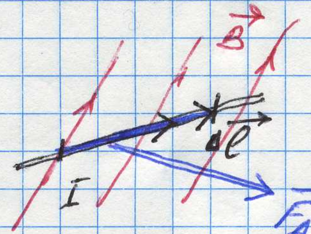
Лекция 2. Магнитное поле. Релятив. характер магн. взаимодейств. Релятив. обобщение 2-го закона Ньютона. Метрич. тензор. Контравар. и ковариантные 4х векторы.

§1. Магнитное поле. Релятивистский характер магн. взаимодействия



$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_A|}{I\,\Delta l\,\sin(\vec{\Delta l},\vec{B})}, \qquad 1\,Тл = \frac{1\,Н}{1\,А \cdot 1\,м}$$

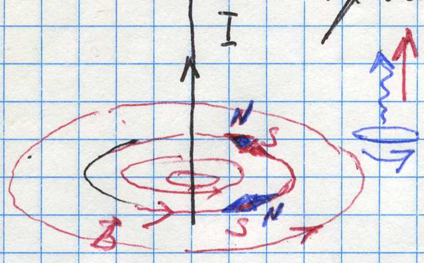
Единица индукц.

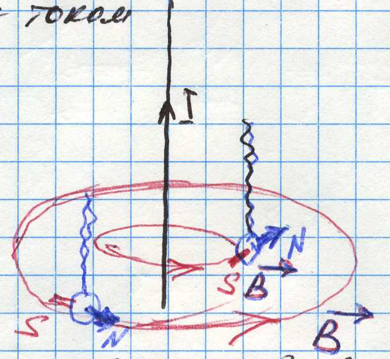
$$\vec{F}_A = I[\vec{\Delta l}\times\vec{B}] = nqSV[\vec{\Delta l}\times\vec{B}] = Nq[\vec{V}\times\vec{B}]$$

$$\frac{\vec{F}_A}{N} = \frac{\vec{F}_A}{nS\Delta l} = \vec{F}_{Лор.магн} = q[\vec{V}\times\vec{B}].$$

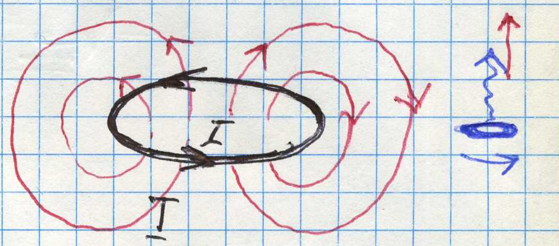
Магнитное поле изучается с помощью пробных тел — элементарных магнитиков (стрелка с током, петелька с током)

провод с током

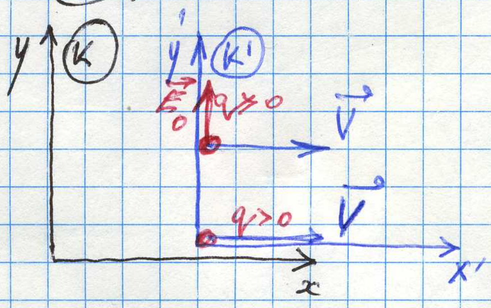




Кольцо с током



Покажем, что магн. взаимодействия, т.е. взаимодействия движущихся заряженных частиц, носят релятивистский характер. Рассмотрим для этого два параллельно движущихся заряда $q>0$ в ЛСО (K). С зарядами свяжем ИСО (K').



Имеем очевидное равенство

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{d\tau} = \frac{d\vec{p}\,'_\perp}{d\tau}, \quad т.е.$$

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{d\vec{p}\,'_\perp}{dt'\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}}}$$

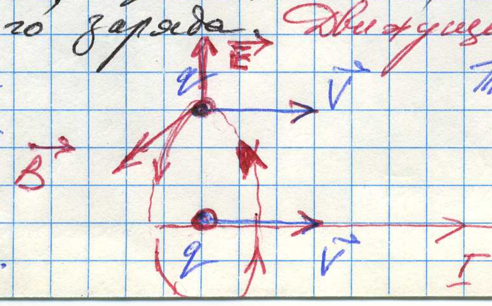
Но $\vec{v}\,'=0$, поэтому

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \vec{F}_{в\ ЛСО(K)} = \frac{d\vec{p}\,'_\perp}{dt'}\sqrt{1-V^2/c^2} = q\vec{E}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Здесь $E_0 = k\frac{q}{l^2}$, l — расстояние между зарядами.

$\vec{E}_0$ — поле, создаваемое нижним зарядом, в месте нахождения верхнего заряда. Движущийся заряд — это по сути эл. ток! (!!)

Такова качественная картинка явления:



Ток от нижнего заряда создает в месте нахождения верхнего заряда эл. поле $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{B}$.

$\vec{E}\perp\vec{V}$, $\vec{B}\perp\vec{V}$, $\vec{B}\perp\vec{E}$.

