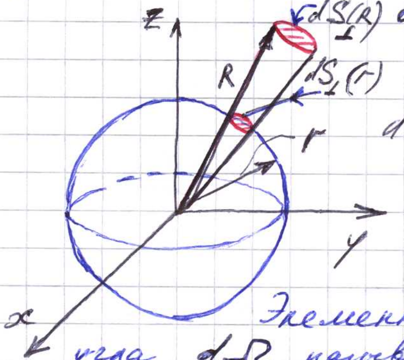
Лекция 5. Элементы телесного угла и площади. Поток векторного поля. Закон Гаусса и его применения. Дифференциальные операции над полями.

§1. Элементы телесного угла и площади. Поток векторного поля.

Для вывода уравнений, которым удовлетворяют поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$, нам потребуются некоторые математические средства. Введём для начала понятия элемента телесного угла и элемента площади.

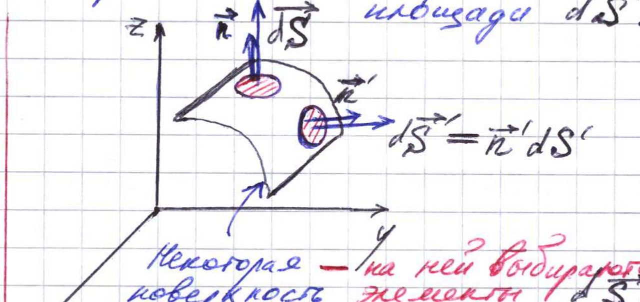
Определение Элемент телесного угла $d\Omega$:



$$d\Omega \overset{def}{=} \frac{dS_\perp(r)}{r^2} = \frac{dS_\perp(R)}{R^2}$$

Элементом телесного угла $d\Omega$ называется отношение элемента площади $dS_\perp(r)$, перпендикулярного $\vec{r}$, к r^2, это отношение не зависит от того, на каком расстоянии выбирается $dS_\perp$.

Определение Вектор элемента площади $d\vec{S}$.



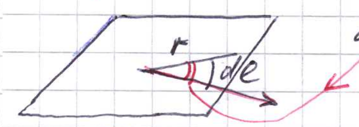
Некоторая поверхность — на ней выбираются элементы $d\vec{S}$.

Вектором элемента поверхности $d\vec{S}$ называется произведение вектора нормали $\vec{n}$ (в том месте, где выбирается данный элемент $d\vec{S}$) на величину $|d\vec{S}| = dS$: $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$.

Интегрируя по сфере радиуса r, легко получаем полный телесный угол:

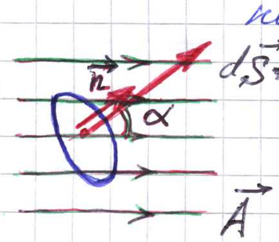
$$\Omega_{полн} = \oint \frac{dS_\perp(r)}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi = \oint \frac{dS_\perp(R)}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Сравните с определением элемента угла на плоскости:



$$d\varphi = \frac{dl}{r}, \quad \varphi_{полн} = \oint \frac{dl}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Определение Элементарный поток $d\Phi_A$ векторного поля $\vec{A}$ через элемент поверхности $d\vec{S}$ определяется как скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $d\vec{S}$:



$d\vec{S} = \vec{n}\, dS$

$$d\Phi_A = \vec{A}\cdot d\vec{S} = |\vec{A}|\cdot dS\cdot \cos(\vec{A}, \vec{n}) = A_n\, dS$$

$A_n = |\vec{A}|\cos(\vec{n}, \vec{A})$ — проекция вектора $\vec{A}$ поля на нормаль $\vec{n}$ к площадке

Очевидно, элементарный поток поля может иметь любой знак, может также равняться нулю:

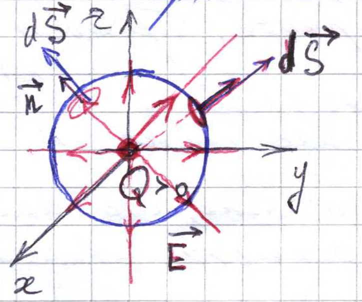
$$d\Phi_A = \begin{cases} |\vec{A}|\, dS \cos\alpha > 0, & \alpha = (\vec{n}, \vec{A}) < 90^\circ; \\ |\vec{A}|\, dS \cos\alpha < 0, & \alpha > 90^\circ; \\ 0, \text{ при } \vec{A} \perp d\vec{S} \end{cases}$$

Поток $d\Phi_A = 0$, когда линии поля $\vec{A}$ скользят вдоль поверхности, не пересекая её.

