Лекция 2. Принцип Д'Аламбера. Уравнения Лагранжа. Понятие о вариационном исчислении. Необходимое условие экстремума функционала

§1. Обобщенные координаты. Принцип Д'Аламбера

Использование уравнений для связей

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \quad 1 \le \alpha \le d$$

$\vec{r} = (\vec{r_1}, \dots, \vec{r_N})$ – радиус-векторы N частиц системы.

позволяет ввести $3N-d$ независимых обобщенных координат $(q_1, \dots, q_f)$, здесь $f = 3N-d$ – число степ. свободы.

$$\underbrace{\vec{r_k}, \ 1 \le k \le N}_{\text{Исх. набор } 3N \text{ координат}} \xrightarrow[\text{связей}]{\text{учет ур-ний}} \underbrace{q_1, \dots, q_f}_{f\text{ – незав. обобщ. координат}}, \quad f = 3N-2$$

$$\Rightarrow \vec{r_k} = \vec{F_k}(q_1, \dots, q_f; t)$$

Определение Максимальное число незав. вирт. перемещений – число степеней свободы системы. Координаты, соответствующие независимым вирт. перемещениям, называют обобщенными, обозначают их так: $q = (q_1, \dots, q_f)$

Как было показано в лекции 1.

Для системы с d-идеальными связями уравнения Ньютона + уравнения связей эквивалентны следующей системе уравнений:

$$3N+d \text{ ур-ний} \begin{cases} m_k \ddot{\vec{r_k}} = \vec{F_k} + \vec{R_k}, \\ f_\alpha(\vec{r}, t) = 0. \end{cases} \quad \xleftrightarrow[\forall \delta\vec{r_k}]{\sum_{k=1}^{N} \vec{R_k}\delta\vec{r_k} = 0} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} (-m_k\ddot{\vec{r_k}} + \vec{F_k})\delta\vec{r_k} \\ f_\alpha(\vec{r}, t) = 0. \end{cases}$$

Имеет место следующий принцип – формулируется на основе установленной эквивалентности последних систем ур.

Принцип Д'Аламбера Для системы N частиц с идеальными связями, задаваемыми уравнениями связей

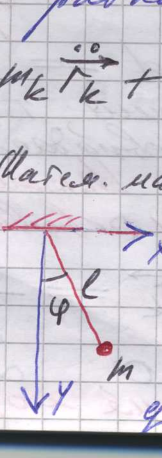
$$\underbrace{f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \ 1 \le \alpha \le d}_{\text{ур-я связей}}, \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{R_k} \cdot \delta\vec{r_k} = 0}_{\text{условия ид. связей}}, \ \forall \delta\vec{r_k}$$

сумма работ всех активных сил $\vec{F_k}$ и сил инерции $-m_k\ddot{\vec{r_k}}$ при любых виртуальных перемещениях $\forall \delta\vec{r_k}$ равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N} (-m_k\ddot{\vec{r_k}} + \vec{F_k}) \cdot \delta\vec{r_k} = 0.$$

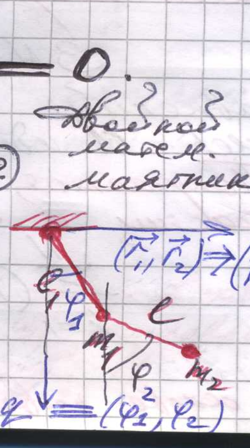
Примеры введения обобщенных координат:

① Матем. маятник



$(x, y) \Rightarrow q = \varphi$, т.к. $x^2 + y^2 = l^2$. $q = \varphi$

② Двойной матем. маятник



$(\vec{r_1}, \vec{r_2}) \Rightarrow (q = \varphi_1 \dots$

$q = (\varphi_1, \varphi_2)$

§2. Вывод уравнений Лагранжа.

Получим, используя принцип Д'Аламбера, уравнение движения для системы N-частиц с d идеальными связями.

