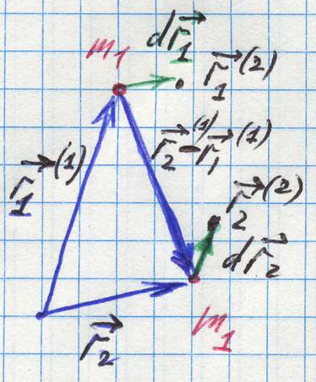
Лекция 3. Взаимодействия в механике Ньютона и в СТО. Принцип относительности Эйнштейна и тензор электромагнитного поля.

§1. Взаимодействия в механике Ньютона: концепция дальнодействия. Понятие поля, как удобного средства описания взаимодействий.



Вычислим работу сил гравитационного взаимодействия при небольших изменениях положений двух материальных частиц:

$$dA = \vec{F}_{12}\,d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}\,d\vec{r}_2 =$$

$$= \frac{G m_1 m_2 (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot d\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} - \frac{G m_1 m_2 (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} =$$

$$= -\frac{G m_1 m_2 (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot d(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} = d\,\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

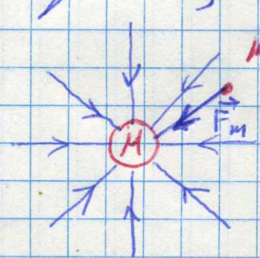
$$\rightarrow A_{(\vec{r}_1^{\,(1)},\vec{r}_2^{\,(1)})\to(\vec{r}_1^{\,(2)},\vec{r}_2^{\,(2)})} = \int\limits_{(\vec{r}_1^{\,(1)},\vec{r}_2^{\,(1)})}^{(\vec{r}_1^{\,(2)},\vec{r}_2^{\,(2)})} d\,\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} =$$

$$= -\left(-\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2^{\,(2)}-\vec{r}_1^{\,(2)}|} - \left(-\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2^{\,(1)}-\vec{r}_1^{\,(1)}|}\right)\right) \stackrel{def}{=} -(W_2-W_1)$$

$$\rightarrow W_{вз}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}, \quad \vec{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{21}.$$

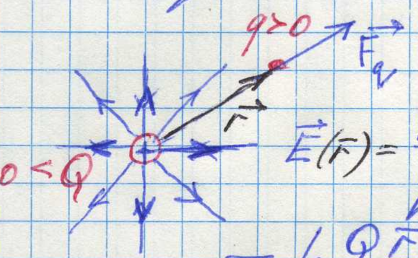
Изменение положения материальных точек мгновенно сказывается на изменении их потенциальной энергии и силе взаимодействия $\Longrightarrow$ концепция дальнодействия.

Как уже отмечалось в первой лекции, можно ввести удобное средство описания взаимодействий — концепцию силового поля уже в классической физике малых скоростей, т.е. механике и в электростатике:



$$\vec{g}(\vec{r}) \stackrel{def}{=} \frac{\vec{F}_m(\vec{r})}{m} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$$

гравитац. поле = ускорение своб. падения $\vec{g}(\vec{r})$



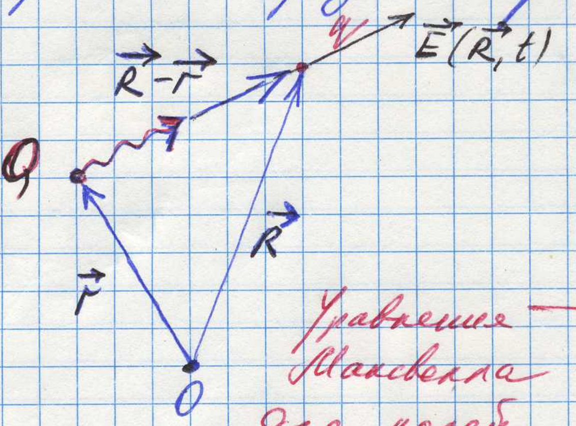
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q} = k\frac{Q\vec{r}}{r^3}$$

электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$

Поле $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{g}(\vec{r})$ выступают как удобное математическое средство описания взаимодействий. Согласно классической физике малых скоростей взаимодействия распространяются мгновенно

§2. Концепция близкодействия в СТО. Поля — переносчики взаимодействий.