Количественно имеем следующие соотношения:

$$\frac{d\vec p_\perp}{dt} = \vec F_{в(K)} \overset{def}{=} q\vec E_{в(K)} + q[\vec V\times\vec B]_{в(K)} = q\vec E_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},$$

т. е.

$$q\vec E + q[\vec V\times\vec B] = q\vec E_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \underbrace{\frac{q\vec E_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}} - \underbrace{\frac{q\vec E_0\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$

неисчезающая при $\vec V\to 0$ часть электром. вз-я — эл. вз-е

исчезающая при $\vec V\to 0$ часть вз-я — магнитное вз-е.

Производим отождествления:

$$\vec E \overset{def}{=} \frac{\vec E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad [\vec V\times\vec B] = -\frac{\frac{V^2}{c^2}\vec E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Из второй формулы легко находим, учитывая то, что $\vec V\cdot\vec B=0$

$$[\vec V\times[\vec V\times\vec B]] = \vec V\underset{0}{(\vec V\cdot\vec B)} - \vec B V^2 = -\frac{V^2}{c^2}[\vec V\times\vec E_0]\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

т. е.

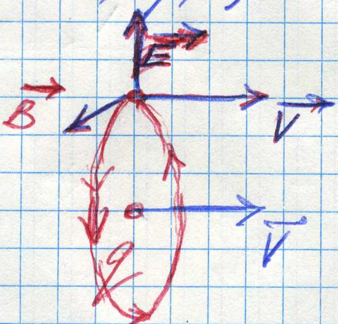
$$\vec B = \frac{\frac{1}{c^2}[\vec V\times\vec E_0]}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Если обозначить поля $\vec B'$, $\vec E'$ в (K'), в (K) $\vec B$, $\vec E$, то

в (K'): в (K):

$$\vec B'=0,\ \vec E'=(0,E'_y,0) \Longrightarrow \vec E=(0,E_y,0),\ \vec B=(0,0,B_z)$$

В (K') было только поле $\vec E'\neq 0$

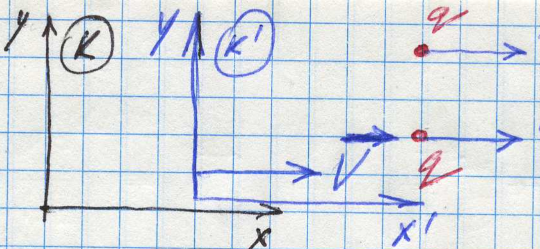


В (K), помимо $\vec E$, появилось и поле $\vec B\neq 0$.

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{\frac{1}{c^2}VE'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

§2. Преобразование Лоренца для полей $\vec B$ и $\vec E$.

Полученный результат можно обобщить следующим образом. Рассмотрим ИСО (K') движущуюся относит. (K) со скор. $\vec V$. Пусть в ИК (K) летят параллельно друг другу два заряда $q>0$ со скоростью $\vec v$ пост. Пусть (те же заряды) движутся относит. (K') со скоростью $\vec v'$ // оси x'.



Скор. $\vec{v}'$ – отн. (K')

$\vec{V}$ – скорость (K') отн. (K)

$\vec{v}$ – скор. q отн. (K)

Согласно закону сложения скоростей:

$$v = \frac{V+v'}{1+\frac{Vv'}{c^2}}.$$

Имеет место тождество:

$$\frac{1+\frac{Vv'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Согласно полученному выше результату будем иметь

$$\underset{\text{в } (K')}{E'_y} = \frac{E_{0y}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}, \quad \underset{\text{в } (K')}{B'_z} = \frac{\frac{1}{c^2}v'E_{0y}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$$

Точно также для системы (K):

$$E_y = \frac{E_{0y}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{\frac{1}{c^2}vE_{0y}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Подставим в последние выражения формулы для v через v' и V, учитывая отмеч. тождество, получим:

$$E_y = \frac{E_{0y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_{0y}\left(1+\frac{Vv'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{VB'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

аналогично

$$B_z = \frac{1}{c^2}\frac{(V+v')\cancel{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)}E_{0y}}{\cancel{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{B'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + \frac{\frac{1}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$ т.е. получены

ф-лы для преобр. полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ при переходе из (K') в (K)

$$E_y = \frac{E'_y+VB'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

<u>Задача</u> Получите аналогичным способом выр-я для E_z, B_y через E'_z и B'_y

§3. Релятивистское обобщение второго закона Ньютона.

Покажем, как можно устроить релятив. обобщение второго закона Ньютона. Будем исходить из формы закона Ньютона в нерелятив. механике.

$V \ll C$ - мех. Ньютона $\qquad\qquad$ $V \lesssim C$ - мех. СТО

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \xrightarrow[\text{на } 4^x \text{ векторы}]{\text{заменим } 3^x \text{ векторы}} m\frac{dU}{d\tau} = \mathcal{F}$$

$$dt \Rightarrow d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2} = inv$$

Здесь $U = (U^0, \vec{U}) = \frac{dx}{d\tau} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ - 4^x вектор скорости, $d\tau = dt\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} = inv$ - собств. время частицы, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^0, \vec{\mathcal{F}})$ - некоторый, пока абстрактный 4^x вектор силы. Выясним физич. смысл сформулированного релятив. обобщения второго закона Ньютона.

