Лекция 25. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Элементы теории теплоемкостей. Адиабатический процесс. Тепловые машины. Цикл Карно и его к.п.д.

§1. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Теплоемкости разл. процессов

Покажем, как первое начало термодинамики применяется к различным изопроцессам. При этом будем использовать понятие теплоемкости того или иного процесса.

<u>Определение</u> Теплоемкостью макросистемы называется величина

$$C_{\substack{\text{макросист.}\\ \text{для данного}\\ \text{процесса}}} = \frac{\text{đ}Q}{dT}\Big|_{\substack{\text{условие}\\ \text{процесса}}}$$

Например, бывают теплоемкости

$$C_V = \frac{\text{đ}Q}{dT}\Big|_V \text{ – при пост. объеме,}$$

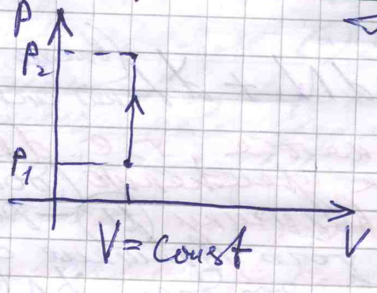
$$C_P = \frac{\text{đ}Q}{dT}\Big|_P \text{ – при постоянном давлении}$$

и т.д. Теплоёмкости подразделяются также на следующие:

- теплоемкость всей макросистемы;
- теплоёмкость единицы массы макросистемы – удельная;
- молярная теплоёмкость – теплоемкость одного моля.

Рассмотрим теперь различные изопроцессы с ид. газом.

(A) <u>Изохорический процесс</u>, $V = const$



Первое начало термод. имеет в д. случае вид

$$\text{đ}Q = dE + PdV = dE, \text{ т.к. } dV = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{đ}Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V,$$

но $E = E_{\text{ид. газа}} = \nu \frac{i_{\text{полн}} RT}{2}$,

поэтому

$$(C_V)_{\substack{\text{всей системы}\\ \text{– газа}}} = \frac{dE}{dT} = \nu \frac{i_{\text{полн}} R}{2}$$

$$C_{V,\text{молярн}} = \frac{C_{V\,\text{сист}}}{\nu} = \frac{i_{\text{полн}} R}{2}$$

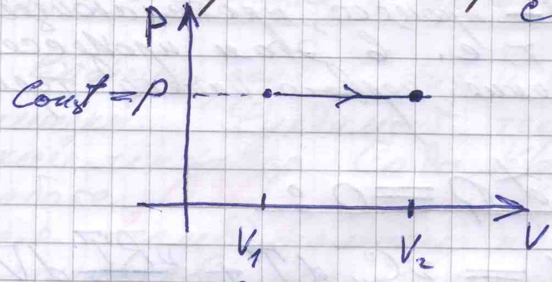
Для количества тепла $\text{đ}Q$ при изохорических процессах исп. формула:

(N3) $\boxed{dE_{\text{ид.г.}} = \nu C_V dT}$ для любых процессов

$$\text{đ}Q\Big|_{V=const} = dE = \nu C_{V,\text{мол}}\, dT, \quad C_{V,\text{мол}} = \frac{iR}{2}$$

$$\Delta Q_{1\to 2} = \Delta E_{1\to 2} = \nu C_V (T_2 - T_1)$$ – при конечном изменении состояния газа.

(Б) Изобарический процесс: $P = \text{const}$.



согласно первому началу термод.:

$$dQ\Big|_{P=\text{const}} = dE + PdV =$$

$$= \nu C_{V\,\text{мол}}\, dT + \nu R\, dT =$$

$$= \nu (C_{V\,\text{мол}} + R)\, dT,$$

в последнем равенстве использовано ур-е Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \nu RT \xrightarrow{P=\text{const}} PdV = \nu R\, dT, \text{ поэтому}$$

$$C_{P\,\text{сист}} = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \frac{dE}{dT} + \left(\frac{PdV}{dT}\right)_P = \nu C_{V\,\text{мол}} + \nu R = \nu (C_{V\,\text{мол}} + R)$$

$$\Rightarrow C_{P,\,\text{молярн}} = C_{P\,\text{мол}} = \frac{C_{P\,\text{сист}}}{\nu} = C_{V\,\text{мол}} + R = \frac{i+2}{2} R$$