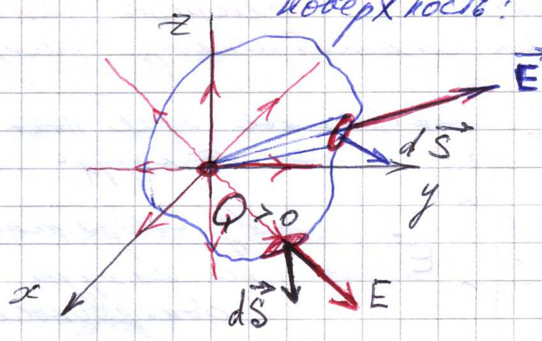
Приведём примеры вычисления потока поля.

Пример 1 Поток электрического поля точечного заряда через замкнутую поверхность, окружающую заряд.

Поток через сферическую поверхность:



Поток через произвольную поверхность:



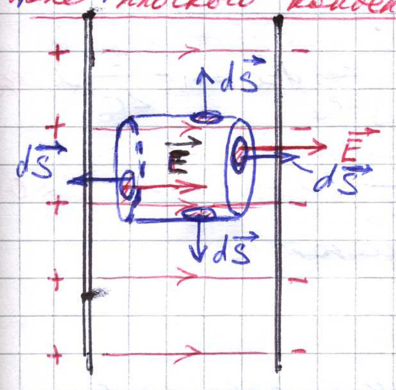
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = kQ\oint \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = kQ\oint \frac{dS_\perp(r)}{r^2} = 4\pi kQ = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = kQ\oint \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = kQ\oint \frac{dS_\perp(r)}{r^2} = kQ\oint d\Omega = 4\pi kQ = Q/\varepsilon_0.$$

Видно, что поток поля $\vec{E}$ не зависит от формы замкнутой поверхности, определяется лишь величиной заряда, находящегося внутри поверхности.

Пример 2 Поток однородного поля через замкнутую поверхность — для примера цилиндрическую.

Поле плоского конденсатора



$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \Delta\Phi_E^{(боков)} + \Delta\Phi_E^{(справа)} + \Delta\Phi_E^{(слева)} = 0$$

$$\Delta\Phi_E^{(боков)} = \int\limits_{(боков.\ пов\text{-}ть)} \vec{E}\,d\vec{S} = 0, \text{ т.к. } \vec{E}\perp d\vec{S}$$

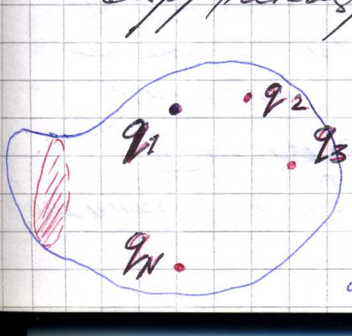
$$\Delta\Phi_E^{(справа)} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot S, \quad \Delta\Phi_E^{(слева)} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = -ES$$

Можно приводить и другие примеры, но мы обратимся к формулировке закона Гаусса для электростатического поля.

§2. Закон Гаусса для электростатических полей и его применения для расчета полей.

Пользуясь результатом примера 1 для потока поля $\vec{E}$ точечного заряда через произвольную замкнутую поверхность, окружающую заряд, а также принципом суперпозиции для электрических полей, легко получить общий закон для потока поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность, окружающую систему зарядов:

$$\vec{E}_{рез} = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k$$



$$\oint \vec{E}_{рез}\cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N} \oint \vec{E}_k\cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{\varepsilon_0} = \frac{q_{total}}{\varepsilon_0}$$

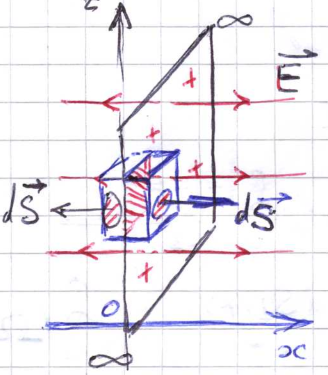
Закон Гаусса

Поток электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, окружающую систему зарядов, равен алгебраической сумме зарядов внутри / ε_0.

