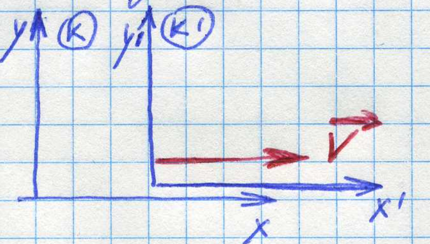
Лекция 4. Преобразования Лоренца для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$. Инварианты из полей $\vec{B}\cdot\vec{E} = inv$, $\vec{E}^2/c^2 - \vec{B}^2 = inv$. Движение заряженных частиц в электромагн. поле.

§1. Преобразования Лоренца для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$.



в ИСО (K):

$$\frac{dp}{d\tau} = qFu$$

в ИСО (K'):

$$\frac{dp'}{d\tau} = qF'u'$$

$$p' = Lp, \quad u = L^T u'$$

$$\rightarrow L\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp'}{d\tau} = qLFL^T u' \overset{def}{=} qF'u'$$

Как было получено в прошлой лекции, закон преобразования матрицы $F^\mu{}_\nu$ из полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$, имеет вид:

$$F' = LFL^T,$$

или, расписывая в компонентах

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau} \Leftarrow L^\mu{}_\sigma F^{\sigma\tau}(L^T)_\tau{}^\nu = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

здесь, по соглашению Эйнштейна, по повторяющимся индексам σ, τ идёт суммирование!

Вместо смешанного тензора $F^\mu{}_\nu$ удобнее использовать контравариантный $F^{\mu\nu}$ или ковариантный $F_{\mu\nu}$ тензоры второго ранга:

$$F^\mu{}_\nu \rightarrow F^{\mu\nu} \overset{def}{=} g^{\nu\sigma} F^\mu{}_\sigma \leftarrow \text{получается операцией поднимания индекса}$$

$$F^\mu{}_\nu \rightarrow F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} F^\sigma{}_\nu \leftarrow \text{получается операцией опускания индекса.}$$

Как было установлено в предыдущей лекции:

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \underset{1\times 1}{0} & \underset{1\times 3}{\frac{\vec{E}}{c}} \\ \underset{3\times 1}{\frac{\vec{E}}{c}} & \underset{\text{блок}}{\overset{3\times 3}{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma}} \end{pmatrix} \Longrightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & \underset{1\times 3}{-\frac{\vec{E}}{c}} \\ \underset{3\times 1}{\frac{\vec{E}}{c},} & \underset{\text{блок}}{\overset{3\times 3}{-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{E_1}{c}, & -\frac{E_2}{c}, & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & \vec{E}/c \\ -\frac{\vec{E}}{c}, & -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \frac{E_1}{c}, & \frac{E_2}{c}, & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, тензоры $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ являются антисимметричными тензорами:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Подчеркнем, что тензорные величины могут быть определены и определяются в физике, посредством их законов преобразования при переходе от (K) к (K').

$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau}$ $\underbrace{\text{преобразуется}}_{\text{как}}$ $x'^\mu = L^\mu{}_\sigma x^\sigma,\ x'^\nu = L^\nu{}_\tau x^\tau$

$\underline{T'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau T^{\sigma\tau}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x'^\mu x'^\nu = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau x^\sigma x^\tau.}_{\text{Закон преобразования контравар. тензора 2}^{\text{го}}\text{ ранга}}$

Для любого тензора 2^го ранга, контравариантного

Совершенно аналогично:

$F'_{\mu\nu} = L_\mu{}^\sigma L_\nu{}^\tau F_{\sigma\tau}$ $\underbrace{\text{преобразуется}}_{\text{как}}$ $x'_\mu = L_\mu{}^\sigma x_\sigma,\ x'_\nu = L_\nu{}^\tau x_\tau$

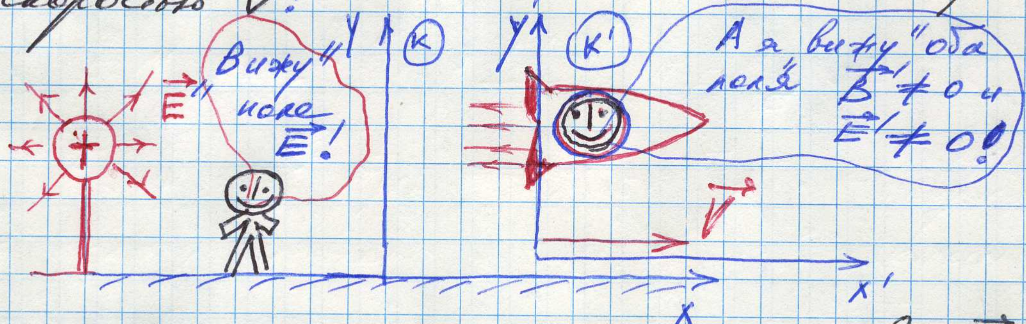
$\underline{T'_{\mu\nu} = L_\mu{}^\sigma L_\nu{}^\tau T_{\sigma\tau}}$ $\rightarrow$ $x'_\mu x'_\nu = L_\mu{}^\sigma x_\sigma L_\nu{}^\tau x_\tau = L_\mu{}^\sigma L_\nu{}^\tau x_\sigma x_\tau$

