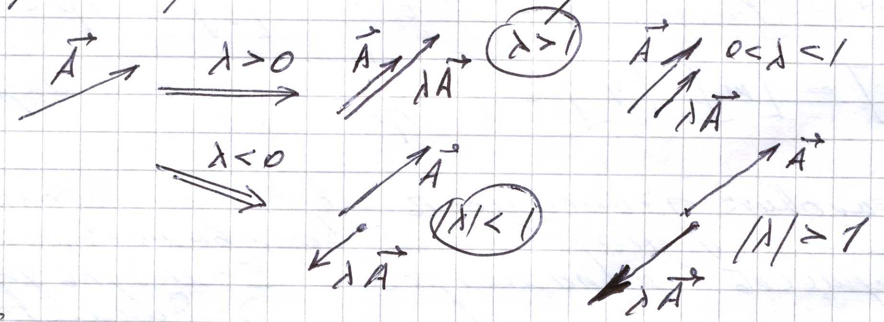
Лекция 3

§1. Элементы векторной алгебры

(1) Сложение (2) Вычитание — определены на прошлой лекции.

(3) Операция умножения вектора на число



Примеры $\quad m,\ \vec{V} \rightarrow \vec{p}=m\vec{V}$

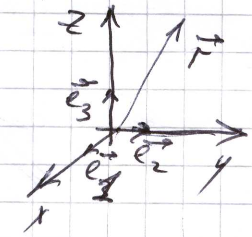
$q,\ \vec{E} \rightarrow \vec{F}_{эл}=q\vec{E},\quad q\gtrless 0\quad \vec{F}\uparrow\downarrow\vec{E}$

$$\vec{R}_{ц.м}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_N\vec{r}_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N}$$

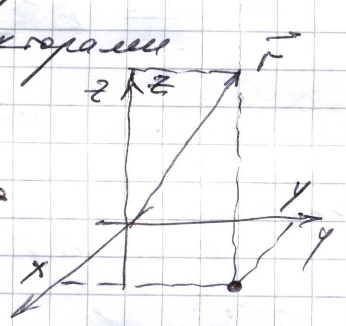
и т.д. эта операция умнож. часто применяется

(4) Скал. пр-е $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\varphi$

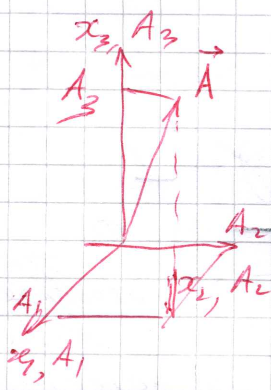
Координатный метод работы с векторами



$$\vec{r}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3 = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$



$\vec{r}=(x,y,z)$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ед. векторы, орты

$$\vec{e}_1\equiv\vec{i},\quad \vec{e}_2=\vec{j},\quad \vec{e}_3=\vec{k}$$

$$\vec{e}_k^{\,2}=1,\quad \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0,\quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=0,\quad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{e}_1=(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_1=A_1!$$

$\vec{A}\cdot\vec{e}_k=A_k$ — Правило вычисления проекции вектора на ось x_k.

$$\vec{A}\pm\vec{B}=(A_1\pm B_1)\vec{e}_1+(A_2\pm B_2)\vec{e}_2+(A_3\pm B_3)\vec{e}_3$$

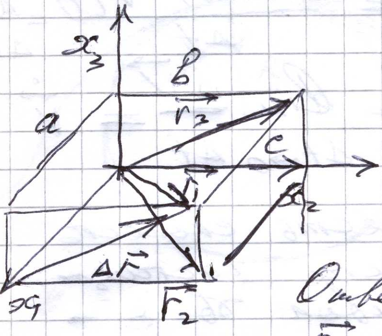
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)(B_1\vec{e}_1+B_2\vec{e}_2+B_3\vec{e}_3)$$

$$=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

— правило вычисления скал. пр-я через проекции векторов

$A\cdot B = |A||B|\cos\varphi = |A|$ Проекция(B на A) $= |A|\,B_A = |B|\,A_B$

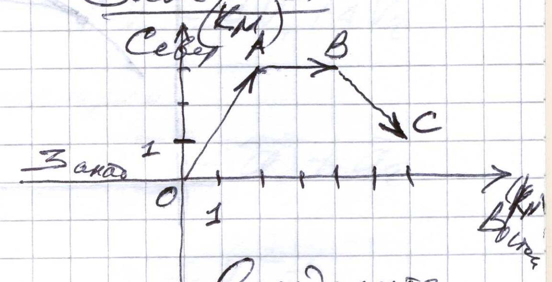
Задача 1



В сист. коорд. находится параллелепипед с объемом $V = a\cdot b\cdot c$. Определите $\vec r_1$, $\vec r_2$, $\vec r_3$ и $\Delta\vec r$

