Лекция 3. Функционал действия. Принцип наименьшего действия. Функция и уравнения Лагранжа. Неоднозначность в задании функции Лагранжа. Обобщенные импульсы. Циклические координаты.

§1. Сопоставление уравнений Эйлера-Лагранжа задачи вариационного исчисления с уравнениями Лагранжа в механике. Формулировка принципа наименьшего действия в механике.

Сравним уравнения Эйлера-Лагранжа необходимого условия экстремума функционала $I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x)\,dx$ задачи вариационного исчисления с уравнениями Лагранжа для механической системы (одна частица с одной степенью свободы, обобщенной координатой q, в потенц. силовом поле с пот. энергией $U(q)$).

Задача об экстремуме функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x)\,dx$$

$y(x) \to y(x) + \delta y(x)$, $y(a) = y(b) = 0$

$$\Rightarrow \delta I[y(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Ур-е Эйлера-Лагранжа — необх. условие экстремума

$\Longleftrightarrow$

Принцип Д'Аламбера

$$\begin{cases} \sum_k (-m_k \ddot{\vec r}_k + \vec F_k)\,\delta \vec r_k = 0 \\ f_\alpha(\vec r, t) = 0, \ 1 \le \alpha \le d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$L = K - U$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0}$$

Уравнение движения в форме Лагранжа для частицы в потенц. силовом поле

Бросается в глаза идентичность выписанных уравнений, действительно, если отождествить зависимую и независимую переменные и ф-ции F с L, т.е.

$$x \longleftrightarrow t$$

$$y(x) \longleftrightarrow q(t)$$

$$F(y, y', x) \longleftrightarrow L(q, \dot q, t)$$

то, очевидно, уравнения слева и справа переходят одно в другое.

Проведенное сравнение наводит на мысль о формулировке вариационного принципа, связанного с экстремумом функционала:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x) \longleftrightarrow S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\,dt$$

Функционал $S[q(t)]$ был назван функционалом действия. С использованием этого функционала был сформулирован вариационный принцип механики, получивший название:

принцип наименьшего действия Гамильтона.

Принцип наименьшего действия Гамильтона (Назван так в честь Уильяма Гамильтона (1805 – 1865), использовавшего это принцип при построении Гамильтоновой формы механики):

рассмотрим систему с f степенями свободы. Состояние такой системы описывается f независимыми обобщенными координатами и скоростями

$$(q(t);\ \dot{q}(t)) \stackrel{def}{=} (q_1(t), \dots, q_f(t);\ \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t)).$$

Сопоставим рассматриваемой системе Лагранжиан

$$L(q, \dot{q}, t) \stackrel{def}{=} K(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

определяемый как разность кинетической и потенциальной энергии системы, и функционал действия

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt.$$

Истинному движению системы $q(t)$ в интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ соответствует экстремум функционала действия так, что при бесконечно-малых отклонениях δq от истинной траектории $q(t)$

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t),$$

с исчезающими при $t = t_1, t_2$ вариациями $\delta q(t)$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0,$$

вариация действия обращается в нуль: $\delta S[q(t)] = 0.$

Применяя сформулированный принцип и получим уравнения движения системы, как необходимое условие экстремума функционала действия. Для этого вычислим вариацию действия δS при вариации $\delta q(t)$ координат системы вблизи истинной траектории $q(t)$ системы:

$$\begin{matrix} q(t) \to q(t) + \delta q(t) \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \delta S = \sum_{k=1}^{f} \int \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt =$$

$$= \text{(интегрируем по частям)} = \sum_{k=1}^{f} \int \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|^{t_2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0$$ – должно выполняться при любых δq

В силу известной леммы вариационного исчисления:

Лемма. $\int_a^b f(y, y', x)\, \delta y(x)\, dx = 0 \quad \forall \delta y(x) \Longrightarrow f(y, y', x) = 0,$

из условия $\delta S[q] = 0$ выводим уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f$$ – система f уравнений $2^{го}$ порядка, т.к. содержит $\ddot{q}_k(t)$.