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k, \quad \alpha = 1, \dots, d \quad \xrightarrow{\exists (q_1, \dots, q_f)} \quad r_k = r_k(q_1, \dots, q_f; t)$$

$$f = 3N - d$$

Связи, наложенные на систему, предполагаются идеальными, т.е.

$$\sum \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0,$$

поэтому $\forall \delta \vec{r}_k$, совместных с ид. связями

$$\sum_{k=1}^{N} (-m_k \ddot{\vec{r}}_k + \vec{F}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

Получим сначала некоторые необходимые соотношения.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t) \Rightarrow \delta \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Справедливы соотношения:

$$1^\circ \ \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \qquad 2^\circ. \ \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

1° непосредственно получается из выражения для $\dot{\vec{r}}_i$.

2° доказывается непоср. вычислением:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t},$$

с другой стороны

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

Эти выражение совпадают!

Далее преобразуем выражение для суммы работ всех сил, учитывая приведённое соотношение:

$$\sum_{k,j} (-m_k \ddot{\vec{r}}_k + \vec{F}_k) \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{k,j} \left(-m_k \ddot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} + \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \delta q_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k,j} \left(-m_k \ddot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} + \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) \delta q_j = 0 =$$

$$= \sum_{k,j} \left\{ + \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{m \dot{\vec{r}}_k^2}{2} - m_k \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) + \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0.$$

т.к. $-m_k \ddot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) + m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} =$

$$= -\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) + m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_j}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial K}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} + F_j \right) \delta q_j, \quad \text{здесь } F_j \stackrel{def}{=} \sum_k F_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

Так как виртуальные изменения δq_k обобщенных координат независимы, то получаем сл. систему уравнений Лагранжа:

Система уравнений Лагранжа
$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = F_j, \qquad 1 \le j \le f \right.$$

непосредственно для обобщенных координат $(q_1, \dots, q_f)$

Здесь величины K и F_j:

$$K = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\vec{r}}_k^{\,2}(q,t)}{2}$$ — кинетич. энергия системы N частиц

$$F_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$ — обобщенные силы, соотв. обобщ. координатам

В случае потенциальных сил: $\vec{F}_k = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k}$, в таком случае

$$F_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

и ур-я Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (K-U)}{\partial q_j} = 0$$

Обычно $U = U(q,t)$, поэтому $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, вводим функцию Лагранжа:

$$L(q, \dot{q}, t) \overset{def}{=} K(q, \dot{q}, t) - U(q,t)$$

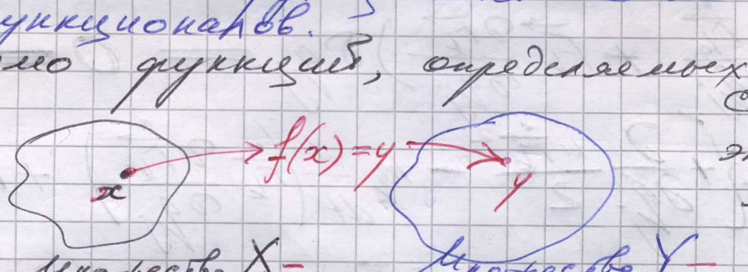
и для системы частиц с ид. связями и потенц. силами получаем сист. ур-ний Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \\ 1 \le j \le f. \end{array} \right.$$

Сист. f-уравнений второго порядка.

§3. Определение функционала. Задача об экстремуме функционалов.

Помимо функций, определяемых как соответствие, с помощью которого элементам одного множества сопоставляются элементы другого мн-ва



в математике и физике широко используются функционалы.

<u>Определение</u> Функционалом $I[y(x)]$ называется соответствие, посредством которого функции $y(x)$, заданной в некоторой области определения (например, в случае ф-ции одного переменного,

заданной на отрезке $[a, b]$), сопоставляется число.

$$\underset{a \le x \le b}{y(x)} \longrightarrow I[y(x)] \in R,\ C$$

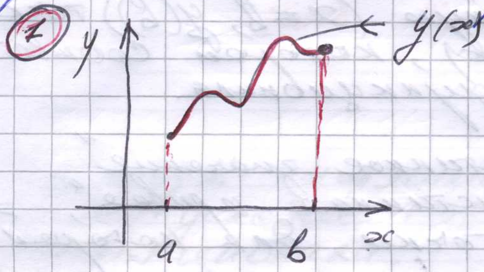
в случае вещест. функционалов; в случае комплексно-значных функционалов.