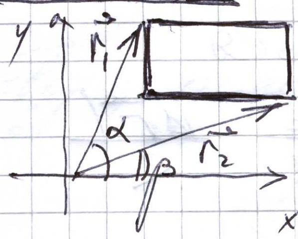
Ответ: $\vec r_1 = a\vec i + b\vec j + c\vec k$
$\vec r_2,\ \vec r_3,\ \Delta\vec r = ?$

Задача 2



Определите перемещения точки $\Delta\vec r_{OA}$, $\Delta\vec r_{AB}$, $\Delta\vec r_{BC}$ и результирующее $\Delta\vec r_{OC}$.

Задача 3

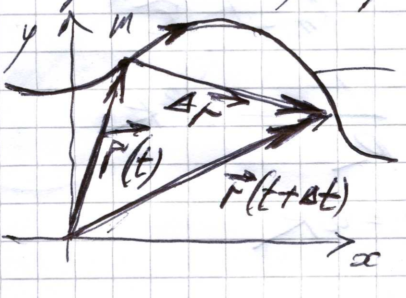


Известны $|\vec r_1| = a$, $|\vec r_2| = b$, α, β

Определите периметр прямоугольника

§2. Векторный способ описания движений. Скорость и ускорение

При векторном способе описания движений работают с векторами, не обращаясь к составляющим этих векторов по коорд. осям, т.е. без координат. Покажем как это делается.
Введём с помощью век. способа понятия скорости и ускорения.



частица m — точечная (мат. точка — абстракция)

траектория — линия вдоль которой происх. дв-е

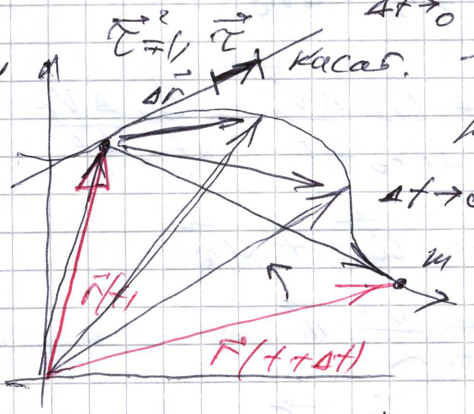
$$\vec V_{ср} = \frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \frac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t},\quad \vec V_{ср}\uparrow\uparrow\Delta\vec r.$$

Устремим $\Delta t\to 0$, получим мгнов. скорость частицы:

$$\vec V_{мгнов} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t} \overset{def}{=} \frac{d\vec r}{dt} \overset{def}{=} \dot{\vec r}$$

$\overset{def}{=}$ по определению

$|\vec\tau| = 1$, $\vec\tau$ касат.



мгнов. скорость дается производной радиуса вектора частицы по врем.

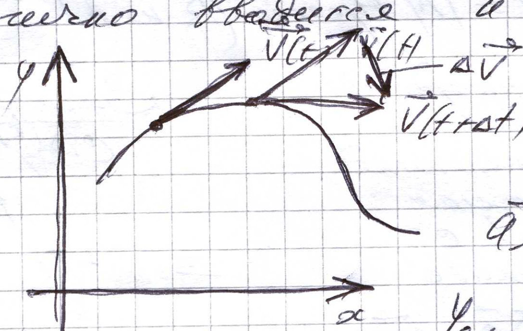
Как направлена $\vec V_{мгнов}$?

Рассмотрение показывает, что $\Delta\vec r\to 0$, $\Delta t\to 0$

$\Delta\vec r|_{\Delta t\to 0}$ — приближается по направлению к касательной с ед. вектором $\vec\tau$.