Согласно специальной теории относительности взаимодействия не могут распространяться мгновенно. Поэтому должны существовать переносчики взаимодействий, их роль как раз и играют поля. Электромагнитное поле $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$, как было установлено Максвеллом, замечательным английским учёным жившим в девятнадцатом веке (1831–1879), удовлетворяют системе уравнений, носящей имя Максвелла:



Уравнения Максвелла для полей $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{B}(\vec{r},t)$ в вакууме.

$$\left\{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0},\\ &[\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)] = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t},\\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0,\\ &[\vec{\nabla}\times\vec{B}] = \mu_0\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

$\rho(\vec{r},t)$ и $\vec{j}(\vec{r},t)$ — плотность заряда и плотность электрич. тока.

Уравнения Максвелла, как мы покажем в ближайших лекциях, являются по сути своей релятивистскими уравнениями и адекватно описываются именно в рамках специальной теории относительности.

Замечательным результатом теории Максвелла является следующее выражение для потенциала $\varphi(\vec{r},t)$ электромагнитного поля:

Взаимодействие распростр. не мгновенно, а с конечной скоростью!

$$\varphi(\vec{R},t) = k\int\frac{\rho\left(\vec{r},t-\frac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c}\right)\cdot d^3\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|}$$

Концепция близкодействия в СТО.

Через данный скалярный потенциал φ и ещё и через векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r},t)$ выражаются поля $\vec{B}(\vec{r},t)$ и $\vec{E}(\vec{r},t)$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t},\quad \vec{B} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)].$$

Приведенное выше выражение для $\varphi(\vec{R},t)$ называется запаздывающим потенциалом, из данного выражения видно, что значение $\varphi(\vec{R},t)$ (Аналогично и $\vec{A}(\vec{R},t)$) определяется распределением зарядов, т.е. плотностью эл. заряда $\rho\left(\vec{r},t-\frac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c}\right)$ в момент времени $t-\frac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c}$, меньший времени наблюдения t на величину $\tau_{\text{запазд}} = \frac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c}$ — время, необх. для распространения электромагн. в-я из области, где расположены заряды, в точку наблюдения $\vec{R}$.

§3. Принцип относительности Эйнштейна и тензор электромагнитного поля. Начало вывода

Движение релятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле с напряжённостью $\vec{E}(\vec{r},t)$ эл. поля и индукцией магн. поля $\vec{B}(\vec{r},t)$ описывается, как было показано во второй лекции, следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_{рел}}{dt} = \vec{F}_{Лор} = q\vec{E} + q[\vec{V}\times\vec{B}], \\ \dfrac{d\mathcal{E}_{рел}}{dt} = \vec{V}\cdot\vec{F}_{Лор} = q\vec{V}\cdot\vec{E}. \end{cases}$$

q – заряд частицы, m – масса частицы.

Умножая эти уравнения на Лоренц-фактор $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}$ и учитывая выражение для собственного времени

$$d\tau = dt\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma}$$

получим из выписанной выше системы уравнений следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_{рел}}{d\tau} = q\gamma\dfrac{\vec{E}}{c} + q\gamma[\vec{V}\times\vec{B}], \\ \dfrac{dp^0}{d\tau} = q\gamma\vec{V}\cdot\dfrac{\vec{E}}{c}. \end{cases}$$

Вспомним далее выражение для четырёхскорости релятив. частицы:

$$U^\mu = (U^0, \vec{u}) = (\gamma c, \gamma\vec{V})$$

Левая сторона последней системы уравнений, очевидно, содержит различные компоненты четырёхвектора скорости частицы U^μ, причём линейно по этим компонентам. Правая сторона системы кратко может быть записана как $dp^\mu/d\tau$ – скорость изменения 4х-вектора импульса релятив. частицы. В силу сказанного вся последняя система уравнений может быть кратко записана в следующей форме:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q\,F^\mu{}_\nu U^\nu,$$

здесь $F^\mu{}_\nu$ – некоторая матрица, выражающаяся через поле $\vec{B}$ и $\vec{E}$, вскоре мы получим явную формулу-выражение для этой матрицы. Но до этого обсудим полезные для развития теории электромагнитного поля математические вопросы.