§2. Неоднозначность в задании лагранжиана и ковариантность уравнений Лагранжа.

Можно показать, что функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ механич. системы определяется не однозначно, а именно, с точностью до полной производной по времени от некоторой функции обобщенных координат и времени, то есть лагранжианы

$$L(q,\dot q,t) \quad \text{и} \quad \tilde L(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}$$

приводят к одним и тем же уравнениям Лагранжа.

В самом деле

$$\delta S_{нов} = \delta\int_{t_1}^{t_2} \tilde L(q,\dot q,t)\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(L(q,\dot q,t) + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}\right)dt =$$

$$= \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt + \delta\Lambda(q,t) = \delta S_{стар} + \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_k}\underbrace{\delta q_k}_{0}\Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{f}\int\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)dt \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = 0, \quad k=1,\dots,f$$

т.е. получаются те же уравнения Лагранжа, что и при исходном Лагранжиане.

Отметим также, что обобщенные координаты (и в том числе время) могут быть выбраны по-разному:

$$(q_1(t),\dots,q_f(t),t) \xrightarrow[t\to t']{q_k\to q_k'} \left\{q_k = q_k(q_1'(t'),\dots,q_f'(t'));\ t = t(q_1'(t'),\dots,q_f'(t'))\right.$$

переход к новым обобщенным координатам и новому времени можно трактовать как преобразования координат и времени. Имеем при этом для действия системы

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(q(q'(t')),\dot q(q'(t'),t'),t(q'(t'))\right)\frac{dt}{dt'}\,dt' =$$

$$= \int_{t_1'}^{t_2'} L'(q'(t'),\dot q'(t'),t')\,dt' = S[q'(t')],$$

здесь по определению

$$L(q(q'(t')),\dot q(q'(t'),t'))\frac{dt}{dt'} \stackrel{def}{=} L'(q'(t'),\dot q'(t'),t')$$

Очевидно, что действия $S[q]$ и $S'[q']$ при вариациях соответствующих координат:

$$q(t)\to q(t)+\delta q(t),\ \delta S[q]=0 \qquad q'(t')\to q'(t')+\delta q'(t'),\ \delta S[q']=0$$

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0 \qquad \delta q'(t_1')=\delta q'(t_2')=0$$

приводят к одинаковым по форме уравнениям движения.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt'}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k'} - \frac{\partial L'}{\partial q_k'(t')} = 0$$

$$1\le k\le f$$

Неизменность формы уравнений Лагранжа при переходе к новым обобщенным координатам и времени называется ковариантностью уравнений Лагранжа.

§3. Обобщенные импульсы. Циклические координаты и соответствующие им законы сохранения (интегралы движения).

Введём некоторые, полезные для дальнейшего развития предмета, определения.

Определение. Обобщенный импульс $p_k(t)$, соответствующий обобщенной координате q_k определяется как частная производная лагранжиана по соответствующей обобщенной скорости:

$$p_k \stackrel{def}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}, \quad k=1,\dots,f$$

Определение. Координата q_k называется циклической, если от неё не зависит лагранжиан, т.е. $\partial L/\partial q_k = 0$.

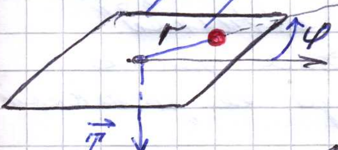
Очевидно, в силу уравнений Лагранжа, для циклич. коорд. q_k

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow p_k(t) = const,$$

т.е. циклической координате q_k соответствует сохраняющийся обобщенный импульс p_k.

Приведем примеры на определение сохраняющихся обобщенных импульсов (интегралов движения) в простейших ситуациях.

Пример 1. Точечная масса m на плоскости подтягивается нитью, пропущенной через отверстие в плоскости.



$$q(t) = (r(t), \varphi(t)), \quad L = \frac{m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)}{2} - U(r)$$

Очевидно, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi(t)$ – циклич. коорд. $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = p_\varphi$,

$$p_\varphi = mr^2\dot\varphi = const.$$

Пример 2. Однородность времени и сохранение энергии системы.