$\vec V_{мгнов} = \frac{d\vec r}{dt}\uparrow\uparrow\vec\tau$ — параллельна касательной

Аналогично вводится и ускорение.



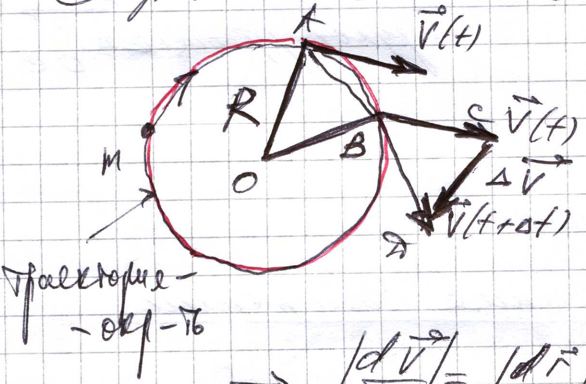
$$\vec a_{ср} = \frac{\vec V(t+\Delta t)-\vec V(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec V}{\Delta t}$$

$$\vec a_{мгнов} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec V}{\Delta t} = \dot{\vec V}$$

Ускорение есть скорость изменения скорости частицы.

Рассм. частный случай ускор. криволин. дв-я — движение по окр-ти!

(А) равном. дв. частицы по окр-ти $|\vec V| = const$



$\Delta OAB \sim \Delta BCD$

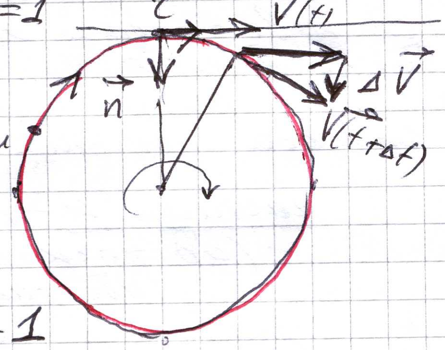
$$\Rightarrow \frac{|\Delta\vec V|}{|\vec V|} = \frac{AB}{OA} = \frac{|\Delta\vec r|}{R}$$

$$\Rightarrow |\Delta\vec V| = |\Delta\vec r|\frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\vec V}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec r}{dt}\right|\frac{V}{R}, \quad a_n = \frac{V^2}{R} \perp \vec\tau$$

нормальное или центростремит. ускор.

$\vec\tau^2 = 1$



$$\Delta\vec V \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} d\vec V \perp \tau$$

$$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \vec a_n \perp \vec\tau$$

$$|\vec a_n| = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

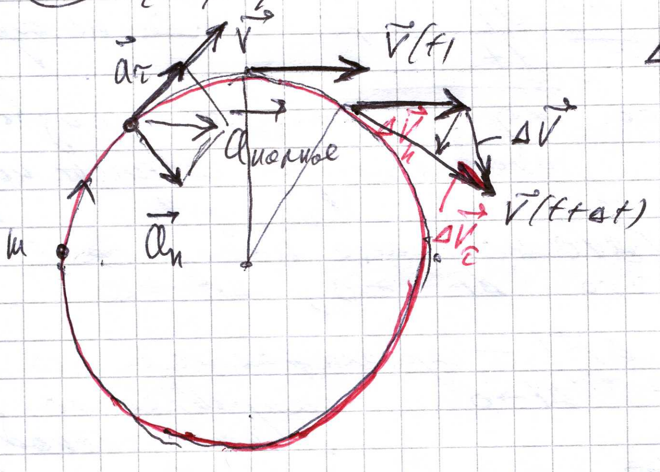
$$V = \omega R$$

$\vec n^2 = 1$

$\vec n$ — вектор нормали к окр-ти, провед. к центру

$\vec\tau$ — касат. ед. вектор

(Б) $|\vec V| \neq const$



$$\Delta\vec V = \Delta\vec V_n + \Delta\vec V_\tau$$

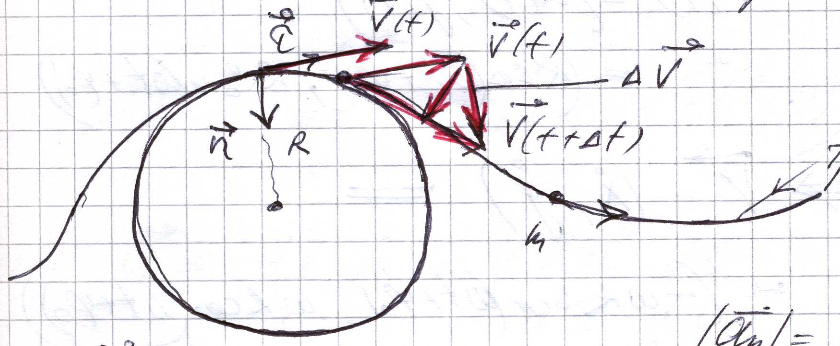
$$\vec a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec V_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec V_\tau}{\Delta t}$$