Очень часто функционалы задаются посредством интегральных выражений:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x)\,dx,$$

где $F(y, y', x)$ — некоторая заданная ф-ция $y(x)$, $y'(x)$ и x.

Приведём несколько примеров функционалов.

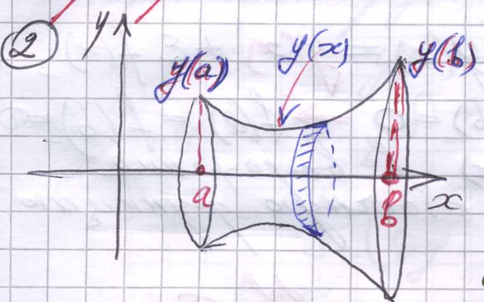
① 

Вычислим длину кривой, заданной ф-цией $y(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$l[y(x)] = \int_{x=a}^{x=b} dl = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Получен функционал длины кривой, заданной на отрезке $[a, b]$ некоторой ф-цией $y(x)$.

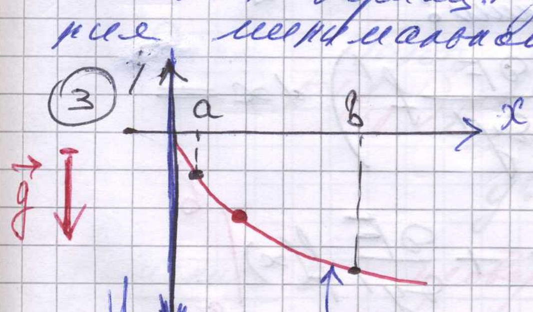
Можно поставить для данного функционала задачу вариац. исчисления: среди всех кривых $y(x)$, соединяющих точки $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$ определить кривую наим. длины.

② 

Вычислим площадь поверхности вращения, образованной вращением кривой $y = y(x)$ вокруг оси X (Вращаем плоскость y, x с кривой $y(x)$ вокруг оси x):

$$S[y(x)] = \int_a^b ds(x) = \int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Для полученного функционала площади можно поставить вариац. задачу о поиске поверхности вращения минимальной величины, т.е. имеющей миним. значение.

③ 

Можно поставить задачу об определении кривой $y = y(x)$ наискорейшего спуска: среди всех кривых $y(x)$ определить ту, соскальзывание массы m как бусинку, нанизанной на эту кривую, требует минимального времени.

В этом случае, очевидно, необходимо использовать функционал времени

$$T[y(x)] = \int_a^b \frac{dl}{v(x)} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2g(y-y(a))}}$$

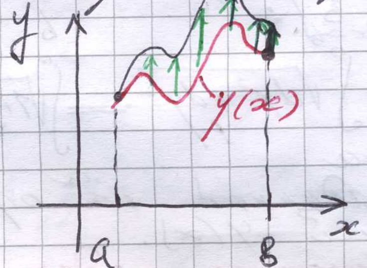
$$\frac{mv^2}{2} = mg(y(x)-y(a))$$

§4. Необходимое условие экстремума функционала

Пусть функционал $I[y(x)]$ для функции $y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, даётся интегральным соотношением:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x)\,dx,$$ здесь $F(y, y', x)$ — нек… функция y, y'…

Получим необходимое условие экстремума данного функционала, т.е. условие, при котором функционал принимает экстремальное значение, т.е. среди всех кривых $y = y(x)$, соединяющих некоторые начальную $(x=a, y(a))$ и конечную $(x=b, y(b))$ точ… Требуется определить кривую $y(x)$, которой соответствует экстремум данного функционала.