Для любого ковариантного тензора второго ранга

Далее, принимая во внимание вид тензора $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля и матрицы пр. Лоренца $L^\mu{}_\nu$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{E_1}{c}, & -\frac{E_2}{c}, & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим законы преобразования полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ при переходе от ИСО (K) к ИСО (K'), движущейся отн. (K) со скоростью V:



Имеем для различных компонент полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$:

$$B'_1 = F'^{32} = L^3{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau} = L^3{}_3 L^2{}_2 F^{32} = F^{32} = B_1,$$

$$E'_1 = c\cdot F'^{10} = c L^1{}_\sigma L^0{}_\tau F^{\sigma\tau} = c L^1{}_0 L^0{}_\tau F^{0\tau} + c L^1{}_1 L^0{}_\tau F^{1\tau} =$$

$$= c(-\beta\gamma) L^0{}_1 F^{01} + c\gamma L^0{}_0 F^{10} =$$

$$= -c\beta^2\gamma^2 \frac{E_1}{c} + c\gamma\cdot\gamma\frac{E_1}{c} = E_1\gamma^2(1-\beta^2) = E_1.$$

Продольные составляющие полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$, т.е. проекции полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ на направление движения (K'), т.е. на ось X, X', не преобразуются:

$$B'_1 = B_1, \quad E'_1 = E_1.$$

Займёмся теперь поперечными $\vec{B}_\perp$ и $\vec{E}_\perp$ составляющими полей, т.е. компонентами полей, расположенными перпендикулярно скорости $\vec{V}$ движения (K').

$$B'_2 = F'^{13} = L^1{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau} = L^1{}_\sigma L^3{}_3 F^{\sigma 3} = L^1{}_0 F^{03} + L^1{}_1 F^{13}$$
$$= \gamma B_2 + \beta\gamma E_3/c = \gamma\left(B_2 + \frac{V}{c^2} E_3\right),$$

аналогично

$$B'_3 = F'^{21} = L^2{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau} = L^2{}_2 L^1{}_\tau F^{2\tau} = L^1{}_1 F^{21} + L^1{}_0 F^{20} =$$
$$= \gamma B_3 - \beta\gamma E_2/c = \gamma\left(B_3 - \frac{V}{c^2} E_2\right).$$

Точно также могут быть вычислены формулы, выражающие E'_2 и E'_3 через E_2, E_3 и B_2, B_3:

$$E'_2 = cF'^{20} = cL^2{}_\sigma L^0{}_\tau F^{\sigma\tau} = cL^2{}_2 L^0{}_\tau F^{2\tau} = cL^0{}_\tau F^{2\tau} =$$
$$= cL^0{}_0 F^{20} + cL^0{}_1 F^{21} = c\gamma \frac{E_2}{c} - c\beta\gamma B_3 =$$
$$= \gamma(E_2 - VB_3),$$

аналогично

$$E'_3 = cF'^{30} = cL^3{}_\sigma L^0{}_\tau F^{\sigma\tau} = cL^3{}_3 L^0{}_\tau F^{3\tau} = cL^0{}_\tau F^{3\tau}$$
$$= cL^0{}_0 F^{30} + cL^0{}_1 F^{31} = \gamma E_3 - c\beta\gamma(-B_2)$$
$$= \gamma(E_3 + VB_2).$$

Учитывая, что

$$\vec{V}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ V & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_2(-VB_3) + \vec{e}_3 VB_2 = [\vec{V}\times\vec{B}_\perp],$$

$$\vec{B}_\perp\cdot\vec{V} = 0, \quad \vec{E}_\perp\cdot\vec{V} = 0.$$

и

$$\vec{V}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ V & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_2(-VE_3) + \vec{e}_3 VE_2 = [\vec{V}\times\vec{E}_\perp],$$

полученные выше формулы переписываются в следующей форме:

$$\vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_\perp]\right), \quad \vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + [\vec{V}\times\vec{B}_\perp]\right)$$

в то же время продольные составляющие полей не изменяются:

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \quad \vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel.$$

§2. Инварианты из полей.