Приведем примеры использования закона Гаусса для расчёта электростатических полей различных систем электрич. зарядов.

Закон Гаусса является интегральным законом, успех его применения зависит от возможности вычисления потока электрического поля через замкнутую поверхность, выбираемую соответствующим образом в конкретной задаче. С помощью закона Гаусса легко рассчитываются поля симметричных распределений зарядов. Приведём примеры.

Пример 1 Электрическое поле равномерно заряженной, с поверхностной плотностью σ Кл/м², бесконечной плоскости.



Из соображений симметрии ясно, что поле $\vec E$, по каждую из сторон плоскости, является однородным.

Вычислим поток поля через небольшой параллелепипед, окружающий поверхность с двух сторон:

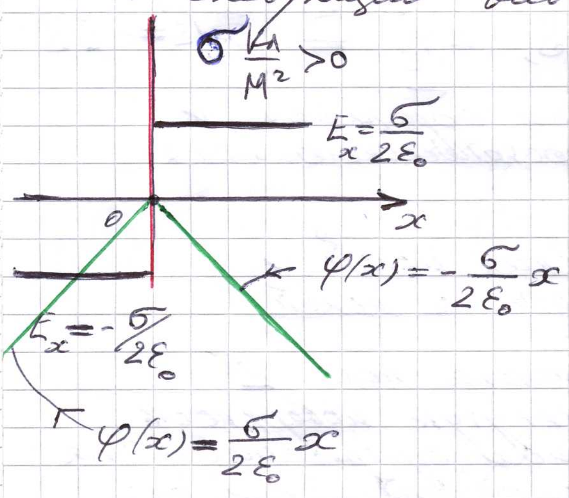
$$\oint \vec E\cdot d\vec S = \Delta\Phi_E^{(\text{справа})} + \Delta\Phi_E^{(\text{слева})} = E\cdot S + E\cdot S = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = |\vec E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

По формуле, связывающей потенциал с напряженностью поля, легко рассчитать и потенциал $\varphi(x)$:

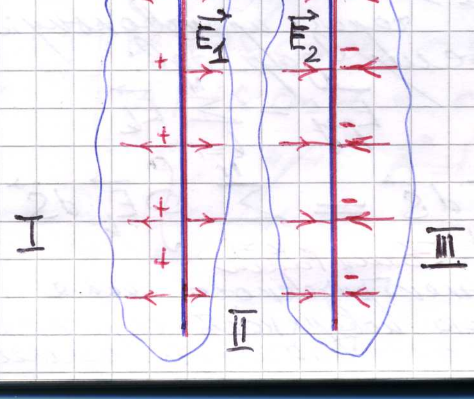
$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \longrightarrow \varphi(x) = \begin{cases} -\int E_x\,dx = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x \geq 0 \\ -\int E_x\,dx = \int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Графики поля $E_x(x)$ и потенциала $\varphi(x)$ имеют следующий вид:



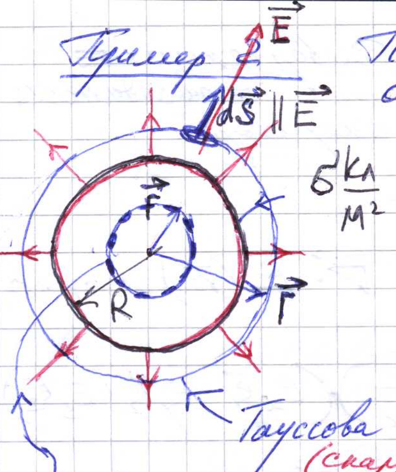
Задача Рассчитайте, пользуясь принципом суперпозиции, электрическое поле двух равномерно заряженных противоположными по знаку зарядами бесконечных плоскостей.

Указание! "Наложите" друг на друга поля двух плоскостей.



Какие поля возникнут при наложении в областях I и III слева и справа от двух пластин, в области II между пластинами?

Пример 2. Поле тонкой равномерно заряженной сферической оболочки радиуса R.