$$= \vec a_n + \vec a_\tau$$

$$\vec a_n = \frac{V^2}{R}\vec n$$

$$\vec a_n = \dot V\cdot\vec\tau.$$

(B) Общий случай криволин. дв-я.



$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_n + \Delta\vec{V}_\tau$$

$$\vec{a}_{полн} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$\vec{n}^2 = 1, \quad \vec{\tau}^2 = 1$

$$|\vec{a}_n| = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

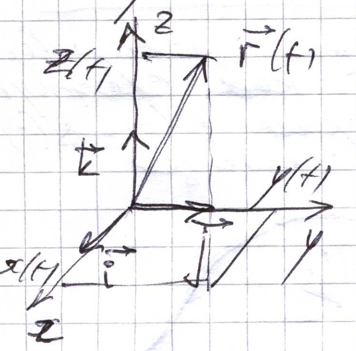
R – радиус окр-ти, вписанной в траекторию в рассм. мом. времени.

$$|\vec{a}_\tau| = |\dot{V}| \quad \vec{a}_\tau = \dot{V}(t)\,\vec{\tau}$$

Говоря о состоянии дв-я частицы, имеют в виду её положение $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{V}(t)$. По скорости м. быть вычислено ускорение $\vec{a}(t) = \dot{\vec{V}}(t)$.

§3 Координатный способ описания движений.

При координатном описании движений исходят и представления векторов их составляющими в выбр. системе отсчета.



Местоположение частицы в методе координат:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Её мгнов. скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (V_x, V_y, V_z)$$

$$= \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{e}_3$$

$$= (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$$

$\vec{r}^2 = (\vec{r}, \vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2$

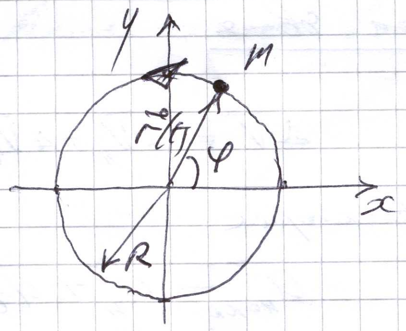
$\vec{V}^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2, \quad |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$= (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ — модуль ускорения

Рассм. конкрет. пример исп. коорд. метода — равном. дв-е частицы по окр-ти.



$$\vec r(t) = (x(t), y(t)) = (R\cos(\omega t+\varphi_0), R\sin(\omega t+\varphi_0))$$

$$\Rightarrow \vec V = (\dot x, \dot y) = (-\omega R\sin(\omega t+\varphi_0), \omega R\cos(\omega t+\varphi_0))$$

$\varphi = \omega t + \varphi_0$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const$ — скорость изм. угла — угловая скорость

$$\Rightarrow \vec V^2 = \omega^2 R^2, \quad |\vec V| = \omega R$$

$$\vec a = (\ddot x, \ddot y) = (-\omega^2 R\cos(\omega t+\varphi_0), -\omega^2 R\sin(\omega t+\varphi_0)) = -\omega^2(R\cos(\omega t+\varphi_0), R\sin(\omega t+\varphi_0))$$