Итак, для двух теплоемкостей $C_{V\,\text{мол}}$ и $C_{P\,\text{мол}}$ получены выражения

$$C_{V\,\text{мол}} = \frac{i_{\text{молек}}}{2} R, \quad C_{P\,\text{мол}} = C_{V\,\text{мол}} + R = \frac{i+2}{2} R,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_{P\,\text{мол}}}{C_{V\,\text{мол}}} \overset{\text{def}}{=} \gamma = \frac{i+2}{i}}$$

При изобарических процессах: $dQ_P = \nu C_P\, dT$,

При конечном изменении состояния макросистемы, ид. газа:

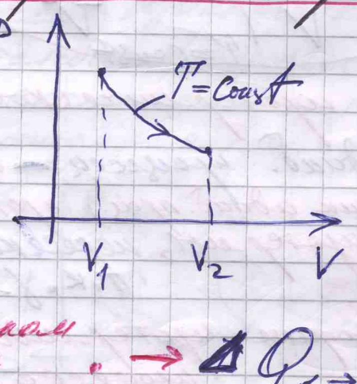
$$\Delta Q_{P(1\to 2)} = \Delta E_{1\to 2} + \Delta A_{\text{газ}\,1\to 2} = \nu C_V (T_2 - T_1) + P(V_2 - V_1) = \nu C_P (T_2 - T_1)$$

$$\Delta A_{P(1\to 2)} = P(V_2 - V_1) = \nu R (T_2 - T_1)$$

Из сравнения (А) и (Б) мы видим, что всегда $C_{P\,\text{мол}} = C_{V\,\text{мол}} + R > C_{V\,\text{мол}}$, это и понятно, так как при изобарических процессах часть тепла, подводимого к системе, идёт на совершение работы.

(В) Изотермический процесс: $T = \text{const}$

$$C_T = \frac{dQ}{dT}\Big|_{T=\text{const}} = \infty!$$



$$dQ\Big|_{T=\text{const}} = dE\Big|_{T=\text{const}} + PdV,$$

$$dE\Big|_{T=\text{const}} = \nu C_V\, dT\Big|_{T=\text{const}} = 0,$$

$$PdV = dA \xrightarrow{\left(P = \frac{\nu RT}{V}\right)} \frac{\nu RT\, dV}{V}$$

При конечном изменении состояния газа, от V_1 до V_2:

$$\to \Delta Q_{1\to 2,\ T=\text{const}} = \int_{V_1}^{V_2} dA = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Рассмотрим также так называемый адиабатический процесс с идеальным газом — процесс, протекающий в условиях теплоизоляции, т. е. в этом процессе $d^*Q = 0$, поэтому применение первого начала термодинамики даёт:

(7) Адиабатический процесс, $d^*Q = 0$:

$$d^*Q = 0 = dE + PdV = \nu C_V\, dT + \frac{\nu RT}{V} dV$$

Последнее дифференциальное уравнение можно легко проинтегрировать и получить уравнение адиабатического процесса, имеем, разделяя переменные:

берём неопр. интегралы $\longrightarrow \nu C_V \int \frac{dT}{T} + \nu \int \frac{R\,dV}{V} = \int 0 = \text{const}$ ← возникает при взятии неопр. интеграла

$$\Longrightarrow C_V \ln T + R \ln V = C_V \ln\left(T V^{\frac{R}{C_V}}\right) = \text{const}$$

$$\Longrightarrow \boxed{T V^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}}$$ — уравнение адиабатического процесса в переменных T, V.

Из выражения для отношения теплоёмкостей имеем:

$$\gamma = \frac{C_{P\,мол}}{C_{V\,мол}} = \frac{C_{V\,мол} + R}{C_{V\,мол}} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad \frac{R}{C_V} = \gamma - 1,$$

поэтому

$$T V^{\frac{R}{C_V}} = T V^{\gamma - 1} = \text{const},$$

если вспомнить теперь ур-е сост. ид. газа, т. е. $PV = \nu RT$, то получим:

$$\boxed{T V^{\gamma-1} = \text{const}} \xrightarrow{T = \frac{PV}{\nu R}} \boxed{P V^{\gamma} = \text{const}}$$