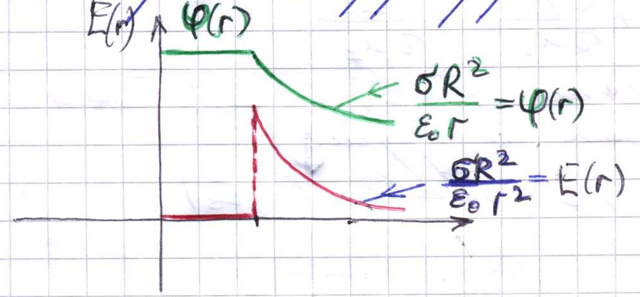
Поле при $r \geq R$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$

$$\rightarrow E(r) = \frac{\sigma R^2}{r^2 \varepsilon_0}$$

Поле при $r < R$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = 0 \rightarrow \vec{E} = 0.$

Гауссова поверхность, по которой производится интегрирование. (снаружи)

Воображаемая Гауссова поверхность внутри сферы.



По вычисленному полю $\vec{E}(r)$ легко рассчитывается и потенциал $\varphi(r)$:

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}, \rightarrow \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = \begin{cases} \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}, & r \geq R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}, & r \leq R \end{cases}$$

Другие примеры расчетов полей $\vec{E}$ с помощью закона Гаусса будут рассмотрены на практич. занятиях.

§2. Дифференциальные операции градиент, дивергенция и ротор с физическими полями.

Рассмотрим несколько важных для изложения теории электромагнитного поля дифференциальных операций с физическими полями: $\varphi(\vec{r})$ — полем скалярного потенциала, и полем $\vec{E}(\vec{r})$ — электрическим полем, для примера.

1°. Операция градиент. Вычислим изменение скалярного потенциала, скажем, электрического поля, при переходе из точки $\vec{r}$ в точку с $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, при этом считая $\Delta\vec{r} \to 0$:

$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r} + \Delta r) - \varphi(\vec{r}) \cong \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z \overset{def}{=} (\vec{\nabla}\varphi, \Delta\vec{r}) \overset{def}{=} \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{r}$$

Здесь $(\vec{\nabla}\varphi, \Delta\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{r}$ — скалярное произведение двух трёхвекторов

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \vec{e}_1 \Delta x + \vec{e}_2 \Delta y + \vec{e}_3 \Delta z,$$

и

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и вектора $\vec{\nabla}\varphi$ градиента φ.

NB — обратите внимание:

$$\underbrace{\Delta\varphi}_{скаляр} \cong (\vec{\nabla}\varphi, \Delta\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi \cdot \underbrace{\Delta\vec{r}}_{3^х\text{-вектор}}$$

NB

При $\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$:

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla}\varphi, d\vec{r})$$

точное равенство.

поэтому $\vec{\nabla}\varphi$ — также $3^х$ вектор.

$\vec{\nabla}\varphi = \overrightarrow{grad}\,\varphi$ — операция градиент φ!

Резюме: посредством операции градиент $\vec{\nabla}$ любому скалярному полю $\varphi(r)$ можно сопоставить векторное поле $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

2°. Формальное определение операции дивергенция ≡ ≡ расходимость

Используя операцию градиент, т.е. оператор

$$\vec\nabla = \vec e_1\frac{\partial}{\partial x}+\vec e_2\frac{\partial}{\partial y}+\vec e_3\frac{\partial}{\partial z},$$

посредством скалярного произведения $\vec\nabla\cdot\vec E(\vec r)$ можно определить операцию дивергенция

$$\vec\nabla\cdot\vec E \overset{def}{=} \operatorname{div}\vec E \overset{def}{=\!=} \left(\vec e_1\frac{\partial}{\partial x}+\vec e_2\frac{\partial}{\partial y}+\vec e_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(E_x\vec e_1+E_y\vec e_2+E_3\vec e_3\right)$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}$$

Замечание Наряду с обозначениями $\vec E=(E_x, E_y, E_z)$ будем часто использовать и другие:

$$\vec\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \Rightarrow \vec\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right); \quad \vec E=(E_1, E_2, E_3)$$

3°. Формальное определение операции ротор ≡ вихрь.

