансляции в пространстве) в активной и пассивной точках зрения отличаются знаком $\pm \delta a_k$ параметра трансляции.

Мы будем придерживаться активной точки зрения на преобразования симметрии. Примем следующее рабочее определение преобразования симметрии.

Определение. Преобразование координат и времени системы

$$q_k \rightarrow q_k', \quad t \rightarrow t'$$

при которых исходные координаты q_k и время t становятся функциями новых координат и времени, т.е.

$$q_k = q_k(q', t'), \quad t = t(q', t')$$

называется преобразованием симметрии механической (динамической) системы, если действие, характеризующее систему $S[q]$, не изменяется, то есть

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\,dt \;\xrightarrow[t \to t(q', t')]{q_k \to q_k(q', t')}\; \int_{t_1'}^{t_2'} \boxed{L(q(q', t'), \dot q(q', t'), t(q', t'))\frac{dt}{dt'}}\,dt' \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \int_{t_1'}^{t_2'} L'(q', \dot q', t')\,dt' \;\xrightarrow[\text{соотв. с опред. симметрии}]{\text{потребуем в}}\; \int_{t_1'}^{t_2'} \left[L(q', \dot q', t') + \frac{d\Lambda}{dt'}(q', t')\right] dt'$$

Из приведенного определения следует характеристическое условие, которому должен удовлетворять лагранжиан системы

$$\left(\times \frac{dt'}{dt}\right) \rightarrow L(q, \dot q, t)\frac{dt}{dt'} = \left[L(q', \dot q', t') + \frac{d\Lambda}{dt'}(q', t')\right] \leftarrow \left(\times \frac{dt'}{dt}\right)$$

или эквивалентно (после умножения на dt'/dt)

NB
$$\boxed{L(q, \dot q, t) = L(q', \dot q', t')\frac{dt'}{dt} + \frac{d\Lambda}{dt}(q, t)}$$
характеристическое свойство преобразования симметрии.

§ 3. Теорема Эмми Нётер и её применения к вычислению интегралов движения.

Основываясь на характеристическом свойстве преобразований симметрии, покажем, как вычисляются интегралы движения системы, т.е. величины, не уменяющиеся со временем.

Определение. Функция $I = I(q, \dot q, t)$ обобщенных координат, скоростей и времени называется интегралом движения, если

$$\frac{dI}{dt} = 0, \text{ т.е. } \Longrightarrow I = I(q, \dot q, t) = \text{const}.$$

Ясно, что циклическим координатам, для которых $\partial L/\partial q_k = 0$, соответствуют законы сохранения обобщенных импульсов, так как

$$\frac{d}{dt} p_k \overset{df}{=} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\text{в силу ур-ний Лагранжа}} = 0 \Rightarrow p_k = \text{const}.$$

Регулярный способ вычисления интегралов движения даёт теорема Эмми Нётер, замечательной немецкой женщины-математика, трудившейся в фундаментальной науке, в первой половине XX века. Сформулируем и докажем теорему Эмми Нётер для простого случая однопараметрических преобразований симметрии координат и времени.

Теорема Эмми Нётер. Пусть преобразования координат и времени — однопараметрические преобразования с параметром $\varepsilon \to 0$ вида

$$\left.\begin{aligned} q_k \to q_k' &= q_k + \varepsilon f_k(q, t), \\ t \to t' &= t + \varepsilon h(q, t) \end{aligned}\right| \varepsilon \to 0 \qquad 1 \le k \le f$$

являются преобразованиями симметрии системы, тогда выражение

$$I = \sum p_k \delta q_k - H\delta t + \delta\Lambda = \text{const}$$

есть интеграл движения системы, в последнем выражении

$$\delta q_k = \varepsilon f_k, \quad \delta t = \varepsilon h, \quad \delta\Lambda = \varepsilon\lambda \text{ - некот. ф-ция}$$

$$1 \le k \le f$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot q_k p_k - L \text{ — гамильтониан системы}$$

$$\delta\Lambda = \varepsilon\lambda(q, t) \text{ — подходящим образом подобранная ф-ция}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы Э. Нётер воспользуемся характеристическим свойством (условием) преобразования симметрии, сформулированным в предыдущем разделе

$$L(q, \dot q, t) = L(q', \dot q', t')\frac{dt'}{dt} + \frac{d\Lambda(q, t)}{dt}$$