ур-е адиаб. процесса в T, V — переменных; ур-е адиаб. процесса в P, V переменных

Построим график адиабатического процесса в переменных P, V:

спадает как $\frac{1}{V^\gamma}$, быстрее чем $\frac{1}{V}$

$$\underbrace{P = \frac{\text{const}}{V^\gamma}}_{\text{ур-е адиаб. процесса}}, \quad \underbrace{P = \frac{\nu RT}{V}\Big|_{T=\text{const}} \propto \frac{1}{V}}_{\text{ур-е изотермического процесса}}$$

$$C_{адиаб} = \frac{d^*Q}{dT} = 0$$

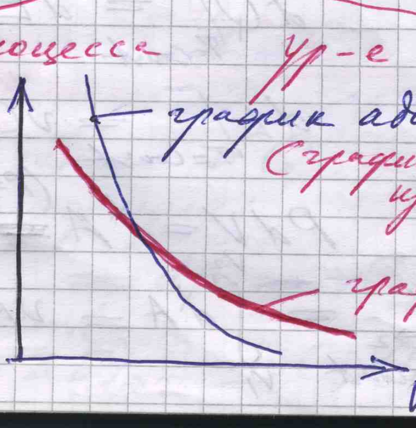


график адиаб. процесса — адиабата (график адиаб. проц.) проходит круче изотермы, пересекает изотерму т. к. $\gamma > 1$

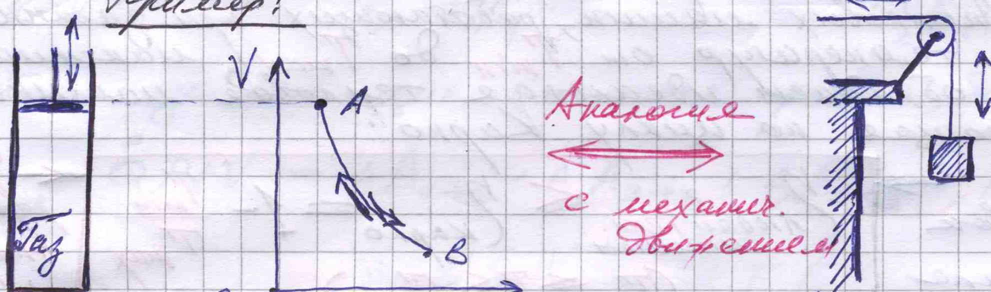
график изотермического процесса

§2. Обратимые и необратимые процессы. Циклический процесс

Важную роль в жизни человека и технике играют тепловые машины. Фундамент теории тепловых машин заложил французский инженер Сади Карно (1792–1832). В своей основной работе „О движущей силе огня" Карно ввёл очень важное для термодинамики понятия обратимого и необратимого процессов, циклического процесса, сформулировал второе начало термодинамики.

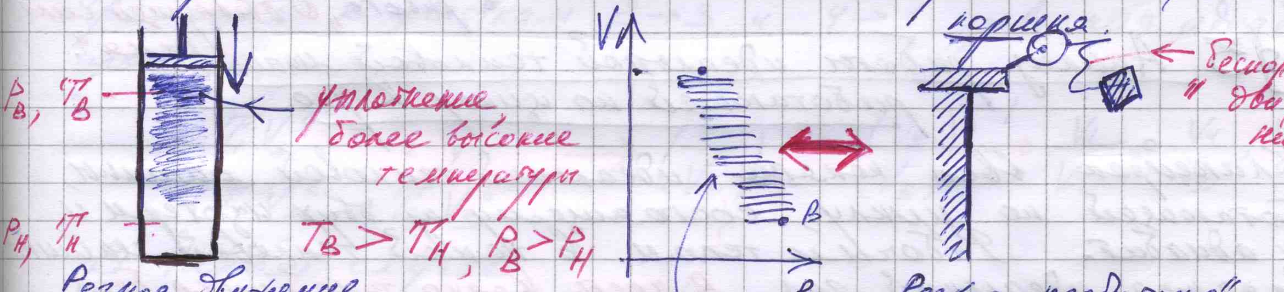
Определение Обратимый процесс — квазистатический процесс, протекающий в макроскопической термодинамической системе так, что система последовательно проходит через состояния термодинамического равновесия, при этом при движении в обратном направлении система проходит ту же последовательность состояний (только в обратном направлении), что и в прямом направлении.