Используя операцию градиент $\vec\nabla$ и векторное поле $\vec E$ можно формально определить операцию ротор, т.е. из $\vec E(\vec r)$ получить другое векторное поле $[\vec\nabla\times\vec E(\vec r)]$:

$$[\vec\nabla\times\vec E(\vec r)] \overset{def}{=} \operatorname{rot}\vec E \overset{def}{=\!=} \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x, & E_y, & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec e_1, & \vec e_2, & \vec e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_1, & E_2, & E_3 \end{vmatrix}$$

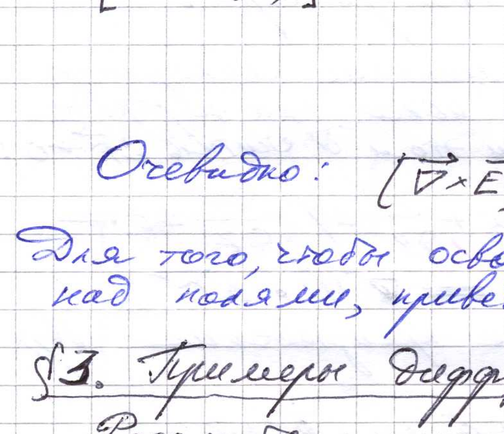
Очевидно: $[\vec\nabla\times\vec E]_1 = \frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}$, $[\vec\nabla\times\vec E]_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}$ и т.д.

Для того, чтобы освоится с дифференциальными операциями над полями, приведём несколько примеров.

§3. Примеры дифференциальных операций над полями.

Рассмотрим несколько примеров воображаемых (абстракт[ных]) полей и применим введённые дифференциальные операц[ии] к этим полям.

Задача 1 Получите векторное поле $\vec V(\vec r)$ скоростей точек тонкого, вращающегося с постоянной скоро[стью] $\vec\omega = \mathrm{Const}$ диска, диск – тонкий.



Очевидно, скорость $V(\vec r)$ точки $\vec r$ на диск[е] определяется формулой:

$$\vec V(\vec r) = [\vec\omega\times\vec r]$$ – см. семестр „Механика"

– эта формула как раз и задаёт поле скоростей точек диска с координатами

Линии поля скоростей (аналоги силовых линий) показаны синим цветом.

Попробуем применить к полученному полю $\vec{V}(\vec{r}) = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$ операции ротор и дивергенцию:

$$[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(А) $$[\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r})] = \operatorname{rot}\vec{V} = [\vec{\nabla}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] =$$

$$= \vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{r} = [\vec{\nabla}_{(r)}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

← метка (r) указывает, что $\vec{\nabla}$ действует на $\vec{r}$, $\vec{\omega} = \mathrm{const}$

В рассматриваемом случае тонкого диска $\vec{r} = (x, y, z) = (x, y, 0)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, поэтому

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2, \quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})\vec{r} = \omega\frac{\partial}{\partial z}\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r})] = 2\vec{\omega} \neq 0$$ – характеризует т.н. вихревое поле

(Б) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \vec{\nabla}_r\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \vec{\omega}\cdot[\vec{r}\times\vec{\nabla}_r] =$$

$$= -\vec{\omega}\cdot[\vec{\nabla}_r\times\vec{r}] = -\vec{\omega}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{r}] = 0,$$

т.к.

$$[\vec{\nabla}\times\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Задача 2 Получите силовое поле центробежных сил во вращающейся центрифуге.

Ответ: согласно рассмотрению движения мат. частиц в неинерциальных системах отсчета, см. семестр 1, курс „Механика", во вращающейся с $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ центрифуге на частицу массы m действует центробежная сила

$$\vec{F}_{ц.б} = m\omega^2\vec{r} = k\vec{r},$$

направленная от центра (оси вращения центрифуги) по радиусу, потенц. энергия, соотв. $\vec{F}_{ц.б.}$ имеет вид:

$$U_{ц.б} = -\int \vec{F}_{ц.б}\cdot d\vec{r} = -\int F_{ц.б}\,dr = -m\omega^2 r^2/2$$

Выражение

$$\vec{F}_{ц.б}(\vec{r}) = k\vec{r},$$

как говорят, задаёт поле центробежных сил. Применим к этому полю операции ротор и дивергенцию.

(А) $$[\vec{\nabla}\times k\vec{r}] = 0 \qquad \vec{F} = k\vec{r} = k(x, y)$$ – „плоское" „поле скоростей"

(Б) $$\vec{\nabla}\cdot k\vec{r} = k\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2k \neq 0.$$ – характеризует т.н. безвихревое поле.