Из полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ можно образовать инвариантные относительно преобразований Лоренца величины, т.е. инварианты из полей. Покажем, как это делается.

Инвариантные объекты можно получать, образуя скалярное произведение 4^x векторов, а также образуя свертки из тензоров:

$$inv = A\cdot B = A'^{\mu} B'_{\mu} = L^{\mu}{}_{\sigma} L_{\mu}{}^{\tau} A^{\sigma} B_{\tau} =$$

$$= (L^T)^{\tau}{}_{\mu} L^{\mu}{}_{\sigma} A^{\sigma} B_{\tau} = \delta^{\tau}_{\sigma} A^{\sigma} B_{\tau} = A^{\sigma} B_{\sigma}$$

аналогично, можно доказать, что свертка двух тензоров $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, контравариантного и ковариантного тензоров второго ранга, по индексам μ и ν, есть инвариант:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = inv$$

Сумма по μ Сумма по ν

Задача
Докажите этот факт.
№3
Указание: используйте предыд. прием

Перемножая компоненты $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$ и складывая, получим, используя вид матриц $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right) = inv,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 = inv}$$

Можно доказать также, что скалярное произведение полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$, т.е. $\vec{B}\cdot\vec{E} = B_1E_1 + B_2E_2 + B_3E_3$ — обычное скалярное произведение двух трёхвекторов в Евклидовом пространстве, также является инвариантом преобразований Лоренца. Это мы проделаем непосредственным вычислением.

$$\vec{B}'\cdot\vec{E}' = \vec{B}'_{\parallel}\cdot\vec{E}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}\cdot\vec{E}'_{\perp} = \vec{B}_{\parallel}\cdot\vec{E}_{\parallel} + \gamma^2\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}]\right)\cdot\left(\vec{E}_{\perp} + [\vec{V}\times\vec{B}_{\perp}]\right)$$

$$= \vec{B}_{\parallel}\cdot\vec{E}_{\parallel} + \gamma^2\left(\vec{B}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}]\cdot[\vec{V}\times\vec{B}_{\perp}]\right) =$$

$$[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}]\cdot[\vec{V}\times\vec{B}_{\perp}] = \vec{V}\cdot[\vec{B}_{\perp}\times[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}]] = \vec{V}\cdot\left(\vec{V}(\vec{B}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\perp}) - \vec{E}_{\perp}\underbrace{(\vec{B}_{\perp}\cdot\vec{V})}_{0}\right) =$$

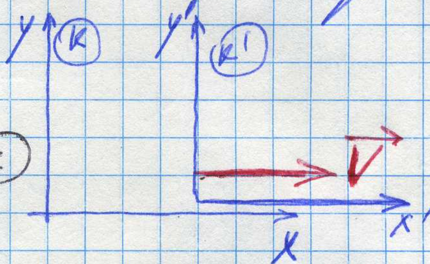
$$= \vec{V}^2\,\vec{B}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\perp}$$

$$= \vec{B}_{\parallel}\vec{E}_{\parallel} + \gamma^2\,\vec{B}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\perp}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \vec{B}_{\parallel}\vec{E}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}\vec{E}_{\perp} = \vec{B}\cdot\vec{E} = inv$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}\cdot\vec{E} = inv}$$

§3. Формула Био-Савара-Лапласа и её применение для расчёта магнитного поля кругового тока.

В первом разделе лекций была получена формула преобразования для магнитного поля $\vec{B}$ при переходе из (K) в (K'):



$$\vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}]\right)$$

Обратное преобразование из (K') в (K) имеет, очевидно, вид:

$$\vec{B}_\perp = \gamma\left(\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}']\right),$$

т.е. отличается от предыдущего знаком скорости $\vec{V} \Rightarrow -\vec{V}$.

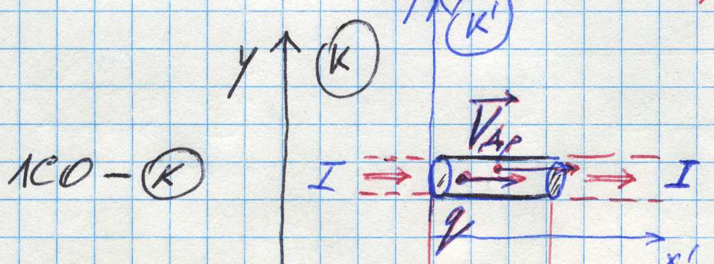
При малых скоростях $V/c \ll c$, в силу того, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \simeq 1$$

получаем приближенную формулу:

$$\vec{B}_\perp \approx \vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}'_\perp] = \vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}'].$$

Применим последнюю формулу для расчёта индукции магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемой элементом тока — отрезком $d\vec{l}$ прямолинейного куска провода, по которому течет ток с силой I Ампер.