Пример:



Медленное движ. поршня

Медленное „обратимое" движение поршня.



Резкое движение поршня

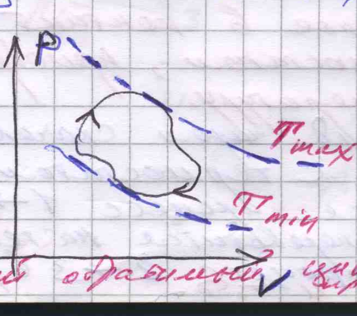
при заданных значениях объема газа в газе нет опред. значений давления.

Резкое „необратимое" движение нити и груза.

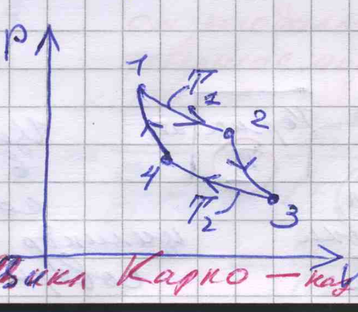
В практике и технике в основном реализуются необратимые процессы, тем не менее понятие идеализированных обратимых процессов также очень важны для анализа тепловых явлений и приложений.

Определение Циклический процесс — повторяющийся замкнутый квазистатический процесс, при котором система, стартуя из некоторого состояния и последовательно проходя цепочку состояний, возвращается в исходное состояние.

Примеры



Произвольный обратимый циклический процесс.

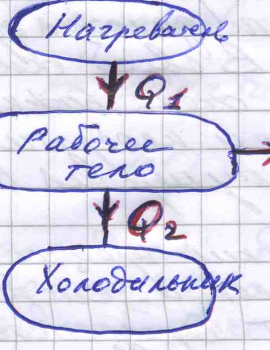


2 → 3, 4 → 1 } адиабаты

1 → 2, 3 → 4 } изотермы

Цикл Карно — назван в честь Карно.

При работе тепловых машин совершаются циклические процессы того или иного типа, что зависит от конкретного устройства машины.



При работе любой тепловой машины за полный цикл ее работы от нагревателя забирается количество тепла Q_1. Рабочее тело совершает работу A и некоторое ненулевое количество тепла Q_2 отдается холодильнику. Затем все повторяется, совершается новый цикл и т.д.

К.п.д. тепловой машины определяется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

в силу $Q_2 \neq 0$ $\eta < 1$ - к.п.д. всегда меньше единицы.

Из всех тепловых машин, работающих при заданном перепаде температур от T_{min} до T_{max}, максимальным к.п.д. обладает идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно:

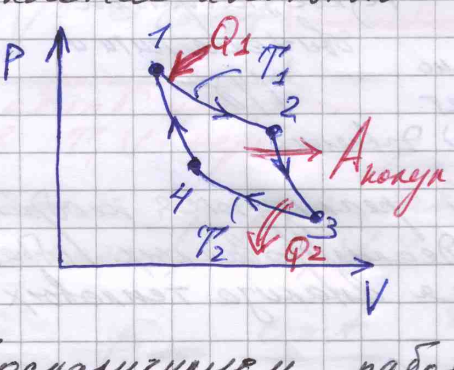
Одна из формулировок второго начала термодинамики.

$$\boxed{\eta_{\text{любой тепл. машины}} \le \eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad (T_{min} \le T \le T_{max})}$$

Формулировка Карно второго начала термодинамики в работе „О движущей силе огня".

§3 Анализ работы идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно.

Клапейрон ввел понятие идеальной тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат. Рабочим телом в такой тепловой машине является идеальный газ. В честь Карно такой цикл был назван циклом Карно.

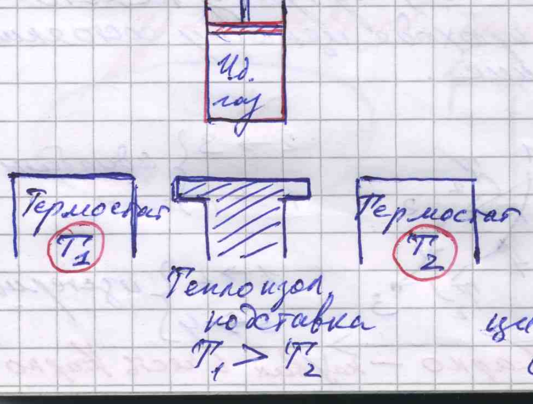


1→2 — изотерма с $T_1 = T_{max}$,

3→4 — изотерма с $T_2 = T_{min}$,

2→3 и 4→1 — адиабаты, соответствующие процессам, протекающим с идеальным газом в условиях теплоизоляции.