Применим последнее условие к инфинитезимальному (бесконечно малому) преобразованию симметрии координат и времени, т.е.

$$q_k' = q_k + \varepsilon f_k(q, t), \; t' = t + \varepsilon h(q, t), \quad \varepsilon \to 0, \; \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d\delta\Lambda}{dt}$$

Имеем в результате простых, но несколько кропотливых, вычислений

$$L(q, \dot q, t) = L\left(q_k + \varepsilon f_k, \frac{d(q_k + \varepsilon f_k)}{d(t + \varepsilon h)}, t + \varepsilon h\right)\frac{d(t + \varepsilon h)}{dt} + \frac{d\delta\Lambda}{dt} =$$

$$= \left[L(q, \dot q, t) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\varepsilon f_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\varepsilon(\dot f_k - \dot h\dot q_k) + \frac{\partial L}{\partial t}\varepsilon h\right](1 + \varepsilon\dot h)$$

здесь использовались соотношения

$$\frac{d(q_k + \varepsilon f_k)}{d(t + \varepsilon h)} = \frac{\dot q_k + \varepsilon \dot f_k}{1 + \varepsilon \dot h} \simeq \dot q_k + \varepsilon(\dot f_k - \dot h\dot q_k); \quad \frac{d(t + \varepsilon h)}{dt} = 1 + \varepsilon\dot h$$

то есть

$$\cancel{L} = \cancel{L} + L\varepsilon\dot{h} + \varepsilon\sum_k \overset{\dot{p}_k}{\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k}}} \cdot f_k + \varepsilon\sum_k \overset{p_k}{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}}(\dot{f}_k - \dot{h}\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t}\varepsilon h + \frac{d\delta\Lambda}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_k p_k \varepsilon f_k\right) - \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L\right)\varepsilon\dot{h} + \frac{\partial L}{\partial t}\varepsilon h + \frac{d\delta\Lambda}{dt} = 0$$

Для завершения доказательства осталось сделать ещё один шаг. Этот шаг связан с определением функции Гамильтона и её свойств:

$$H \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L$$ — определение ф-ции Гамильтона

Можно доказать, что функция Гамильтона является функцией координат q_k, импульсов p_k и времени t, в самом деле

$$dH = \sum_{k=1}^{f}(dp_k)\dot{q}_k + \cancel{\sum_{k=1}^{f} p_k d\dot{q}_k} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k - \cancel{\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$\Rightarrow$ последнее выражение для dH как раз и утвер-ет,дает, что

$$H = H(q, p, t) \quad \text{и} \quad \frac{dH}{dt} = \cancel{\sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k} - \cancel{\sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Учитывая последнее равенство, $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, окончательно получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k p_k \varepsilon f_k - H\varepsilon h + \delta\Lambda\right) = 0,$$ то есть

$$\Rightarrow \boxed{\sum_k p_k \delta q_k - H\delta t + \delta\Lambda = \text{const}}$$

величина, определяемая полученным выражением, является инт. движения.

§4 Простые применения теоремы Эмми Нётер

Рассмотрим простые примеры использования теоремы Э. Нётер для определения интегралов движения.

Пример 1 Система N частиц с лагранжианом

$$L = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\vec{r}}_k^{\,2}}{2} - \sum_{i<j} U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

При трансляции системы в пространстве на величину $\delta\vec{a}$:

$$\vec{r}_k \to \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k + \delta\vec{a}, \quad \vec{v}_k \to \vec{v}_k{}' = \vec{v}_k, \quad \vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_j,$$

то есть трансляциях системы в пространстве её лагранжиан вообще не изменяется, кроме того $\delta t = 0$ и $\delta\Lambda = 0$

обычно изменение $\delta\Lambda$ происходит от изменения лагранжиана.