Небольшое математическое отступление.

Кратко напомним некоторые определения и приёмы работы с четырёхвекторами.

Определение $A^\mu=(A^0,\vec{A})$ – контравариантный четырёхвектор – это совокупность четырёх величин – компонент, которые при переходе из ИСО (K) в ИСО (K'), преобразуются как 4х-векторы событий, т.е.

$$\beta=\frac{V}{c} \qquad A'^\mu=\sum_\nu L^\mu{}_\nu A^\nu \;\sim\; x'^\mu=\sum_\nu L^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$A'^0=\gamma(A^0-\beta A^1) \qquad x'^0=\gamma(x^0-\beta x^1),$$

$$A'^2=A^2,\; A'^3=A^3, \qquad x'^2=x^2,\; x'^3=x^3$$

$$A'^1=\gamma(A^1-\beta A^0) \qquad x'^1=\gamma(x^1-\beta x^0)$$

преобразуется как

Здесь для краткости и удобства работы введена матрица преобразований Лоренца:

$$L^\mu{}_\nu=\begin{array}{c} 0\to \\ 1\to \\ 2\to \\ 3\to \end{array}\begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ – матрица } 4\times 4$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

номера строк

номера столбцов

Определение $A_\mu=(A_0,-\vec{A})=(A^0,-\vec{A})$ – ковариантный 4х-вектор определяется с помощью операции опускания индекса:

$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu, \quad \underbrace{g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}}_{\text{метрич. тензор}}\overset{def}{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1, & 0, & 0 \\ 0 & 0, & -1, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Действительно: $A_0=g_{00}A^0=A^0$,

$A_1=g_{11}A^1=-A^1$ и т.д.

Зачем нужны ковариантные 4х векторы? Через них, т.е. с их использованием, легко переписываются скалярные произведения 4х векторов:

$$A\cdot B\overset{def}{=}A^0B^0-A^1B^1-A^2B^2-A^3B^3\overset{def}{=}A^0B_0+A^1B_1+A^2B_2+A^3B_3$$

$$=\sum_{\mu=0}^{3}A^\mu B_\mu=$$

$$=A^\mu B_\mu$$

по повторяющимся индексам производ. суммир.

Соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам!

В выражениях типа

$$A'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

сумма по ν

суммирование по нижнему и верхнему повторяющимся индексам называется свёрткой и выполняет роль „скалярного произведения“ — то же, что и в $A\cdot B = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu}$

Имеем для прямого и обратного преобр. Лоренца:

$$A'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(\beta) A^{\nu}, \qquad A^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(-\beta) A'^{\nu}$$

т.е.

$$L(\beta) = L^{-1}(-\beta), \quad L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$$

Более того, нетрудно сообразить, что

$$L^{-1}(\beta) = L(-\beta) = L^{T}(\beta)$$

Действительно:

$$(L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\nu}(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma, & \beta\gamma, & 0, & 0 \\ \beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(L^{T})^{\mu}{}_{\nu}(\beta) \overset{def}{=} \underbrace{L_{\nu}{}^{\mu}(\beta) = g_{\nu\sigma} g^{\mu\tau} L^{\sigma}{}_{\tau}(\beta)}_{\text{получается из операциями опускания и поднимания индексов } \sigma \text{ и } \tau}$$

Символически прямое и обратное преобразования Лоренца для ковар. и контравар. 4х векторов записывается очень просто

$$A' = LA \xrightarrow{\text{в компонентах}} A'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

$$A = L^{T} A' \qquad A^{\mu} = (L^{T})^{\mu}{}_{\nu} A'^{\nu} = L_{\nu}{}^{\mu} A'^{\nu}$$

Причём компоненты при желании и навыке легко расставляются нужным и правильным образом.