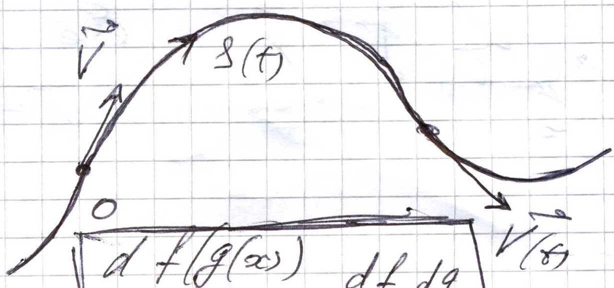
$$\vec a = -\omega^2 \vec r = \vec a_n$$

$$|\vec a| = \omega^2 R, \quad R = |\vec r|$$

§4. Естественный способ описания движения

При данном способе описания радиус-вектор положения частицы задают как сложную функцию длины дуги траектории $l(t) = s(t)$ или пути $s(t)$, пройденного частицей

$$\vec r(t) = \vec r(s(t))$$

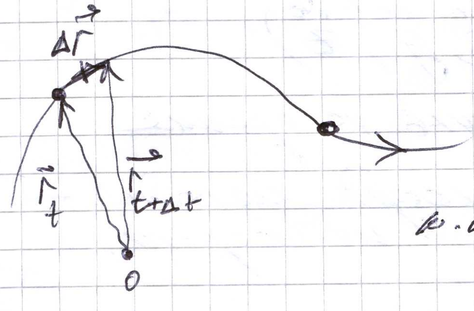


Скорость

$$\vec V \overset{def}{=} \frac{d\vec r(s(t))}{dt} = \frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec\tau \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d f(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}}$$

$\vec V = \vec\tau V(t)$, $V(t) = \frac{ds}{dt}$ — путевая скорость!



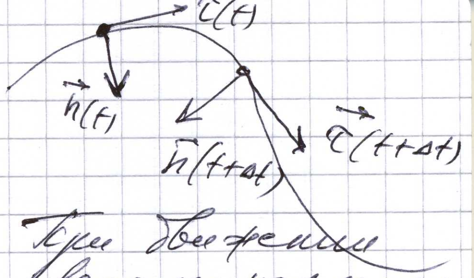
$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta s} = \frac{d\vec r}{ds} = \vec\tau$$

т.к. $|\Delta \vec r| \xrightarrow{\Delta t\to 0} \Delta s$

$\Delta\vec r \to d\vec r, \quad \Delta s\to ds$ | в пределе $|d\vec r| = ds$

Ускорение

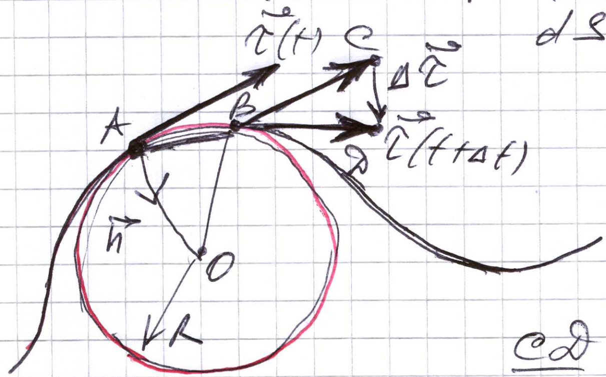
$$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(V(t)\,\vec\tau\big(S(t)\big)\Big)$$



При движении векторы нормали $\vec n(t)$ и касательной $\vec\tau(t)$ изм. со врем.

$$\Rightarrow \vec a = \frac{dV}{dt}\vec\tau + V\frac{d\vec\tau}{dS}\frac{dS}{dt}$$

$$= \dot V\vec\tau + V^2\frac{d\vec\tau}{dS}$$, осталось выяснить смысл $\frac{d\vec\tau}{dS}$



$\Delta OAO \sim \Delta BCD$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{|\Delta\vec\tau|}{|\vec\tau|} = \frac{AB}{AO}\Big|_{\Delta t\to 0} = \frac{\overset{\smile}{AB}}{R},$$

но $|\vec\tau| = 1$ и $\overset{\smile}{AB} \overset{\Delta t\to 0}{=} R\Delta\varphi$ - дл. дуги

$$\Rightarrow |\Delta\vec\tau| = \frac{R\Delta\varphi}{R} = \frac{\Delta S}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta\vec\tau|}{\Delta S}\Big|_{\Delta t\to 0} \to \frac{1}{R}, \quad d\vec\tau \parallel \vec n$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec\tau}{dS} = \frac{1}{R}\vec n$$

$$\Rightarrow a_{полн} = \dot V(t)\vec\tau + \frac{V^2}{R}\vec n$$ — получен тот же рез., что и в векторном подходе!