Имеем

$$U^2 = (U^0)^2 - \vec{U}^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = c^2 = const$$

$$\Rightarrow 2U\cdot\frac{dU}{d\tau} = 0 \longrightarrow mU\frac{dU}{d\tau} = U\cdot\mathcal{F} = 0$$

$$U\cdot\mathcal{F} = U^0\mathcal{F}^0 - \vec{U}\cdot\vec{\mathcal{F}} = \gamma c\mathcal{F}^0 - \gamma\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{F}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{F}}}{c},$$ т.е. компонента $\mathcal{F}^0$ выражается через $\vec{\mathcal{F}}$!

Поэтому

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}} \Rightarrow \gamma\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\gamma} = \vec{F}$$ релятив. ~~физическая~~ сила

$$\frac{dp^0}{d\tau} = m\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{d\frac{\mathcal{E}}{c}}{d\tau} = \frac{1}{c}\gamma\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{F}^0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{F}}}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\gamma} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

В результате проведенного релятив. обобщения 2-го зак. Н. получились осмысленные (имеющие разумный физич. смысл) уравнения

$V \ll C$ $\qquad\qquad\qquad$ $V \lesssim C$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \\ \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_{рел}}{dt} = \vec{F}_{рел} = \dfrac{\vec{\mathcal{F}}}{\gamma}, \\ \dfrac{d\mathcal{E}_{рел}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}_{рел}. \end{cases}$$

В полученных уравнениях может быть применено выражение для силы Лоренца, в результате получаем уравнение движения заряж. частицы в электр.м. поле:

релятив. обобщение 2го зак. Ньютона!

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_{рел}}{dt} = \vec{F}_{лор} = \underbrace{q\vec{E} + q[\vec{v}\times\vec{B}]}_{\text{Обобщение эксп. данных}}, \\ \dfrac{d\mathcal{E}_{рел}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}_{лор} = q\vec{v}\cdot\vec{E}. \end{cases}$$

$$\vec{P}_{рел} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

$$\mathcal{E}_{рел} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

§4. Метрич. тензор пространства Минковского. Ковариантные и контравар. 4х векторы.

$(v \ll c)$ Геометрия Евклида	$(v \lesssim c)$ Геометрия Минковского
$d\vec{r}^{\,2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3} \eta_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$	$ds^2 = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^{\,2} = \sum\limits_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{00}dx^0dx^0 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2$

$$\Rightarrow \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – метрич. тензор Евкл. пр-ва

$$\Rightarrow g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ – метрич. тензор пр-ва Минк.

Определение $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ – Контравар. 4х вектор

$$\underbrace{A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu}_{\text{Закон преобр-я компонент}},\qquad A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1),\quad A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0),\quad A'^2 = A^2,\quad A'^3 = A^3$$

A^μ – контравар. 4х вектора

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0 & 1, & 0 \\ 0 & 0 & 0, & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица преобр. Лоренца.

Определение. Исходя из выражения для $4^х$-интервала

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2$$

определяем наряду с dx^μ ковариантный $4^х$ вектор dx_μ

$$dx_\mu \overset{def}{=} \sum_\nu g_{\mu\nu}\, dx^\nu = (dx^0, -d\vec{x})$$

Совершенно аналогично, наряду с контравар. четырёхвекторами A^μ очень удобно использовать ковар. $4^х$ векторы A_μ, определяемые сл. образом:

$$A_\mu \overset{def}{=} \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu\nu} A^\nu$$ — соглашение о суммировании

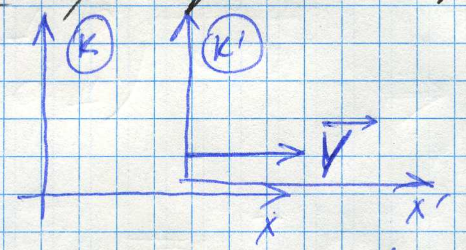
$$A_\mu = (A^0, -\vec{A}) \Longleftrightarrow A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

сопоставьте!

Получение A_μ из A^μ называется операцией опускания индекса. Аналогично можно определить и операцию поднимания индекса:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad g^{\mu\nu} \overset{def}{=} g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим матрицу обратного преобразования Лоренца



$$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A_\nu$$

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & -\beta\gamma, & 0, & 0 \\ -\beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из физич. соображений $\Longrightarrow$

$$A^\mu = (L^{-1})^\mu{}_\nu A'^\nu =$$

$$= (L^{-1})^\mu{}_\nu A'^\nu = L(-\beta)^\mu{}_\nu A'^\nu$$

$$\Longrightarrow (L^{-1})^\mu{}_\nu = (L(-\beta))^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma, & \beta\gamma, & 0, & 0 \\ \beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что

$$(L^{-1})^\mu{}_\nu = (L(-\beta))^\mu{}_\nu = (L^T(\beta))^\mu{}_\nu = L(\beta)_\nu{}^\mu$$

Действительно: $L_\nu{}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma, & \beta\gamma, & 0, & 0 \\ \beta\gamma, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0 & 0, & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$