Отметим ещё раз также удобную запись компонент векторного произведения двух трёхвекторов:

$$[\vec{V}\times\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

или эквивалентно: $[\vec{V}\times\vec{B}]_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_{\beta} B_{\gamma}$

сумма по β сумма по γ

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \alpha\beta\gamma \text{ — чётная перестановка } 123 \\ -1, & \alpha\beta\gamma \text{ — нечётная перестан. } 123 \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

§4. Принцип относительности Эйнштейна и тензор электромагнитного поля. Окончание вывода

Вернемся к уравнениям движения заряж. частицы, с зарядом q и массой m в электромагнитном поле. Очевидно, их можно переписать в следующей форме:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^\mu{}_\nu U^\nu \quad \begin{cases} \dfrac{dp^\alpha}{d\tau} = qU^0\dfrac{E_\alpha}{c} + q\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}U^\beta B_\gamma \\[2ex] \dfrac{dp^0}{d\tau} = qU^\alpha\dfrac{E_\alpha}{c} \end{cases}$$

сумма!

сумма!

Сравнивая левую и правые стороны последней записи, заключаем, что

$$F^\alpha{}_0 = \frac{E_\alpha}{c}, \quad F^\alpha{}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma,$$

суммы нет!

$$F^0{}_\alpha = \frac{E_\alpha}{c}, \quad F^0{}_0 = 0, \quad F^\alpha{}_\alpha = 0$$

т.е. матрица $F^\mu{}_\nu$ имеет следующий вид:

$$F^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{E}/c \\ \hline \vec{E}/c & \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{E_1}{c}, & \frac{E_2}{c}, & \frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда находим, поднимая или опуская соотв. индексы:

$$\underbrace{-F^{\nu\mu} = F^{\mu\nu}}_{\text{антисим. матрица!}} = g^{\nu\sigma}F^\mu{}_\sigma = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{E_1}{c}, & -\frac{E_2}{c}, & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

сумма!

сумма!

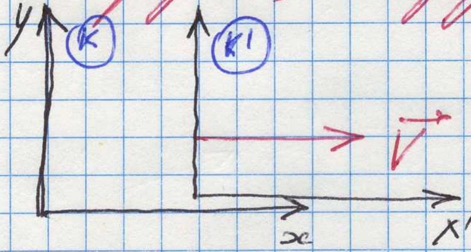
$$\underbrace{-F_{\nu\mu} = F_{\mu\nu}}_{\text{антисим. матрица!}} = g_{\mu\sigma}F^\sigma{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Подключим теперь к рассмотрению принцип относительности Эйнштейна, который гласит, что любой закон физики выглядит одинаково во всех ИСО. То есть уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле должны иметь один и тот же вид в любых ИСО, и мы должны записать их в виде:

в K $\rightarrow$ $\dfrac{dp^\mu}{d\tau} = qF^\mu{}_\nu U^\nu$ $\longleftrightarrow$ $\dfrac{dp'^\mu}{d\tau} = qF'^\mu{}_\nu U'^\nu$ $\leftarrow$ в K'

Выше было показано, что подобного рода уравнения можно переписывать и без индексов, при желании и необходимости такие индексы м. легко расставить и вернуться к форме с индексами.
Имеем, таким образом, в различных ИСО

$$\frac{dp}{d\tau} = qFu$$



$$\frac{dp'}{d\tau} = qF'u'$$

Причем, отметим, что мы знаем как связаны 4^x вектора p и p', u и u':

$$p' = Lp, \quad p = L^T p'; \qquad u' = Lu, \quad u = L^T u'$$

$$L^T = L^{-1}$$

поэтому
уравнение движения в (K') легко преобразовать в ур-е движения в (K) и обратно, а именно:

$$L\frac{dp}{d\tau} = qLFL^T u' \Longrightarrow \frac{dp'}{d\tau} = qLFL^T u',$$

или, возвращаясь к записи с компонентами:

$$\frac{dp'^{\mu}}{d\tau} = q\left(LFL^T\right)^{\mu}{}_{\nu} u'^{\nu} \overset{def}{=} qF'^{\mu}{}_{\nu} u'^{\nu}$$