Применяя теорему Э. Нётер, получаем:

$$\sum_k p_k \delta q_k - \cancel{H\delta t}^{\,0} + \cancel{\delta\Lambda}^{\,0} = \sum \vec{p}_k \cdot \delta\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}} \xRightarrow{\forall \delta\vec{a}} \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \overrightarrow{\text{const}}$$

Если система не изм. при трансляциях вдоль одного направления

$\delta\vec{a} = \delta a\,\vec{n}$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, то сохраняется, очевидно, проекция суммарного импульса системы на направление $\vec{n}$:

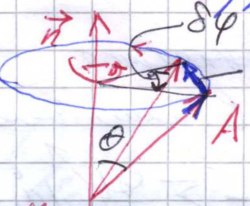
$$\vec{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}\vec{p}_k\right) = \text{const}.$$

Пример 2. Система N частиц с лагранжианом

$$L=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\dot{\vec r}_k^{\,2}}{2}-\sum_{i<j}U(|\vec r_i-\vec r_j|)$$

Отличие от случая, рассмотренного в примере 2 в том, что в текущем примере частицы взаимодействуют посредством центральных сил, т.е. $U(|\vec r_i-\vec r_j|)$ зависит от модуля $|\vec r_i-\vec r_j|$. Далее потребуется следующая лемма.

Лемма. Закон изменения векторной величины при повороте вокруг фиксированной оси на угол $\delta\varphi\,\vec n=\delta\vec\varphi$:



$$|\delta\vec A|=|\vec A|\sin\theta\,\delta\varphi=|[\delta\vec\varphi\times\vec A]|$$

$$\Longrightarrow\quad \delta\vec A=[\delta\vec\varphi\times\vec A]$$

Напомним, что мы придерживаемся активной точки зрения на преобразования симметрии.

Повернём систему частиц на угол $\delta\vec\varphi=\vec n\,\delta\varphi$ вокруг оси $\vec n$, при этом

$$\vec V_k\longrightarrow\vec V_k'=\vec V_k+[\delta\vec\varphi\times\vec V_k],\ \Rightarrow\ \delta\vec V_k^{\,2}=2\vec V_k\,\delta\vec V_k=2\vec V_k[\delta\vec\varphi\times$$

$$\delta\vec V_k=[\delta\vec\varphi\times\vec V_k];$$

Задача: убедитесь в том, что $\dfrac{\partial r_{ij}}{\partial\vec r_{ij}}=\dfrac{\vec r_{ij}}{r_{ij}}$

$$\vec r_k\to\vec r_k'=\vec r_k+[\delta\vec\varphi\times\vec r_k];\ \Rightarrow\ \delta U=\sum_{i<j}\frac{\partial U}{\partial\vec r_{ij}}\delta\vec r_{ij}=$$

$$\delta\vec r_k=[\delta\vec\varphi\times\vec r_k],$$

$$\delta(\vec r_k-\vec r_j)=[\delta\vec\varphi\times(\vec r_k-\vec r_j)].\qquad =\sum_{i<j}\frac{\partial U}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial\vec r_{ij}}\delta\vec r_{ij}=$$

$$\vec r_{ij}\,\delta\vec r_{ij}=\vec r_{ij}\cdot[\delta\vec\varphi\times\vec r_{ij}]=0\ \Rightarrow\ =\sum_{i<j}\frac{\partial U}{\partial r_{ij}}\frac{\vec r_{ij}\cdot\delta\vec r_{ij}}{r_{ij}}=$$

В силу проведенных выкладок лагранжиан системы не изменяется, поэтому поворот системы на угол $\delta\vec\varphi$ следует считать преобразованием симметрии и согласно теореме Э. Нётер сохраняется следующая величина

$$const=\sum_{k=1}^{N}\vec p_k\,\delta\vec r_k-H\cancel{\delta t}^{\,0}+\cancel{\delta\Lambda}^{\,0}=\sum_{k=1}^{N}\vec p_k\cdot[\delta\vec\varphi\times\vec r_k]=\sum_{k=1}^{N}\delta\vec\varphi\cdot[\vec r_k$$

$$\Longrightarrow\ \delta\vec\varphi\cdot\sum_{k=1}^{N}[\vec r_k\times\vec p_k]=const\ \xRightarrow{\forall\,\delta\vec\varphi}\ \sum_{k=1}^{N}[\vec r_k\times\vec p_k]=\overrightarrow{const}$$

Если же система инвариантна относительно вращений вокруг определенной оси $\vec n$, то сохраняется проекция момента импульса на это направление:

$$\vec n\,\delta\varphi\cdot\sum_{k=1}^{N}[\vec r_k\times\vec p_k]=const\ \xrightarrow{\ \vec n\text{ — фиксиров.}\ }$$

$$\Longrightarrow\ \vec n\cdot\sum_{k=1}^{N}[\vec r_k\times\vec p_k]=const.$$

Другие примеры определения интегралов движения для разл. механич. систем будут рассмотрены на практических занятиях.