Пусть лагранжиан системы не зависит явно от времени, т.е. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. В таком случае, при сдвигах по времени, т.е. произвольных временных трансляциях $\delta\tau$:

$$t \to t' = t + \delta\tau, \quad L(t+\delta\tau) = L(t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

$\Rightarrow$ имеем в таком случае

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\ddot q_k\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(\dot p_k \dot q_k + p_k \ddot q_k\right), \text{ то есть}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - L\right) = 0 \Rightarrow H = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - L = Const.$$

Сохраняется функция Гамильтона, или обобщенная энергия, $H(p,q,t) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - L$ системы.

Задача. Докажите, что функция Гамильтона $H = H(q,p,t)$, действительно, является функцией обобщенных координат q_k и импульсов p_k.

Решение: $dH = \sum_{k=1}^{f}\left(dp_k \dot q_k + \cancel{p_k d\dot q_k}\right) - \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}d\dot q_k}\right)$ ■

Пример 3. Покажите, что для частицы в потенциальном силовом поле с пот. энергией частицы U в случае: **А.** однородности пр-ва, то есть при $\vec r \to \vec r' = \vec r + \vec a$, из $L(\vec r + \vec a) = L(\vec r)$, т.е. $\partial L/\partial \vec r = 0$, следует сохранение импульса частицы, т.е. $\vec p = const$.

Б. Изотропности пространства, т.е. при $\vec r \to \vec r' = \vec r + [\delta\vec\varphi \times \vec r]$ из неизменности лагранжиана частицы при поворотах, следует сохранение момента импульса $[\vec r \times \vec p] = const$.

Доказательство. А. $\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{a} \to \delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\delta\vec{a} =$ $\forall \delta\vec{a}$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = Const$$

Б. $\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}] \to \delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}] =$

$$= \delta\vec{\varphi}\left[\vec{r} \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\right] = \delta\vec{\varphi} \cdot [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = Const.$$

§4. Получение необходимого условия экстремума функционала в многомерном случае.

Рассмотрим функционал, зависящий от некоторого числа N функций $(y_1(x), \dots, y_N(x)) \equiv y(x)$, то есть от вектор-функции $y(x)$, задающийся некот. интегр. соотношением:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx.$$

Получим необходимое условие экстремума функционала „вблизи точки экстремума", т.е. вблизи „истинной" вектор-функции $y(x) = (y_1(x), \dots, y_N(x))$. Для этого устроим вариацию вектор ф-ции вблизи её „истинного" значения:

$$y(x) \to y'(x) = y(x) + \varepsilon h = (y_1 + \varepsilon h_1(x), \dots, y_N + \varepsilon h_N(x))$$

причем, $\delta y(x_1) = \varepsilon h(x_1) = \varepsilon h(x_2) = \delta y(x_2) = 0$, вариации δy в концевых точках равны нулю.

Потребуем, чтобы вариация функционала при этом равнялась нулю:

$$I[y] \to I[\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon h_k] = I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h', x)\, dx$$

$$\delta I = \frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0, \quad \frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^{N} \int \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} h_k + \frac{\partial F}{\partial y'_k} h'_k\right) dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial y'_k} \underbrace{h_k}_{0}\Big|_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \int \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right) h_k(x)\, dx = 0, \quad \forall h_k$$

Согласно всё той же лемме вариац. исчисления $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N}$$

Система уравнений Эйлера-Лагранжа

У физиков принято непосредственно вычислять вариацию $\delta I[y]$ при вариациях $\delta y(x) = (\delta y_1(x), \dots, \delta y_N(x))$:

$$\delta I[y] = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} \int \left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial F}{\partial y'_k}\delta y'_k\right) dx =$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial y'_k} \underbrace{\delta y_k}_{0}}\Big|_{x_1}^{x_2} + \sum_{k=1}^{N} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right) \delta y_k\, dx = 0 \quad \forall \delta y_k(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N}$$