Сравнивая обе стороны последнего равенства, получаем:

$$F'^{\mu}{}_{\nu} = \left(LFL^T\right)^{\mu}{}_{\nu} =$$

(Далее необходимо правильно расставить индексы в LFL^T)

$$= L^{\mu}{}_{\sigma} F^{\sigma}{}_{\tau} (L^T)^{\tau}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\sigma} L_{\nu}{}^{\tau} F^{\sigma}{}_{\tau}$$

Получаем, таким образом, закон преобразования компонент матрицы $F^{\mu}{}_{\nu}$ при переходе (K) → (K'):

$$F'^{\mu}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\sigma} L_{\nu}{}^{\tau} F^{\sigma}{}_{\tau},$$

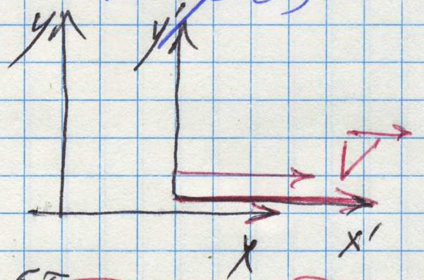
поднимая в последнем равенстве индекс ν, получим
и опуская и поднимая индекс τ

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\sigma} L^{\nu}{}_{\tau} F^{\sigma\tau}$$

Последнее выражение преобразуется как произведение компонент $x^{\mu}x^{\nu}$ четырёхвектора события!

Опираясь на проделанные выкладки, введём некоторые определения.

Определение Матрица $T^{\mu\nu}$ из (4×4)-величин называется контравариантным тензором второго ранга, если при переходе от ИСО (K) в ИСО (K') её компоненты преобразуются как произведение $x^\mu x^\nu$ двух контравариантных 4х-векторов, а именно:



$$x'^\mu = L^\mu{}_\sigma x^\sigma$$
$$x'^\nu = L^\nu{}_\tau x^\tau$$

перемножим:

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau T^{\sigma\tau} \quad \text{преобразуется как} \quad x'^\mu x'^\nu = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau x^\sigma x^\tau$$

Определение Матрица $T^\mu{}_\nu$ из (4×4)-величин называется смешанным тензором (единожды контравариантным и единожды ковариантным), если при переходе от ИСО (K) в ИСО (K') её компоненты преобразуются как произведение $x^\mu x_\nu$ компонент контравариантного и ковариантного четырёхвекторов, а именно:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\sigma x^\sigma$$
$$x'_\nu = L_\nu{}^\tau x_\tau$$

перемножим:

$$T'^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\sigma L_\nu{}^\tau T^\sigma{}_\tau \quad \text{преобразуется как} \quad x'^\mu x'_\nu = L^\mu{}_\sigma L_\nu{}^\tau x^\sigma x_\tau$$

Очевидно, матрица величин $F^{\mu\nu}$ является антисимметричным тензором, контравариантным тензором второго ранга, так как её компоненты преобразуются по закону:

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\sigma L^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -\vec{E}'/c \\ \vec{E}'/c, & -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B'_\gamma \end{pmatrix} \qquad L^\mu{}_\sigma = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F^{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 0, & -\vec{E}/c \\ \vec{E}/c, & -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma \end{pmatrix}$$

в (K') — в (K)

Задача Получите формулы преобразований Лоренца для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$, то есть выразите поля $\vec{B}'$ и $\vec{E}'$ в системе (K') через поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в (K).