Пусть скорость носителей заряда в куске провода равна $\vec{V}_{др}$ — некоторая дрейфовая скорость направленного движения зарядов. Свяжем с движущимися со скоростью $\vec{V}_{др}$ зарядами сопутствующую ИСО (K'). В системе (K') заряд q создает электрич. поле

поле от всех зарядов куска провода

$$\vec{B}' = 0; \quad \vec{E}' = kq\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = Nk\frac{q\vec{r}}{r^3} = n\Delta l S k\frac{q\vec{r}}{r^3}}$$

магнитное поле $\vec{B}' = 0$ при этом отсутствует.

Согласно формуле для преобразования полей, в системе (K) возникает магнитное поле

$$\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2} n\Delta l S k q\,[\vec{V}_{др}\times\vec{r}]/r^3$$

$$= \frac{I}{c^2}k\frac{[\Delta\vec{l}\times\vec{r}]}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}[\Delta\vec{l}\times\vec{r}]$$

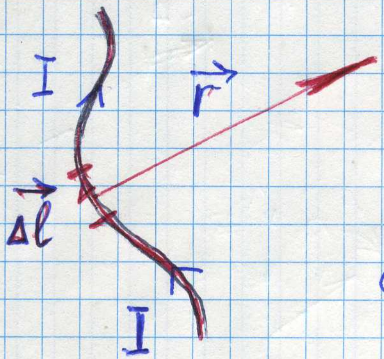
$$\boxed{I = nqSV_{др}}$$

здесь подставлено выр-е для силы тока

Учтено также, что

$$k\frac{1}{c^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\varepsilon_0\mu_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Получена, таким образом, формула Био-Савара-Лапласа для индукции $\vec{\Delta B}$ магнитного поля, создаваемого элементом Δl провода с током I в некоторой точке наблюдения с радиус-вектором $\vec{r}$ отложенным от элемента с током:



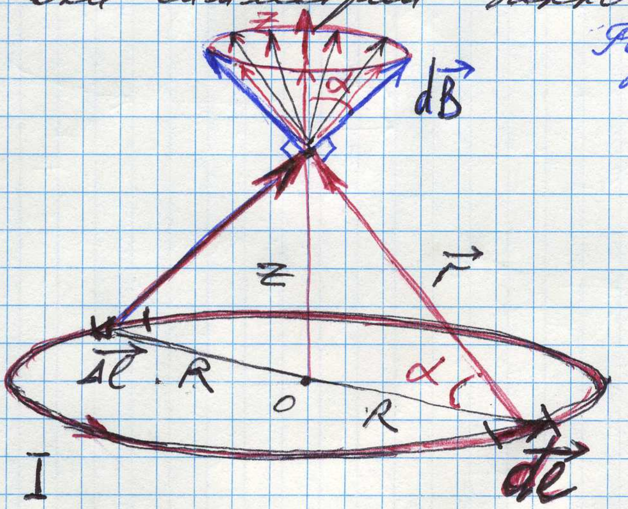
$$\boxed{\vec{\Delta B} = \frac{I\mu_0}{4\pi r^3}\left[\vec{\Delta l}\times\vec{r}\right]}$$

Формула Био-Савара-Лапласа

Судя по полученной формуле:

$$\vec{\Delta B}\perp\vec{\Delta l}, \quad \vec{\Delta B}\perp\vec{r}.$$

Используя полученную формулу, можно легко вывести выражение для индукции $\vec{B}$ магнитного поля кругового витка с током I в любой точке на оси симметрии данного витка:



Результирующее поле направлено по оси Z, равно сумме „веера" векторов $\vec{dB}$ от отдельных элементов с током.

$$B_{рез} = B_Z = \oint|\vec{dB}|\cos\alpha = \frac{I\mu_0}{4\pi r^3}\, r\cos\alpha\oint dl = \frac{I\mu_0}{4\pi r^2}\cdot\frac{R}{r}\cdot 2\pi R = \frac{I\mu_0 R^2}{2r^3} = \frac{I\mu_0 R^2}{2(R^2+Z^2)^{3/2}}$$

R — радиус кругового витка.

$$\Rightarrow \boxed{B(Z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+Z^2)^{3/2}}}$$

Эта формула будет использована в лабораторной работе №13 по измерению магнитного поля Земли, точнее, горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.