Пусть $y(x)$ — истинное значение функции — "истинная кривая", соед. фикс. "точки", для которой $I[y(x)]$ принимает экстремальн… значение.

Подвергнем $y(x)$ изменению вблизи её истинного значения $y(x)$ так что вариации $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ функции на концах (a, b) равны нулю:

$$y(x) \to y(x) = y(x) + \delta y(x) = y(x) + \varepsilon f(x),$$

некоторой малой парам. $\varepsilon \to 0$, $\delta y(a, b) = 0 \to f(a) - f(b) =$

Подставляя функцию $y(x) + \varepsilon f(x)$ в выражение для функционала, получаем обычную функцию одной переменной:

$$I[y + \varepsilon f] = \int_a^b F(y + \varepsilon f, y' + \varepsilon f', x)\,dx \stackrel{def}{=} \mathcal{F}(\varepsilon).$$

Далее воспользуемся условием экстремума ф-ции

Очевидно, экстремум $\mathcal{F}(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ соответствует экстремуму функционала $I[y(x)]$!

Имеем, после простых вычислений:

$$\left.\frac{d\mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} f + \frac{\partial F}{\partial y'} f'\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) f(x)\,dx + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial y'} f(x)\right|_a^b}_{\text{возникает при интегрировании по частям}}$$

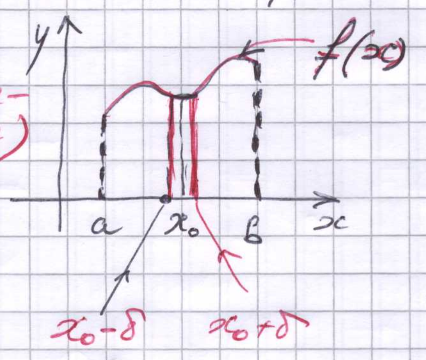
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) f(x)\,dx = 0$$

$\forall f(x),\ 0 = f(a) =$

Можно доказать важную лемму вариац. исчисления.

Лемма Если $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \equiv 0$ $\forall g(x)$, $g(a)=g(b)=0$, то $f(x) \equiv 0$.

Док-во (эвристическое — нестрогое)



Пусть $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & x_0-\delta \le x \le x_0+\delta \\ 0, & \text{- вне } [x_0-\delta,\, x_0+\delta] \end{cases}$ $\delta \to 0$

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\Big|_{\delta\to 0} = 2\delta f(x_0)\frac{1}{2\delta}\Big|_{\delta \to 0} = 0$$

$\Rightarrow f(x_0) = 0$ $\forall a \le x_0 \le b$.
т. е. $f(x) \equiv 0$ на $[a,\, b]$.

Используя сформулированную лемму, получаем необходимое условие экстремума для рассматриваемого функционала:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$ — Уравнение Эйлера — Лагранжа.

Физический подход к получению экстремума функционала: вычислим вариацию δI функционала $I[y(x)]$ при варьировании функции y вблизи её „истинного значения“

$$y(x) \to y(x) + \delta y(x), \qquad \boxed{\delta y(a) = \delta y(b) = 0}$$

Имеем для δI:

$$\delta I = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx = \qquad \forall \delta y(x)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y(x)\,dx = 0$$

В силу леммы $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$

ур-е Эйлера — Лагранжа.

Задача Пусть функция $F = F(y, y')$ т. е. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$,
т. е. $F(y, y')$ не зависит от x явно,
докажите тогда, что

$$y' F_{y'} - F = y'(x)\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{Const}.$$

Решение: проверяем непоср. вычислением

$$\frac{d}{dx}\left(y' F_{y'} - F\right) = \cancel{y'' F_{y'}} + \underbrace{y'\left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right) - F_y y'}_{=0 \text{ в силу ур. Эйлера — Лагранжа}} - \cancel{F_{y'} y''} \equiv 0.$$

Результат данной задачи упрощает поиск решений ур-я Эйлера — Лагранжа при $F = F(y, y')$ (В)