Проанализируем работу идеальной тепловой машины, работающей по указанному циклу Карно.



Термостат при заданной температуре T — это "тепловая баня", любое тело, приведенное в контакт с термостатом, приобретает его температуру.

Цилиндр с ид. газом сначала приводится в контакт с термостатом с $T_1 = T_{max}$, совершается процесс 1→2. Затем цилиндр с газом переводится на теплоизол. подставку, совершается процесс 2→3 в условиях теплоизоляции и т.д.

Имеем, используя первое начало термодинамики

$$\delta Q = dE + PdV$$

для различных участков цикла Карно, проходимого в прямом направлении, по часовой стрелке:

$1\to2$: $T = T_1 = T_{max} = const$, $dE = 0$, т.к. $E \underset{ид.г.}{=} \frac{\nu i R T}{2}$

$$\Delta Q_{1\to2} = \Delta A_{1\to2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV \overset{\left(P=\frac{\nu RT}{V}\right)}{=} \nu R T_1 \int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

$2\to3$: $\delta Q=0 \Rightarrow \Delta A_{2\to3} = -\Delta E_{2\to3} = -\frac{i\nu R}{2}(T_2-T_1) > 0$

Аналогично анализу $1\to2$, получаем результаты для процесса $3\to4$:

$3\to4$: $T=T_2=T_{min}=const$, $\Delta Q_{3\to4}=\Delta A_{3\to4} = \nu R T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} < 0$

$4\to1$: $\delta Q=0 \Rightarrow \Delta A_{4\to1} = -\Delta E_{4\to1} = -\frac{i\nu R}{2}(T_1-T_2)<0$

Работа за весь цикл, полезная работа, даётся выражением

$$A_{полезн} = \oint PdV = \Delta A_{1\to2}+\Delta A_{3\to4} + \cancel{\Delta A_{2\to3}} + \cancel{\Delta A_{4\to1}} =$$

$$= \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \nu R T_2\ln\frac{V_4}{V_3} = \oint \delta Q = \Delta Q_{1\to2}+\Delta Q_{3\to4}$$

Применяя к участкам $2\to3$ и $4\to1$ уравнения адиабатического процесса, получим:

$$\begin{matrix} T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \\ T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \end{matrix} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{V_4}{V_3},\ \frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}.$$

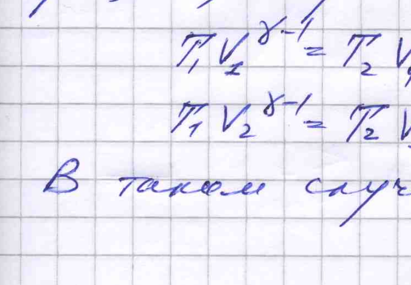
В таком случае

$$A_{полезн} = \nu R(T_1-T_2)\ln\frac{V_2}{V_1},\quad Q_1 = Q_{от\ нагрев} = \Delta Q_{1\to2}$$

$$\Delta Q_{затр} = Q_1 = \Delta Q_{1\to2} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{Карно} \overset{def}{=} \frac{A_{полезн}}{Q_1} = \frac{T_1-T_2}{T_1} = 1-\frac{T_2}{T_1} < 1}$$ к.п.д. цикла Карно

Задача. Получите эффективность ε_K идеальной тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно.



Решение: Эффективность холод. машины

$$\varepsilon_K = \frac{Q_2}{A}$$ — отношение отбираемого от холодильника тепла к совершаемой над рабочим телом работе

$$\varepsilon_K = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1-Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2}-1} = \frac{(Q_2/Q_1)}{1-(Q_2/Q_1)} = \frac{1-\eta_K}{\eta_K} =$$

$$= \frac{1-\frac{T_1-T_2}{T_1}}{(T_1-T_2)/T_1} = \frac{T_2}{T_1-T_2}$$

$\eta_K = 1-\frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 1-\eta_K$